Математика — $\left\{\begin{matrix}\text{царица}\\ \text{слуга}\end{matrix}\right\}$ всех наук

Любая наука достигает совершенства, только когда она выражается языком математики.

$6^{\text{я}}$ проблема Гильберта:

Дать математическую формулировку физики.

Физика	**Классическая механика**	**Квантовая механика**
Фазовое пространство	Симплектическое многообразие M	Проективизация $P(V)$, V — гильбертово пространство над $\mathbb{C}$
Наблюдаемая	Функция $A\colon M \to \mathbb{C}$	Нормальный оператор $\widehat{A}\colon V \to V$; $AA^* = A^*A$
Значение наблюдаемой в данном состоянии	$A(x)$	Случайная величина ω с распределением $p\Big(\omega \in \Omega \subset \mathbb{C}\Big) = (E_{\Omega}(A)\,\psi, \psi)$
Энергия	Функция $H\colon M \to \mathbb{R}$	Самосопряжённый оператор $\widehat{H}\colon V \to V$
Уравнения движения	$\dot{x} = \text{s-grad}\, H$ или $\dot{A} = \{H, A\}$	$\dot{\psi} = \frac{2\pi i}{h}\widehat{H}\psi$ или $\dot{A} = \frac{2\pi i}{h}[\widehat{H}, \widehat{A}]$

Аксиомы квантования (Dirac)

1. $\widehat{1} = \mathbf{1}$ (слева — функция, тождественно равная 1, справа — единичный оператор)

2. $(\lambda A + \mu B)\widehat{\ } = \lambda \widehat{A} + \mu \widehat{B}$; $\quad (\overline{A})\widehat{\ } = (\widehat{A})^*$

3. $\{A, B\}\widehat{\ } = \dfrac{2\pi i}{h} [\widehat{A}, \widehat{B}]$; $\quad [\,\widehat{p}; \widehat{q}\,] = \dfrac{h}{2\pi i} \cdot \mathbf{1}$

4. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ — полный набор наблюдаемых
$(\{A_i, B\} = 0 \ \forall\, i \ \Rightarrow \ B = \mathrm{const})$

$$\Downarrow$$

$\{\widehat{A}_1, \ldots, \widehat{A}_n\}$ — полный набор наблюдаемых
$([\widehat{A}_i, \widehat{B}] = 0 \ \forall\, i \ \Rightarrow \ B = \mathrm{scalar})$

П р и м е р

$M = \mathbb{R}^2$

с координатами p, q

$\sigma = dp \wedge dq$

$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$

$\dot{p} = -q$

$\dot{q} = p$

Период $T = 2\pi$

$V = L^2(\mathbb{R},\ dx)$

$\widehat{p}\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi}{dx}$

$(\widehat{q}\psi)(x) = x\ \psi(x)$

$\widehat{H} = \frac{1}{2}(\widehat{p}^2 + \widehat{q}^2)$

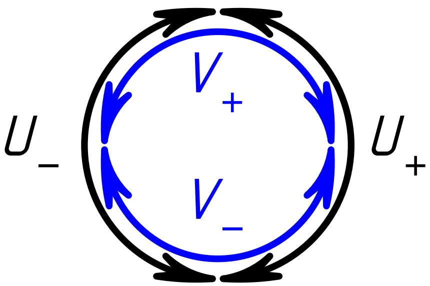
Собственные значения

$$\lambda_n = -\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Собственные функции

$$\psi_n = P_n(x)\ e^{-\frac{\pi x^2}{h} + i\left(n + \frac{1}{2}\right)t}$$

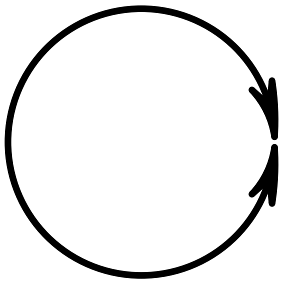
Многообразия, карты, атласы, гладкость



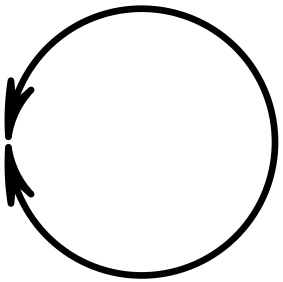
$(U_+,\, y)\ \ x>0,\quad (V_+,\, x)\ \ y>0$

$(U_-,\, y)\ \ x<0,\quad (V_-,\, x)\ \ y<0$

$U_- \cap V_+ :\ x = -\sqrt{1-y^2}$



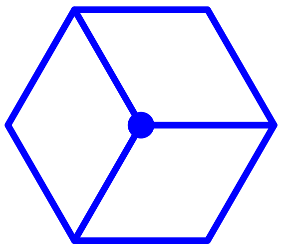
$(T_1,\, \theta_1)$
$0<\theta_1<2\pi$



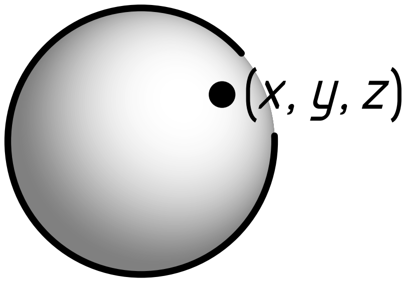
$(T_2,\, \theta_2)$
$-\pi<\theta_2<\pi$

$T_1 \cap T_2 :$ $\theta_1 = \theta_2$ сверху
$\theta_1 = \theta_2 + 2\pi$ снизу

Вопрос:



$M =$ поверхность куба.
Рассмотрим атлас из восьми карт (проекций вдоль диагоналей).
Какова гладкость этого атласа?



Сфера S^2: $x^2+y^2+z^2=r^2$

$$\sigma = \frac{dx\wedge dy}{z} = \frac{dy\wedge dz}{x} = \frac{dz\wedge dy}{x} =$$

$$= \frac{x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r}\cdot\left(\begin{matrix}\text{Евклидова}\\ \text{площадь}\end{matrix}\right)$$

Векторные поля и дифференциальные формы

$$\xi = a^i(x)\,\partial_i, \qquad \xi(f\cdot g) = \xi f\cdot g + f\cdot \xi g, \qquad \xi = \dot{x}(t)$$

$$\omega = \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$\Omega^k(M)\times\Omega^l(M)\to\Omega^{k+l}(M)$$

$$\mathrm{Vect}\ M\times\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)\colon\ \xi,\,\omega\to\iota_\xi\,\omega$$

$$\omega = \omega_i\, dx^i \qquad\qquad L_\xi\,\omega = \omega_i a^i\in\Omega^0 = C^\infty(M)$$

$$\iota_\xi(\omega_1\wedge\omega_2) = \iota_\xi\,\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^{\deg\omega_1}\,\omega_1\wedge\iota_\xi\,\omega_2$$

$$d\colon\ \Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$$

$$df = \partial_n f\, dx^k,\ \ d(\omega_1\wedge\omega_2) = d\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^{\deg\omega_1}\omega_1\wedge d\omega_2$$

$$[d,\,\iota_\xi] := d\circ\iota_\xi + \iota_\xi\circ d =: L_\xi \quad \text{(формула Картана)}$$

Оператор Ли

Поле ξ определяет поток $x(t)$,

задаваемый уравнением $\dot{x}(t) = \xi(x(t))$

Обозначение: $x(t) = \exp t\xi \cdot x(0)$

Для любого геометрического объекта T

$$L_\xi T = \frac{d}{dt}(\exp \xi t \cdot T)\Big|_{t=0}$$

Симплектические многообразия

$$(M, \sigma) \qquad \sigma = \sigma_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$$

$$d\sigma = \partial_k \sigma_{ij}(x)\, dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0 \qquad \underset{i\,j\,k}{\circlearrowleft} \partial_k \sigma_{ij} = 0$$

$$\|\sigma_{ij}(x)\|^{-1} =: \|c^{ij}(x)\| \qquad c = c^{ij}(x)\, \partial_i \wedge \partial_j, \;\; \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\text{s-grad}\, f := c^{ij}\, \partial_i f\, \partial_j$$

$$\{f, g\} = c^{ij}(x)\, \partial_i f\, \partial_j g \quad \text{(скобка Пуассона)}$$

$$\text{s-grad}\, f \cdot g = -\,\text{s-grad}\, g \cdot f = \sigma(\text{s-grad}\, f, \text{s-grad}\, g)$$

Симплектические поля

(M, σ) — симплектическое многообразие, т. е. $\sigma \in \Omega^2(M)$, $d\sigma = 0$. Поле ξ называется **симплектическим**, если $L_\xi \sigma = 0$ $(\exp t\xi \cdot \sigma \equiv \sigma)$.

Тогда $d\iota_\xi \sigma = L_\xi \sigma - \iota_\xi d\sigma = 0$.

Поэтому локально

$$\iota_\xi \sigma = df, \; f \in C^\infty(M) \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = \text{s-grad}\, f$$

Если f существует глобально, поле называется **гамильтоновым**.

Пример: $M = \mathbb{R}^2$, $\sigma = dx \wedge dy$, $\xi = x\partial_y - y\partial_x$ $\quad f = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Предквантование

$$\widehat{A} = A + \frac{2\pi i}{h}\, s \cdot \operatorname{grad} A + \theta(s \cdot \operatorname{grad} A)$$

Ковариантное дифференцирование сечений в линейных расслоениях со связностью

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \to E \supset & F(U) = U \times \mathbb{R} & \\ \downarrow p & \downarrow p & \nearrow s \\ B \supset & U & \end{array}$$

$$\nabla_\xi\, \varphi \cdot s = \xi\varphi \cdot s + \varphi\, \nabla_\xi\, s$$

На U_α есть сечение $s_\alpha \neq 0$

$$\nabla_\xi\, s_\alpha = \theta_\alpha(\xi)\, s_\alpha$$

$s_\alpha = c_{\alpha\beta}\, s_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ $\qquad \theta_\alpha = \theta_\beta + d \log c_{\alpha\beta}$

$$d\theta_\alpha = d\theta_\beta = \sigma =: \operatorname{curv} \nabla$$

$$\widehat{A} = A + \frac{2\pi i}{h} \nabla_{\text{s-grad}\, A}$$

$$\operatorname{curv} \nabla = \sigma$$