УДК 531/534 (09)

Актуальная проблема механики XIX века
(К 120-летию публикации знаменитого мемуара С.В. Ковалевской)

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24

В 2009 г. исполняется 120 лет публикации знаменитого мемуара С.В.Ковалевской "Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки" в журнале Acta Mathematica [1]. На русском языке эта выдающаяся работа была опубликована лишь спустя почти полвека, в 1940 г. [2].

Проблема интегрируемости в квадратурах системы уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки являлась одной из актуальных проблем XIX в., над решением которой работали выдающиеся математики и механики того времени. Поскольку эту проблему в общем виде решить не удавалось, то она решалась как ограниченная задача, при определенных ограничениях, совокупность которых была названа "случаями интегрируемости". Так были открыты известные случаи Эйлера (1758) и Лагранжа (1788). Выдающийся российский математик и механик Софья Васильевна Ковалевская (Корвин–Круковская, 15.01.1850–10.02.1891), успешно преодолев значительные математические трудности, стала автором открытого ею нового, аналитически наиболее сложного случая интегрируемости, названного впоследствии её именем. Второй мемуар С.В.Ковалевской, посвященный этой же проблеме, опубликован в том же издании в 1890 г. [3].

В настоящей статье рассматривается история постановки и решения С.В.Ковалевской этой проблемы, а также влияние ее открытия на последующее развитие динамики твердого тела и физики

В науке определенный этап развития требует своего гения.
Чем крупнее достижения ученого, тем короче и точнее можно их описать.
П. Л. Капица

Стоит мне только коснуться математики, я опять забуду все на свете.
С. В. Ковалевская

Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Проблема интегрируемости системы уравнений движения

Почти на протяжении всего девятнадцатого века задача о вращении твердого тела (далее – *задача*), поставленная Эйлером и Даламбером, была целью исследований многих известных математиков. Систему динамических уравнений в 1743 г. впервые получил Даламбер при помощи принципа механики, названного впоследствии его именем. В окончательном виде эти уравнения в 1750 г.

были получены Эйлером [4] и теперь носят его имя. Им же был открыт простейший случай движения твердого тела в поле силы тяжести, при котором точка опоры тела совпадает с его центром тяжести.

Наряду с другой классической задачей механики, так называемой задачей трех тел, эта задача является одной из самых примечательных задач теоретической механики. Обе они примечательны тем, что являются обобщением класса задач, интегрируемых средствами классического математического аппарата. Помимо этого, их объединяет общая характерная особенность: решение этих задач настолько трудно, что, несмотря на значительные достижения, они далеки от полного разрешения.

После исследований Эйлера, Пуансо, Лагранжа и Пуассона эта задача разрабатывалась как геометрическими, так и аналитическими методами. Подробное геометрическое исследование случая Эйлера проведено Л.Пуансо [5]; аналитические решения задачи для случаев Эйлера–Пуансо и Лагранжа–Пуассона даны К.Якоби. Все они были выполнены на основе разработанной Н.Абелем и К.Якоби теории эллиптических функций и теории последнего множителя [6]. К.Якоби проведено и геометрическое исследование движения твёрдого тела в случае Лагранжа–Пуассона. После работ Пуансо и Якоби было выполнено множество исследований, которые привели к геометрическим и аналитическим результатам, дополняющим работы предшествующих авторов.

При всем этом продолжительное время никаких существенных результатов по решению задачи достигнуто не было, несмотря на значительный к ней интерес и приложенные усилия. Существенное продвижение в ее решении было достигнуто лишь в 1888 г. российским математиком С.В.Ковалевской, работы которой [1–3] представляют значительный прогресс в решении поставленной проблемы [7].

С.В.Ковалевская, основываясь на идеях своего знаменитого учителя К.Вейерштрасса, пришла к выводу о том, что если для решения поставленной проблемы применять методику исследований и математический аппарат Эйлера, Лагранжа, Пуассона и Якоби, оперируя в области действительного переменного, то попытка обобщить результаты, полученные ее предшественниками, обречена на неудачу. Необходимо было найти новый подход к решению на основе нового математического аппарата. Этот подход оказался связанным с применением области комплексного переменного, что имело решающее значение для достижения цели.

С.В.Ковалевская, по-видимому, впервые применила к решению механической задачи идеи и аппарат теории функций комплексного переменного, созданные трудами Коши, Римана, Вейерштрасса. Наряду с этим, задаче интегрирования системы уравнений Эйлера–Пуассона она придала *качественно новую и оригинальную постановку*, характерную для задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В связи с этим С.В.Ковалевская поставила целью исследовать следующие вопросы:

– существуют ли случаи интегрируемости данной системы уравнений, кроме известных случаев Эйлера и Лагранжа, для которых все параметры движения тела могут быть выражены в функциях, не имеющих в замкнутой области плоскости комплексного переменного никаких особенностей, кроме полюсов (мероморфные функции);

– если такие случаи существуют, то как получить дополнительный к известным классическим интегралам первый алгебраический интеграл данной системы;

– какие ограничения должны быть наложены на структурно-динамические параметры твердого тела (положение его центра масс и конфигурацию) для того, чтобы искомый дополнительный интеграл существовал и являлся однозначным.

Такой путь исследования, подготовленный работами Вейерштрасса и Пэнлеве, позволил Пуанкаре и Сундману получить значительные по важности результаты при решении проблемы трех тел, а Н.Е.Жуковскому – в ряде задач прикладной аэродинамики. Поэтому С.В.Ковалевская имела основание предполагать, что и в исследуемой ею задаче можно надеяться на успех [8].

Такая постановка задачи представляет *существенное расширение* первоначальной механической задачи. При этом данное расширение имеет чисто математический характер и не основано изначально ни на каких механических предпосылках [9].

Расширение разложений функций на всю комплексную плоскость переменного *t*, впервые в этой задаче проведенное С.В.Ковалевской, являлось смелым новаторским шагом. Идея, примененная С.В.Ковалевской, *рассматривать время как комплексную переменную* с целью применения аппарата теории функций комплексной переменной знаменует в механике эпоху применения комплексного математического анализа [9].

Вопрос о мероморфных решениях системы уравнений Эйлера–Пуассона впервые был поставлен С.В.Ковалевской в мемуаре [1] и исследован ею в работах [3, 10]. Предпосылкой к этому являлся следующий характерный факт: в известных случаях Эйлера и Лагранжа решение системы уравнений движения тела выражено в эллиптических функциях времени, являющихся *мероморфными функциями*. Эту интересную особенность нужно было выделить и правильно оценить. Такая оценка позволила С.В.Ковалевской выбрать верный путь к успешному решению поставленной ею задачи.

Предыстория выдающегося открытия

Интерес к проблеме интегрируемости системы уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки (далее – *проблема*) у Ковалевской проявился в результате ее творческого общения с выдающимися учеными того времени: Вейерштрассом, Пуанкаре, Миттаг–Леффлером и др. Примечательно, что в беседе с Ковалевской во время её пребывания в Париже весной 1886 г., когда обсуждалась эта проблема, Пуанкаре высказал предположение, которое в дальнейшем сыграло решающую роль. Он предположил, что для успешного интегрирования системы уравнений в этой проблеме натуральное время следует рассматривать как *комплексную переменную.* Ему удалось успешно применить эту идею при решении другой задачи механики.

После нескольких последующих обсуждений этой проблемы Ковалевская стала искать пути ее решения. Она понимала, какие трудности ей предстоит преодолеть и какое время может потребоваться для достижения цели. В одном из писем она писала: "По моему расчету, мне нужно… пять лет, чтобы достигнуть хороших результатов"[1].

На принятие Ковалевской такого решения в значительной степени повлияли периодически объявляемые Парижской Академией конкурсы на соискание премии имени Бордена. Очередной конкурс был объявлен на 1888 г.

В 1835 г. французский нотариус Борден передал безвозмездно Институту Франции значительный денежный вклад, помещенный в акции, приносивший в то время около 15 тысяч франков ежегодного дохода. Эти деньги им были завещаны для премирования выдающихся научных работ, направленных "на благо человечества и прогресс науки". В связи с этим Парижской Академией неоднократно объявлялся конкурс на "дальнейшее усовершенствование задачи о вращении в каком-либо существенном пункте". Поскольку полностью решить эту проблему не представлялось возможным, то здесь речь шла о каком-либо ее пункте. Секретарь Парижской Академии математик Жозеф Бертран сообщил, что на эту тему будет объявлен конкурс именно потому, что ею занялась "госпожа профессор Ковалевская". Однако сама Ковалевская при этом не была уверена в том, что в работе над этой проблемой достигнет существенных результатов.

Ж.Бертран сообщил Ковалевской о том, что на предстоящем собрании Парижской Академии, где будут рассмотрены темы конкурсных работ на соискание премии имени Бордена, предполагается назвать проблему вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Члены конкурсной комиссии математики Эрмит, Жордан, Бертран и Дарбу обсуждали вместе с Ковалевской этот план и пришли к заключению, что она имеет все шансы на получение премии. При этом было упомянуто, что содержание представленной на конкурс работы не разрешается публиковать до наступления срока конкурса и докладывать на предстоящем съезде естествоиспытателей в Христиании (ныне Осло), как это собиралась сделать Ковалевская.

Итак, грандиозная цель поставлена, и Ковалевская принялась за ее достижение.

[1] *Халамайзер А.Я.* Софья Ковалевская. М., 1989. С. 79.

Решение проблемы

Применение С.В.Ковалевской комплексного времени t при решении поставленной проблемы привело к замечательному результату. Выяснилось, что, кроме классических случаев Эйлера и Лагранжа, условия, поставленные С.В.Ковалевской, выполняются еще в одном частном случае, при котором интегралы системы уравнений Эйлера–Пуассона также являются мероморфными функциями на всей плоскости комплексного времени t.

Таким образом, был открыт еще один случай, при котором данная система уравнений допускает полное интегрирование в квадратурах. Этот случай характеризуется ограничениями, наложенными на главные моменты инерции тела ($A = B = 2C$) при расположении его центра тяжести в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Как было показано С.В.Ковалевской [1], в найденном новом случае для данной системы уравнений имеет место дополнительный, по Уиттекеру [11], частный алгебраический интеграл четвертой степени. В силу этого согласно теории последнего множителя Якоби система уравнений Эйлера–Пуассона в этом случае полностью интегрируема.

Случаи, при которых интегралы данной системы уравнений в качестве особых точек имеют только полюсы, представляют значительный интерес. Это обусловлено тем, что именно в этих случаях можно получить полное решение задачи путем составления дифференциальных уравнений для целых функций, отношение которых согласно теореме Вейерштрасса представляет собой мероморфные интегралы данной системы [9].

В связи с этим С.В.Ковалевской была поставлена *задача, названная* впоследствии *ее именем*, состоящая в нахождении условий, при которых уравнения системы Эйлера–Пуассона не имеют критических полюсов и существенно особых точек. С.В.Ковалевской решены следующие вопросы:

– найдены случаи, при которых интегралы уравнений движения имеют некритические полюсы;

– доказано, что в этих случаях данные интегралы, помимо полюсов, для любых конечных значений t не имеют никаких других особых точек.

В историческом плане о примененном методе можно говорить как о *методе С.В. Ковалевской в динамике твердого тела*. Это терминологическое определение и в настоящее время является признанным термином [12]. Этот метод в дальнейшем был успешно применен к задачам аналитической теории дифференциальных уравнений в работах И.Фукса, Э.Пикара и др [9].

Для решения первого из поставленных вопросов С.В.Ковалевская ищет решение системы уравнений Эйлера–Пуассона в виде (обозначения общепринятые)

$$p = \tau^{-n_1} \sum p_n \tau^n \quad (p,\ q,\ r;\ 1,\ 2,\ 3), \qquad (1)$$

$$\gamma_1 = \tau^{-m_1} \sum f_n \tau^n \quad (f_n,\ g_n,\ h_n;\ 1,\ 2,\ 3),\ (n = 0, 1, \ldots).$$

Здесь n_j, m_j (j = 1, 2, 3) – натуральные числа; p_n, f_n, g_n, h_n – постоянные коэффициенты рядов; $\tau = t - t_0$. Поскольку равенства (1) должны представлять собой общее решение системы, то оно содержит пять произвольных постоянных.

Из сравнения показателей степеней первых членов рядов (1), подставленных в систему уравнений Эйлера–Пуассона, С.В. Ковалевской было получено [1]

$$n_j = 1,\ m_j = 2,\ (j = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Далее, выполняя сложные преобразования системы соотношений, она свела решение поставленной задачи к интегрированию системы уравнений

$$\frac{ds_1}{Q(s_1)} + \frac{ds_2}{Q(s_2)} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{s_1 ds_1}{Q(s_1)} + \frac{s_2 ds_2}{Q(s_2)} = \frac{1}{2} i\, dt.$$

В уравнениях (3) s_1, s_2 – основные переменные задачи С.В.Ковалевской (термин [9]), $Q(s) = \sqrt{P(s)}$, i – мнимая единица, P – полином пятой степени (обобщенная гироскопическая функция):

$$P(s) = \prod_{j=1}^{5} (s - e_j),$$

e_j – его корни. В общем случае, при котором корни e_j простые, интегрирование системы уравнений (3) приводит к гиперэллиптическим интегралам. Если полином P имеет двукратный корень, то гиперэллиптические интегралы вырождаются в эллиптические.

Таким образом, решение поставленной проблемы в случае, открытом С.В.Ковалевской, сводится к задаче обращения, вообще говоря, гиперэллиптических интегралов жанра $p = 2$ [9], тогда как в случаях Эйлера и Лагранжа решение завершается обращением эллиптических интегралов. Следовательно, полное решение задачи С.В.Ковалевской представляется в гиперэллиптических функциях.

Премия Парижской Академии наук

Конкурсное жюри Парижской Академии в составе Мориса Леви, Филипса, Резаля, Сарро и Дарбу приняло решение о присуждении премии имени Бордена С.В.Ковалевской за представленный ею мемуар [1].

В декабре 1888 г. в Стокгольм С.В.Ковалевской пришло извещение из Парижа. Непременные секретари Академии Луи Пастер и Жозеф Бертран официально извещали её о решении конкурсного жюри:

"…Академия Наук присудила Вам премию Бордена (усовершенствование в важном пункте теории движения твердого тела). Мы приглашаем Вас, Мадам, присутствовать на публичном заседании, которое состоится в понедельник, 24 декабря, ровно в час дня и на котором будут провозглашены результаты конкурса…".

На торжественном заседании Академии председатель собрания академик Жансен, вручая С.В.Ковалевской диплом лауреата, сказал: "Наши сочлены из секции Геометрии после изучения мемуара, представленного на конкурс, обнаружили в этой работе не только свидетельство широкого и глубокого знания, но и признак ума великой изобретательности" [13].

Ранее Парижская Академия трижды объявляла конкурс по этой теме на соискание премии Бордена, однако каждый раз премия оставалась неприсужденной.

После торжественного заседания С.В. Ковалевская получила приглашения от членов Академии математиков Эрмита, Бертрана, Пуанкаре, Дарбу и др. Идейный глава французских математиков Шарль Эрмит сказал С.В.Ковалевской по поводу решённой ею проблемы: "Мне будет приятно подбирать колосья со сжатого Вами поля. Я уже мечтаю об изучении частных случаев [Вашей задачи]…" [13].

Премия Парижской Академии – не единственная, полученная С.В.Ковалевской за решение этой проблемы. В 1889 г. Шведская Академия наук также присудила ей премию за мемуар "Об одном частном случае задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки…" [10].

Отзывы на мемуар С.В. Ковалевской

Работа [1] привлекла внимание математиков и механиков во многих странах, в том числе и в России; она явилась исходным началом многих исследований. В этом отношении работа С.В.Ковалевской представляет собой в своём роде уникальное явление: интерес к этой проблеме проявился не только в XIX в., вызвав появление ряда известных работ, но и в XX в., что подтверждается публикациями [9, 12, 14–16] и многими другими источниками.

Среди отзывов на работу С.В.Ковалевской были и такие, в которых утверждалось о "незавершённости" решения проблемы. Такими были отзывы А.А.Маркова (старшего) [17], члена Петербургской академии наук, Ф.Клейна [18] и Г.Г.Аппельрота [19]. О замечаниях этих авторов упомянуто в работе [20].

Замечания А.А.Маркова сводились к следующему.

Первое замечание. С.В.Ковалевская утверждает [1], что из сравнения показателей степеней первых членов рядов Лорана (1) следуют значения, определяемые равенствами (2). Однако отсюда не следует единственность этих значений показателей. Как выяснилось, системы показателей первых членов рядов Лорана определяют следующие наборы [20]:

$$-(n_1+1),\quad -(n_2+n_3),\ -m_3,\quad -m_2\quad (1,2,3),$$
$$-(m_1+1),\ -(n_3+m_2),-(n_2+m_3)\ (1,2,3). \tag{4}$$

С.В.Ковалевская уравнивает между собой в каждой из шести систем показателей (4) не два, а 4 или 3 числа. В результате этого без достаточных оснований отбрасывается бесчисленное множество возможных случаев, в частности, случай, при котором

$$n_j = 2,\quad m_j = 4\quad (j = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Второе замечание. С.В.Ковалевская не рассматривает случаи кратных корней основного определителя, тогда как не исключена возможность существования однозначного общего интеграла и при наличии кратных корней [17].

В ответ на замечания А.А.Маркова появились работы Г.Г.Аппельрота [19] и П.А.Некрасова [21]. Г.Г.Аппельрот обобщил систему показателей (5), указанную А.А. Марковым, представив ее в виде

$$n_j = n,\ \ m_j = 2n \quad (j = 1, 2, 3). \qquad (6)$$

Рассматривая случай кратных корней, Г.Г.Аппельрот и П.А.Некрасов обнаружили существование частного случая, не указанного С.В.Ковалевской, который в 1890 г. был получен В.Гессом [9].

А.М.Ляпунов [22] в 1894 г. доказал единственность случаев интегрируемости Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, в которых решения уравнений движения тела выражаются в однозначных функциях времени. В связи с этим он замечает: "Если может быть речь о каких-либо новых случаях однозначности [искомых] функций…, то только в предположении, что начальные значения этих функций подчиняются известным условиям" [22]. Этим результатом А.М.Ляпунова *полностью снимается второе замечание А.А. Маркова*.

Как отмечено в статье [20], после этих работ продолжительное время считалось, что вопрос об однозначных решениях этой задачи решен окончательно [23]. Однако появлялись работы, в которых были представлены частные случаи интегрируемости с решениями, являющимися однозначными функциями времени. При этом ни один из этих случаев, кроме случая Гесса, не был получен методом С.В.Ковалевской. Лишь в 1958 г. в работах А.А.Богоявленского [24, 25] было показано, что метод С.В.Ковалевской может быть успешно применен и для нахождения частных решений, содержащих менее пяти постоянных интегрирования. В связи с этим были найдены новые условия существования таких решений и получены соотношения, связывающие постоянные интегрирования.

В.В.Луневым [20] был рассмотрен вопрос о первом замечании А.А.Маркова. Применяя метод многогранников Ньютона [26], о котором упоминает А.А.Марков в своем замечании, В.В.Лунев для системы показателей (4) получает

$$n_1 + 1 \ = \ n_2 + n_3 \ = \ m_3 \ = \ m_2 \qquad (1, 2, 3), \ (7)$$

$$m_1 + 1 \ = \ n_3 + m_2 \ = \ n_2 + m_3 \qquad (1, 2, 3).$$

Рассматривая соотношения (7) как систему уравнений, определяющую величины n_j, m_j, (j = 1, 2, 3), можно убедиться в том, что единственным решением этой системы является набор показателей (2), указанный С.В. Ковалевской [1]. В систему (7) входит и подсистема Г.Г.Аппельрота (6) в силу набора (2).

Опуская далее подробности исследования В.В.Лунева [20], отметим, что в результате им получен полный набор независимых систем решений, удовлетворяющих принципу наименьших показателей метода многогранников Ньютона. Этим результатом *полностью снимается первое замечание А.А.Маркова.*

Таким образом, замечательная классическая работа С.В.Ковалевской [1] успешно выдержала испытание временем и на протяжении 120-летнего периода осталась неуязвимой для критики существа ее научных положений. Этот исторический факт убедительно показывает силу таланта и высокую математическую культуру автора знаменитого мемуара.

Влияние открытия С.В. Ковалевской на последующее развитие динамики твердого тела

Немецкому ботанику Генриху де Бари (1831–1888) принадлежит замечательное высказывание: "Научное значение человека определяется не только тем, что он оставил после себя, но гораздо больше тем, к чему он побуждал своих современников, а через них последующие поколения". Это суждение в полной мере относится к С.В.Ковалевской и к её научному наследию. Появление ее работы не только активизировало интерес к самому открытию, но и явилось исходным пунктом исследований проблемы в целом. Здесь, прежде всего, следует упомянуть работы А.М.Ляпунова [22] и Г.Г.Аппельрота [27].

А.М.Ляпуновым было дано первое общее решение задачи С.В.Ковалевской, полученное им без ограничения требованием мероморфности интегралов. Его метод основан на применении уравнений движения в вариациях. Метод, примененный в этой же задаче Г.Г.Аппельротом, построен на работах А. Пуанкаре. После работы А.М.Ляпунова [22] вопрос о несуществовании дополнительного первого интеграла во всех неклассических случаях был поставлен и решен в исследованиях А.Пуанкаре, Е.Гюссона, Ж.Лиувилля и П.Бургатти.

В России по данной проблеме появились работы Н.Е.Жуковского, П.А.Некрасова, Б.К.Млодзеевского, Н.Б.Делоне, Д.К.Бобылева, Д.Н.Горячева, Г.В.Колосова. Так, Н.Е.Жуковским была построена геометрическая интерпретация движения тела в случае С.В.Ковалевской, а Г.В.Колосовым рассмотрено одно из свойств этого движения [28]. Случаи вырождения движения, соответствующие наличию кратных корней полинома $P(s)$ в уравнениях (3), исследованы Г.Г.Аппельротом, Б.К.Млод-зеевским и Н.Б.Делоне [9].

Метод С.В.Ковалевской в дальнейшем успешно применялся в небесной механике, а также в ряде задач физики: при исследовании системы Хенона–Хейлеса, цепочек Тоды и др. Это подтверждается циклом работ, опубликованных в 80-х гг. XX в. [20]. Этот метод нашел применение и в задачах абстрактной динамики твердого тела, где системы уравнений Эйлера–Пуассона, Кирхгофа, Пуанкаре–Ламба–Жуковского могут быть представлены в квазиоднородной форме [12].

Таким образом, научное наследие С.В.Ковалевской на качественно новом уровне входит составным элементом и в более поздние исследования механики и физики.

Трудный путь к открытию
(история постановки проблемы)

Замечательное открытие С.В.Ковалевской явилось результатом долгого и упорного труда, творческого пути через сомнения, разочарования и неудачи. Это закономерный путь к выдающемуся достижению в любой области человеческой деятельности. С.В.Ковалевская писала: "*Долгое время все мои труды оставались бесплодными, и только в 1888 году усилия мои увенчались успехом. Поэтому... я была счастлива, когда, наконец, мне удалось... сделать в решении столь трудного вопроса важный шаг вперед*" [29].

Письма С.В.Ковалевской к Г.Миттаг–Леффлеру[2] позволяют увидеть путь, по которому она шла к своему открытию, и понять идеи, положенные ею в основу решения проблемы. Так, например, в письме от 21 ноября 1881 г. она писала (копия письма № 5):

"… Я расскажу Вам о работах, которые меня занимают… Я возымела слабость отвлечься работою над… вопросом, который вертелся у меня в голове почти с самого начала моих математических занятий и о котором я одно время думала, что другие исследователи опередили меня. Он касается решения общего случая задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи абелевых функций. Вейерштрасс как-то предлагал мне заняться этой задачею, но тогда все мои попытки оказались бесплодными и даже исследования самого Вейерштрасса показали, что дифференциальные уравнения этой задачи не могут быть удовлетворены однозначными функциями времени. Этот результат заставил меня в то время отказаться от решения этого вопроса. Но впоследствии превосходные, еще не опубликованные исследования нашего учителя относительно условий устойчивости и аналогия с другими динамическими задачами снова оживили мой пыл и возбудили во мне надежду решить эту задачу при помощи абелевых функций, *аргументы которых не являются линейными функциями времени* [выделено С.В.Ковалевской]. Эти исследования показались мне настолько интересными и увлекательными, что я на время забыла все остальное и предалась им… Путь, которым я шла, заключался в следующем… Я старалась…, чтобы дифференциальные уравнения можно было интегрировать в функциях тэта от времени. Вычисления… настолько трудны и сложны, что пока я еще не могу сказать, достигну ли я желанной цели… Вейерштрасс утешает меня…"

[2] Оригиналы писем С.В.Ковалевской к Г.Миттаг–Леффлеру хранятся в архиве Математического института его имени в Стокгольме (Швеция). В тексте здесь и далее приводятся выдержки из фотокопий писем С.В.Ковалевской, находящихся в архиве Российской Академии наук. Выдержки цитируются по книге [9].

Из письма видно, что еще в 1881 г. С.В.Ковалевская отчетливо формулирует задачу о нахождении однозначных интегралов уравнений движения и о выборе аналитического аппарата для ее решения (тэта-функции двух переменных) [9].

Интересна история выдвижения проблемы Парижской Академией наук на премию Бордена, изложенная в письмах С.В.Ковалевской. В письме от 26 июня 1886 г. Г.Миттаг–Леффлеру она пишет (копия письма № 116):

"… в следующий понедельник… должны… предложить тему на большую академическую премию на 1886 год. Бертрану пришло в голову предложить темою как раз проблему вращения тяжёлого твердого тела. Таким образом, у меня будут некоторые шансы получить эту премию… меня соблазняет эта мысль. Вчера Эрмит, Бертран, Камилл Жордан и Дарбу, все являющиеся членами этой комиссии, обсуждали этот проект вместе со мною. Они меня заставили изложить им ещё раз детально результаты моей работы и снова выслушали все настолько, что они думают, что эта работа имеет много шансов быть премированнoю. Единственным неудобством является то, что я должна буду отложить опубликование этого случая до 1888 г.".

Таким образом, уже в июне 1886 г. работа С.В.Ковалевской была в основном завершена и могла быть опубликована; о ее содержании было известно французским математикам. Результаты этой работы были настолько значительны, что она вызвала постановку Парижской Академией этой темы на премию имени Бордена. Следовательно, не С.В.Ковалевская разрабатывала тему, выдвинутую Парижской Академией, а, наоборот, Парижская Академия выдвинула эту тему, учитывая те возможности значительного продвижения в решении проблемы, полученные С.В.Ковалевской [9].

В письме без даты (копия письма №187), адресованном Г. Миттаг–Леффлеру, предположительно относящемся к 1887 г., С.В.Ковалевская сообщает о найденном ею случае интегрируемости и утверждает, что *только в трех случаях* (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской) *интегралы задачи не имеют критических точек*.

Итак, именно С.В.Ковалевской принадлежит приоритет формулирования этого фундаментального положения динамики твердого тела.

Незавершенный научный поиск

С.В. Ковалевская получила полное решение проблемы в гиперэллиптических функциях. Однако первоначальная задача, сформулированная ею, была более общей. Ею был поставлен вопрос о нахождении *общего решения проблемы* с применением интегралов Абеля или их обращений.

Имеются основания предполагать, что С.В.Ковалевская упорно работала над этой задачей в последние годы жизни. Незадолго до своей безвременной кончины, последовавшей в феврале 1891 г., в беседе с А.Пуанкаре она заметила, что ею найдены и другие случаи решения проблемы. Это подтверждается письмом без даты, адресованном Г.Миттаг–Леффлеру, относящимся предположительно к сентябрю 1888 г. [9]. В этом письме С.В.Ковалевская пишет об окончании работы и посылке ее с сопроводительным письмом Эрмиту. В нем она пишет (копия письма № 274): "Я рассказываю о некоторых, как мне кажется, удивительных и интересных результатах, которые я нашла относительно общего случая".

Однако после наступившей смерти в ее рабочих материалах, по-видимому, не было найдено никаких записей, относящихся к этой проблеме. Попытки в какой-то мере восстановить и продолжить утерянные результаты, полученные С.В.Ковалевской, не привели к успеху. Можно предполагать, что в утерянных материалах, содержащих попытки общего решения проблемы, С.В.Ковалевская применила оригинальный подход, отличный от метода своего классического труда.

Как отмечает В.В.Голубев [9], С.В.Ковалевская начинала исследования по поставленной ею проблеме с попыток ее решения, применяя абелевы функции. Успеха она достигла, используя аппарат частных видов алгебраических функций и абелевых интегралов. При этом общая постановка задачи не связана с вопросом о существовании нового дополнительного первого интеграла. Поэтому дальнейшие результаты могли быть достигнуты С.В.Ковалевской в развитие и с применением теории алгебраических функций, абелевых интегралов и тэта-функций.

Открытие С.В. Ковалевской: взгляды современников и последователей

Работа С.В.Ковалевской вызвала появление многочисленных отечественных и зарубежных публикаций. Однако эти публикации по направленности исследований существенно отличаются от парадигмы мемуара С.В.Ковалевской [9].

Действительно, в основу этой работы положены две основополагающие идеи. Первая из них определяет постановку задачи исследования как чисто аналитической задачи о нахождении всех случаев, при которых общие интегралы уравнений движения являются мероморфными функциями. Такая постановка вопроса в то время была традиционно необычна для механики. Его решение в этой постановке и привело С.В.Ковалевскую к открытию нового случая интегрируемости, названного ее именем.

Вторая идея определяла путь к полному интегрированию системы уравнений движения в силу существования нового дополнительного первого интеграла. Этот путь приводит к успеху, если удается произвести обращение полученных гиперэллиптических интегралов.

В связи с этим В.В.Голубев отмечает: "Все последующие ученые, работавшие в этой области, сосредоточили все свое внимание именно на этой второй стороне исследования С.В.Ковалевской, оставляя в стороне первую…, *важнейшую идею С.В.Ковалевской* (выделено мною. – **Н.М.**). [Вместе с тем], … о пути, который привел С.В.Ковалевскую к открытию ею нового случая, совершенно ничего не говорится даже в подробных курсах теоретической механики; "случай Ковалевской" фигурирует в них только потому, что для него существует четвертый... интеграл системы уравнений движения. Таким образом, глубокие идеи С.В.Ковалевской не получили дальнейшего развития в работах последующих ученых, и задача, поставленная С.В.Ковалевской, приобрела суженный и ограниченный характер … за последнее полустолетие… развитие науки шло по пути, гениально намеченному С.В.Ковалевской в задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки" [9].

Вместе с тем работа С.В.Ковалевской, применённый ею метод решения проблемы и идеи, положенные в основу этого метода, значительно изменили устоявшиеся представления ее современников на постановку и решение новых задач динамики твердого тела, открыв тем самым и новые возможности применения аналитических методов исследования. Так, например, были найдены частные случаи интегрируемости системы уравнений движения Д.К.Бобылевым (1896) и Д.Н.Горячевым (1899). Была сформулирована проблема существования частных решений данных уравнений в смысле, определенном Ф.Клейном и А.Зоммерфельдом [30].

Эпилог

Со времени публикации знаменитого мемуара С.В.Ковалевской прошла целая эпоха научных открытий, которая принесла ответы на многие не решенные в то время вопросы механики. Получены новые частные решения проблемы, применяются новые, более совершенные методы исследования. Однако при всем этом работа С.В.Ковалевской на долгое время останется блистательным научным шедевром, по праву входящим в мировой фонд фундаментальных научных трудов. Этот труд был создан талантом, целеустремленностью и волей нашей выдающейся соотечественницы, опередившей своим открытием многих знаменитых современников, ученых с мировыми именами, также работавших над решением этой проблемы.

Великий Луи Пастер писал: "Время – лучший ценитель научных работ". Научное творчество С.В.Ковалевской успешно выдержало испытание временем, ее идеи обогатили науку и вызвали появление многих оригинальных трудов в области динамики твердого тела.

Наука непрерывно развивается, последующими поколениями будут совершены новые научные открытия. Выдающиеся ученые для будущих поколений всегда будут не только объектом восхищения, своеобразным монументом, но и живым источником новых плодотворных идей. Только такое бессмертие и суждено великим талантам в науке.

Список литературы

1. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d’ un corps solide autour d’ un point fixe /

S.Kowalevski // Acta Mathematica, 1889. V.12. H.2. P.177–232.
2. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки / С.В.Ковалевская // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки: сб. ст. М.; Л.: Изд-во Акад. наук, 1940.
3. *Kowalevski S.* Sur une propriete du systeme d' equations differentielles qui definit la rotation d' un corps solide autour d' un point fixe / S.Kowalevski // Acta Mathematica, 1890. V.14. H.1. P.81–94.
4. *Euler L.* Decouverte d' un nouveau principe de mecanique / L.Euler // Memoire de l'Academie des Sciences de Berlin, 1750. T.6. P.412.
5. *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des corps / L.Poinsot // Journal Mathematique pures et appliqueé, 1851. T.16. P.9–130, 289–336.
6. *Jacobi C.G.* Sur la rotation d' un corps / C.G.Jacobi // Journal de Crelle, 1849. T.39. P.293–350.
7. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки / С.В.Ковалевская // Научные работы. М.: Изд-во Акад. наук, 1948. С.153–220.
8. *Григорьян А.Т.* История механики твердого тела / А.Т.Григорьян, Б.Н.Фрадлин. М.: Наука, 1982. 293 с.
9. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / В.В.Голубев. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
10. *Kowalevski S.* Memoire sur un cas particulier du probleme de la rotation d' un corps pesant autour d' un point fixe / S.Kowalevski // Memoire Sav. Etr. 1890. Vol.31. P.1–62.
11. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика / Е.Т.Уиттекер. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
12. *Борисов А.В.* Метод Ковалевской в динамике твердого тела / А.В.Борисов, А.В. Цыгвинцев // Прикл. матем. и мех. 1997. Т.61, вып.1. С.30–36.
13. *Халамайзер А.Я.* Софья Ковалевская / А.Я.Халамайзер. М.: Изд. автора, 1989. 110 с.
14. *Полубаринова–Кочина П.Я.* Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжtлого твердого тела около неподвижной точки / П.Я.Полубаринова–Кочина // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки: сб. ст. М.; Л.: Изд-во Акад. наук, 1940. С.157–186.
15. *Горр Г.В.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В.Ковалевской / Г.В.Горр, А.Я.Савченко // Механика твердого тела: сб. науч. тр. Киев: Наукова думка, 1970. Вып.2. С.66–73.
16. *Харламова Е.И.* Новое решение дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, при условиях С.В.Ковалевской / Е.И.Харламова, П.В.Харламов // Докл. Акад. наук, 1969. Т.189, №5. С.967–968.
17. *Гродзенский С.Я.* Андрей Андреевич Марков. 1856–1922 / С.Я.Гродзенский. М.: Наука, 1987. 257 с.
18. *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Matematik im Jahrhundert / F.Klein. Berlin: Springer, 1926. Bd.1. 385 s.
19. *Аппельрот Г.Г.* По поводу §1 мемуара С.В.Ковалевской "Sur le probleme de la rotation d' un corps solide autour d' un point fixe" / Г.Г.Аппельрот // Матем. сб., 1892. Т.16, №3. С.483–517.

20. *Лунев В.В.* Мероморфные решения уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / В.В.Лунев // Прикл. матем. и мех. 1994. Т.58, вып.1. С.30–39.
21. *Некрасов П.А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / П.А.Некрасов // Матем. сб. 1895. Т.18, №2. С.161–274.
22. *Ляпунов А.М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / А.М.Ляпунов // Собр. соч. М.: Изд-во Акад. наук, 1954. Т.1. С.402–417.
23. *Полубаринова–Кочина П.Я.* Софья Васильевна Ковалевская / П.Я.Полубаринова–Кочина 1850–1891. М.: Наука, 1981. 312 с.
24. *Богоявленский А.А.* О частных случаях движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / А.А.Богоявленский // Прикл. матем. и мех. 1958. Т.22, вып.5. С.622–645.
25. *Богоявленский А.А.* О некоторых частных решениях задачи движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / А.А.Богоявленский // Прикл. матем. и мех. 1958. Т.22, вып.6. С.739–749.
26. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А.Д Брюно. М.: Наука, 1979. 255 с.
27. *Аппельрот Г.Г.* Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Г.Г.Аппельрот // Учен. зап. Моск. ун-та. Отд. физ.-мат. 1894. Вып.11. С.1–112.
28. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика / Г.К. Суслов. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
29. *Ковалевская С.В.* Воспоминания и письма / С.В.Ковалевская. М.;Л.: Изд-во Акад. Наук, 1951.
30. *Klein F.* A.Sommerfeld: Uber die Theorie des Kreisels / F.Klein. Leipzig, 1897–1910. H.1–4.

Actual problem of the mechanics 19-th century

(To the 120-years of publication famous memoir of S.V. Kovalevski)

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
410028, Saratov, Rabochaya st., 24

It is description to the history of the solution actual problem of a dynamics solid body, which was made by S.V. Kovalevski.