

Курс метрической геометрии

Дмитрий Бураго

Юрий Бураго

Сергей Иванов

УНИВЕРСИТЕТ ШТАТА ПЕНСИЛЬВАНИЯ, США

E-mail address: `burago@math.psu.edu`

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН

E-mail address: `burago@pdmi.ras.ru`

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН

E-mail address: `svivanov@pdmi.ras.ru`

A Course in Metric Geometry

Dmitri Burago

Yuri Burago

Sergei Ivanov

Graduate Studies in Mathematics

Volume 33

American Mathematical Society

Providence, Rhode Island

2001

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	vii
Предисловие	ix
Глава 1. Метрические пространства	1
§1.1. Определения	1
§1.2. Примеры	3
§1.3. Метрика и топология	8
§1.4. Липшицевы отображения	10
§1.5. Полные пространства	12
§1.6. Компактные пространства	15
§1.7. Мера Хаусдорфа и хаусдорфова размерность	19
Глава 2. Внутренние метрики	29
§2.1. Функционалы длины	29
§2.2. Первые примеры функционалов длины	34
§2.3. Длины, индуцированные метриками	38
§2.4. Характеризация внутренних метрик	43
§2.5. Кратчайшие	50
§2.6. Длина и мера Хаусдорфа	60
§2.7. Длина и скорость липшицевых путей	62
Глава 3. Конструкции	67
§3.1. Локальность, склеивание и максимальные метрики	67
§3.2. Полиэдральные пространства	77

§3.3. Изометрии и факторпространства	85
§3.4. Локальные изометрии и накрытия	89
§3.5. Отображения, сохраняющие длины кривых	98
§3.6. Произведения и конусы	100
Глава 4. Пространства ограниченной кривизны	117
§4.1. Определения	117
§4.2. Примеры	126
§4.3. Углы в пространствах Александрова и эквивалентность определений	132
§4.4. Анализ дистанционных функций	138
§4.5. Формула первой вариации	140
§4.6. Ненулевые ограничения на кривизну и глобализация	146
§4.7. Кривизна конуса	151
Глава 5. Гладкие внутренние метрики	157
§5.1. Римановы пространства	158
§5.2. Экспоненциальное отображение	173
§5.3. Гиперболическая плоскость	178
§5.4. Пространства Карно–Каратеодори	205
§5.5. Римановы и финслеровы объемы	222
§5.6. Неравенство Безиковича	232
Глава 6. Кривизна римановой метрики	241
§6.1. Мотивировка: вычисления в координатах	243
§6.2. Ковариантное дифференцирование	246
§6.3. Геодезическая и гауссова кривизны	254
§6.4. Геометрический смысл гауссовой кривизны	260
§6.5. Теоремы сравнения	270
Глава 7. Пространство метрических пространств	275
§7.1. Примеры	276
§7.2. Расстояние по Липшицу	284
§7.3. Расстояние по Громову–Хаусдорфу	287
§7.4. Сходимость по Громову–Хаусдорфу	296
§7.5. Сходимость пространств с внутренней метрикой	303
Глава 8. Геометрия крупного масштаба	309

§8.1. Пределы по Громову–Хаусдорфу для некомпактных пространств	310
§8.2. Касательный и асимптотический конусы	314
§8.3. Квази-изометрии	317
§8.4. Гиперболические по Громову пространства	325
§8.5. Периодические метрики	341
Глава 9. Пространства ограниченной сверху кривизны	353
§9.1. Определения и локальные свойства	354
§9.2. Пространства Адамара	373
§9.3. Фундаментальная группа пространства неположительной кривизны	389
§9.4. Пример: полурассеивающие бильярды	392
Глава 10. Пространства ограниченной снизу кривизны	403
§10.1. Условие четырех точек	404
§10.2. Конструкции и примеры	406
§10.3. Теорема Топоногова	413
§10.4. Кривизна и диаметр	417
§10.5. Теорема о расщеплении	420
§10.6. Размерность и объем	424
§10.7. Пределы по Громову–Хаусдорфу	431
§10.8. Локальные свойства	433
§10.9. Пространства направлений и касательные конусы	447
§10.10. Дальнейшая информация	456
Литература	465
Предметный указатель	469

Предисловие к русскому изданию

Настоящая книга является переводом с английского книги “A Course in Metric Geometry”, изданной Американским математическим обществом в 2001 году. Поскольку книга была ориентирована на американскую систему образования, российским студентам некоторые ее части покажутся слишком элементарными, другие могут вызвать затруднения.

При переводе были исправлены многочисленные опечатки и неточности, а также несколько ошибок. Мы благодарны всем математикам (особенно — профессорам М. Бонк и Дж. Лотт), которые сообщили нам о неточностях в английском издании.

В переводе книги участвовали А. Егоров (гл. 7), В. Кальницкий (гл. 6), Н. Косовский (гл. 10), Л. Кунгурова (гл. 1) и П. Светлов (гл. 9). Остальные главы перевел Ю. Бураго.

Издание подготовлено при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 03-01-14037).

Предисловие

Данная книга не является справочником или научной монографией (хотя исследования авторов и оказали на нее существенное влияние), это — учебник. По своей организации она сходна с университетским курсом. Обычно такой курс начинается с краткого введения — описания курса. С этого начнем и мы.

Описание курса. Эта книга преследует двойную цель. Прежде всего, мы хотели дать подробное изложение основных понятий и методов теории пространств с внутренними метриками — теории, которая в последние десятилетия стремительно развивалась и проникла во множество других математических дисциплин (таких как теория групп, динамические системы, дифференциальные уравнения в частных производных). Однако, есть еще одна, более емкая, цель — снабдить читателя элементарным введением в широкий круг наиболее геометричных разделов геометрии — разделов, связанных с понятием расстояния. По этой причине мы включили в книгу опирающееся на метрические понятия изложение начал римановой и гиперболической геометрий. Мы стремились подходить к естественным математическим объектам посредством наглядных методов. Имеется близкая по теме замечательная книга М. Громова [Gro3], которая открывает широкую панораму “геометрической математики с метрической точки зрения”. К сожалению, упомянутая книга слишком трудна для студентов и не геометров. Одна из задач настоящей книги состоит в том, чтобы устранить разрыв, существующий между потребностями студентов и исследователей, интересующихся метрической геометрией, и современной математической литературой.

Необходимая подготовка. Необходимая подготовка минимальна. Мы ставили перед собой задачу сделать основной материал книги доступным уже для аспирантов первого года обучения.¹ Однако, требования к подготовке читателя постепенно растут при продвижении вглубь книги. Мы старались вводить и иллюстрировать новые понятия и методы, используя их простейшие случаи и избегая технических деталей, отвлекающих от сути дела. Например, наше введение в риманову геометрию начинается с метрик в плоских областях, при этом мы даже не касаемся понятия многообразия. Конечно, в последующих, более продвинутых разделах, многообразия уже появляются. Некоторые упражнения и замечания подразумевают более глубокий уровень математических знаний, чем основной текст; они необязательны, и читатель, не знакомый с нужными понятиями, вполне может их пропустить, особенно при первом чтении. Хотя обстоятельное знание дифференциальной геометрии кривых и поверхностей в \mathbb{R}^3 не является необходимым условием для понимания книги, мы надеемся, что читатель все-таки знаком с дифференциальной геометрией, поскольку время от времени в книге проводятся соответствующие аналогии и предлагаются связанные с ней упражнения. Кроме того, мы особо отмечаем мотивировки и наглядные предпосылки. Читатель, который ими не интересуется, сможет пропустить определенные разделы. Первая глава является “ликбезом” по метрической топологии; читателю, достаточно хорошо знакомому с метрическими пространствами, мы рекомендуем пропустить ее или использовать в качестве справочника: читать ее, возможно, будет скучно. Последние главы, по сравнению с первыми четырьмя, содержат более продвинутый материал и написаны суше.

Рисунки. В книге имеется несколько рисунков, которые мы поместили единственно ради эстетики. Если бы мы включили все необходимые рисунки, то их было бы не меньше пяти штук на страницу.

• Читателю, систематически изучающему эту книгу, просто необходимо делать рисунки к каждому утверждению, теореме и конструкции!

Упражнения. Упражнения составляют важную часть курса. Из этого не следует, что читатель должен выполнить их все; подход здесь сугубо индивидуальный. По своей трудности упражнения колеблются от тривиальных до достаточно сложных, требующих определенной изобретательности при их решении, а по важности — от забавных примеров до утверждений, широко используемых в книге в дальнейшем. Это часто оговаривается в тексте. Полезно воспринимать *каждое* утверждение и каждую теорему как упражнение. Мы советуем доказывать их самостоятельно, возможно,

¹Речь идет об американских аспирантах (graduate students). В России этот уровень подготовки приблизительно соответствует старшим курсам университетов.

взглянув на приводимое в книге доказательство как на подсказку. Простое чтение написанного доказательства годится лишь в качестве последней меры.

Необязательный материал. Условно наше изложение можно разделить на две части: основной материал и необязательные разделы. Некоторые главы и разделы начинаются с краткого плана, который можно использовать как ориентир при чтении. Начать лучше с чтения только основного материала, минуя все необязательные разделы (и даже менее важные части основных разделов). Конечно, при таком подходе приходится нередко возвращаться назад с тем, чтобы отыскать важные понятия, которые были случайно пропущены. Такое чтение даст общую картину излагаемой теории, поможет выявить ее основу и получить представление о ее логике. Далее читатель читает книгу снова, трансформируя теоретическое знание в знание подлинное, дополняя его подробностями, отступлениями, примерами и опытом — то есть всем тем, что делает знание практическим.

О метрической геометрии. Границы между математическими дисциплинами весьма условны. Геометрия исторически начиналась с очень “приземленных” понятий (даже в буквальном смысле). Однако, на протяжении большей части прошлого столетия было принято считать, что “геометрия многообразий”, по сути, свелась к “анализу на многообразиях”. Применяемые в геометрии методы существенно опирались на дифференциальный аппарат, что угадывается даже из названия “дифференциальная геометрия”. Теперь стало понятно, что огромная часть геометрии, по существу, относится к метрической геометрии, а дифференциальный аппарат достаточно использовать лишь для введения определенного класса объектов и получения заготовок для синтетических методов. Это, конечно, применимо не ко всем геометрическим понятиям. Даже тензор кривизны пока остается неизведанной машиной, а геометрический смысл более или менее понятен лишь для некоторых из его простейших проявлений (таких как секционная кривизна). Многие современные результаты, включающие более сложные конструкции, по-прежнему носят аналитический характер. С другой стороны, исключение аналитического аппарата из определенной сферы понятий и рассуждений принесло существенные плоды. Прежде всего, это улучшило математическое понимание классических объектов (таких, как гладкие римановы многообразия) как идеологически, так и за счет конкретных результатов. С методологической точки зрения важно понимать, на какие допущения опирается определенный результат; к примеру, в этом плане намного предпочтительнее знать, что геометрические свойства многообразий положительной кривизны основываются на определенном неравенстве для расстояний в четверках точек, чем на каких-то свойствах тензора кривизны. Здесь есть большое сходство с двумя способами

рассмотрения выпуклых функций. Можно говорить, что функция выпукла, если ее вторая производная неотрицательна (заметим, что это определение уже предполагает гладкость, отбрасывая такие функции, как $f(x) = |x|$). Альтернативное определение гласит, что функция выпукла, если ее надграфик (множество $\{(x, y) : y \geq f(x)\}$) выпуклый; это второе определение эквивалентно неравенству Йенсена $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ для всех неотрицательных α, β , связанных равенством $\alpha + \beta = 1$, и оно устойчиво и не опирается на понятие предела. При таком подходе условие $f'' \geq 0$ можно рассматривать как удобный критерий выпуклости гладкой функции.

Чтобы проиллюстрировать преимущества такого подхода в геометрии, представим, что требуется оценить некую величину по всем метрикам на сфере. Напрашивается идея исследовать метрику, для которой эта величина достигает своего максимума, но, увы, такой метрики может не существовать в классе гладких метрик или даже метрик, индуцирующих ту же топологию. Но, оказывается, она все же может найтись, если расширить поиск до класса более общих пространств с внутренней метрикой.

Другие математические вопросы, всегда лежавшие за пределами всех мыслимых применений геометрии, теперь оказываются стандартными объектами для приложения методов, берущих свое начало в дифференциальной геометрии. Типичный пример такой ситуации — комбинаторная теория групп. К настоящему времени теория пространств с внутренними метриками выросла далеко за пределы своей “колыбели” (теории выпуклых поверхностей), и охватывает большую часть классической римановой геометрии и многочисленные области за ее пределами. В то же время метрическая геометрия остается, возможно, одним из самых “элементарных” математических методов. Именно эта комбинация причин побудила нас написать настоящий вводный курс “геометрии с точки зрения длин кривых”.

Благодарности. Авторы с теплом вспоминают гостеприимство и прекрасные условия для работы, которые они встретили во время своего пребывания в различных учреждениях, включая Страсбургский университет, ETH (Цюрих) и Кембриджский университет. Эти незабываемые визиты внесли огромный вклад в написание книги. Исследования авторов, значительно повлиявшие на книгу, частично поддерживались Национальным научным фондом США, фондом Слоуна, CRDF, РФФИ и фондом Шапиро университета штата Пенсильвания. Мы глубоко признательны им за эту помощь. Авторы выражают благодарность всем тем, кто оказал им содействие и поощрение. Особо хотим поблагодарить М. Громова за то, что он побудил нас написать эту книгу; С. Александер, Р. Бишоп и К. Кроука — за нелегкую работу по чтению рукописи — их многочисленные

исправления, советы и замечания были неоценимой помощью; С. Буяло — за многочисленные полезные предложения и замечания по девятой главе; К. Шемяка — за подготовку большей части рисунков; и, наконец, группу аспирантов университета штата Пенсильвания, которые прослушали курс Math. 597c, используя в качестве основного учебника нашу рукопись, и исправили десятки опечаток и небольших ошибок (хотя мы уверены, что еще вдвое больше их осталось на долю читателя).

Метрические пространства

Основная цель этой главы — установить обозначения и освежить знания читателя о метрических пространствах и смежных вопросах теоретико-множественной топологии. Раздел 1.7 содержит минимальную информацию о хаусдорфовой мере и хаусдорфовой размерности.

Эту главу можно пропустить, используя ее в качестве краткого справочника, или же бегло прочесть ее, чтобы убедиться, что все примеры и упражнения понятны.

1.1. Определения

Определение 1.1.1. Пусть X — произвольное множество. Функция $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется *метрикой* на X , если для всех $x, y, z \in X$ выполняются следующие условия.

- (1) Положительность: $d(x, y) > 0$, если $x \neq y$, и $d(x, x) = 0$.
- (2) Симметрия: $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3) Неравенство треугольника: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Метрическим пространством называется множество с метрикой на нем. Формально, метрическое пространство является парой (X, d) , где d — метрика на X . Элементы множества X называются *точками* метрического пространства; число $d(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y .

Когда из контекста ясно, о какой метрике идет речь, мы обозначаем расстояние между x и y также через $|xy|$. Если не рассматриваются

различные метрики на одном множестве X , то вместо “метрическое пространство (X, d) ” будем писать “метрическое пространство X ”, опуская явную ссылку на метрику.

В большинстве учебников дается более узкое, по сравнению с нашим, определение понятия метрического пространства: традиционно рассматриваются метрики с конечными расстояниями между точками. Если при конкретном рассмотрении будет важно, что d принимает только конечные значения, мы будем указывать (если это не ясно из контекста), что d — *конечная метрика*. Имеется простая связь между конечными и бесконечными метриками, а именно, метрическое пространство, в котором возможны бесконечные расстояния, канонически разбивается на подпространства с конечными метриками, которые отстоят друг от друга на бесконечные расстояния:

Упражнение 1.1.2. Покажите, что отношение $d(x, y) \neq \infty$ является отношением эквивалентности. Каждый из классов эквивалентности, вместе с сужением d на него, является метрическим пространством с конечной метрикой.

Определение 1.1.3. Пусть x и y — два метрических пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *отображением, сохраняющим расстояния*, если $|f(x)f(y)| = |xy|$ для любых двух точек $x, y \in X$. Биективное отображение, сохраняющее расстояния, называется *изометрией*. Два пространства называются *изометричными*, если существует изометрия одного пространства на другое.

Ясно, что изометричность является отношением эквивалентности. Все свойства, которые можно выразить в терминах расстояний, одинаковы у изометричных пространств.

Полуметрики.

Определение 1.1.4. Функция $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет всем свойствам из определения 1.1.1 метрики, за исключением требования, что равенство $d(x, y) = 0$ влечет $x = y$. Это означает, что мы допускаем нулевые расстояния между различными точками.

Существует очевидная связь между полуметрикой и метрикой, состоящая в том, что отождествление точек с нулевым расстоянием в полуметрике приводит к обычной метрике.

Предложение 1.1.5. Пусть d — полуметрика на X . Введем отношение эквивалентности R_d на X , положив xR_dy , если $d(x, y) = 0$. Поскольку $d(x, y) = d(x_1, y_1)$, если xR_dx_1 и yR_dy_1 , корректно определена проекция \hat{d}

полуметрики d на фактормножестве $\hat{X} = X/R_d$. Тогда (\hat{X}, \hat{d}) является метрическим пространством.

Доказательство этой теоремы очевидно, и мы оставляем его в качестве упражнения.

Далее мы будем нередко сокращать введенные обозначения и писать $(X/d, d)$ вместо $(X/R_d, \hat{d})$, заменяя X/R_d на X/d и используя букву d для обозначения проекции \hat{d} .

Пример 1.1.6. Пусть расстояние между двумя точками $(x, y), (x', y')$ в \mathbb{R}^2 определено формулой $d((x, y), (x', y')) = |(x - x') + (y - y')|$. Проверьте, что этим задана полуметрика. Докажите, что фактор-пространство $(\mathbb{R}^2/d, d)$ изометрично вещественной оси.

1.2. Примеры

Разнообразные примеры метрических пространств будут появляться на протяжении всего курса. В этом разделе мы для начала дадим лишь несколько важных примеров. Для многих из них проверка свойств из определения 1.1.1 является тривиальной и предоставляется читателю.

Пример 1.2.1. На произвольном множестве X определим метрику условием

$$|xy| = \begin{cases} 0 & \text{если } x = y, \\ 1 & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Этот пример не особенно интересен, но может служить отправной точкой для многих конструкций.

Пример 1.2.2. Вещественная ось \mathbb{R} канонически снабжается расстоянием $|xy| = |x - y|$, и, таким образом, может рассматриваться как метрическое пространство. Существует множество других метрик на \mathbb{R} ; например, $d_{\log}(x, y) = \log(|x - y| + 1)$.

Пример 1.2.3. Евклидова плоскость \mathbb{R}^2 со стандартным расстоянием является еще одним хорошо известным метрическим пространством. Это расстояние можно выразить с помощью теоремы Пифагора

$$|xy| = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

где (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — координаты точек x и y . Неравенство треугольника для этой метрики известно из элементарной евклидовой геометрии. Также его можно вывести из неравенства Коши.

Пример 1.2.4. (Прямое произведение.) Пусть X и Y — два метрических пространства. Определим метрику на их прямом произведении $X \times Y$ формулой

$$|(x_1, y_1)(x_2, y_2)| = \sqrt{|x_1x_2|^2 + |y_1y_2|^2}.$$

В частности, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Пример 1.2.5. Выведите неравенство треугольника для прямого произведения из неравенства треугольника для евклидовой плоскости.

Пример 1.2.6. Напомним, что n -мерное координатное пространство \mathbb{R}^n — это векторное пространство, состоящее из всех наборов (x_1, \dots, x_n) вещественных чисел с покомпонентными сложением и умножением на вещественные числа. Оно естественно отождествляется с n -кратным прямым произведением $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Тем самым стандартное евклидово расстояние определяется формулой

$$|xy| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Пример 1.2.7 (изменение масштаба). Эта простая конструкция аналогична получению одного множества из другого посредством гомотетии. Пусть X — метрическое пространство и $\lambda > 0$. Метрическое пространство λX — это то же самое множество X , но с метрикой $d_{\lambda X}$, которая определена равенством $d_{\lambda X}(x, y) = \lambda d_X(x, y)$ для всех $x, y \in X$, где d_X — расстояние в X . Иными словами, пространство λX — это пространство X , растянутое в λ раз (или с измененным в λ раз масштабом).

Пример 1.2.8 (подпространства). Если X — метрическое пространство, а Y — его подмножество, то можно получить метрику на Y как сужение на Y метрики пространства X . Другими словами, расстояние между точками подмножества Y полагаем равным расстоянию между теми же точками в X .

Сужение метрики является самым простым, но не единственным способом построения метрики на подмножестве. Во многих случаях более естественно рассматривать *внутреннюю метрику*, которая обычно отлична от сужения метрики окружающего пространства. Понятие внутренней метрики будет объяснено ниже, однако ее интуитивный смысл можно проиллюстрировать следующим примером внутренней метрики на окружности.

Пример 1.2.9. Единичная окружность S^1 представляет собой множество точек на плоскости, лежащих на расстоянии 1 от начала координат. Как подмножество плоскости, окружность несет сужение евклидовой метрики на нее. Мы определяем альтернативную метрику, взяв в качестве

расстояния между двумя точками длину меньшей из двух дуг окружности между ними. Например, расстояние двумя противоположными точками окружности равно π . Расстояние между соседними вершинами правильного n -угольника (вписанного в окружность) равно $2\pi/n$.

Упражнение 1.2.10. (а) Докажите, что любая дуга окружности длины не больше π , снабженная вышеупомянутой метрикой, изометрична отрезку прямой.

(б) Докажите, что вся окружность с такой метрикой не изометрична никакому подмножеству плоскости (с евклидовым расстоянием, суженным на это подмножество).

1.2.1. Нормированные векторные пространства.

Определение 1.2.11. Пусть V — векторное пространство¹. Функция $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$ называется *нормой* на V , если для всех $v, w \in V$ и $k \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия.

- (1) Положительность: $|v| > 0$ если $v \neq 0$, и $|0| = 0$.
- (2) Положительная однородность: $|kv| = |k||v|$.
- (3) Субаддитивность (неравенство треугольника): $|v+w| \leq |v| + |w|$.

Нормированное пространство — это векторное пространство с нормой на нем. Конечномерные нормированные пространства также называют *пространствами Минковского*. Расстояние в нормированном пространстве $(V, |\cdot|)$ определяется формулой

$$d(v, w) = |v - w|.$$

Нетрудно видеть, что нормированное пространство с таким расстоянием является метрическим пространством. Норма восстанавливается по метрике просто как расстояние от начала координат.

Евклидово пространство \mathbb{R}^n , описанное в примере 1.2.6, является нормированным пространством с нормой

$$|(x_1, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Конечно, в \mathbb{R}^n существуют и другие естественные нормы.

Пример 1.2.12. Обозначим через \mathbb{R}_1^n координатное пространство \mathbb{R}^n с нормой $\|\cdot\|_1$, определяемой равенством

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

(где $|\cdot|$ — это абсолютная величина числа).

¹У нас все векторные пространства — пространства над \mathbb{R} .

Пример 1.2.13. Пространство \mathbb{R}_∞^n — это \mathbb{R}^n с нормой $\|\cdot\|_\infty$, где

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Упражнение 1.2.14. Докажите, что

- (а) \mathbb{R}_1^2 и \mathbb{R}_∞^2 изометричны;
- (б) \mathbb{R}_1^n и \mathbb{R}_∞^n не изометричны ни при каком $n > 2$.

Пример 1.2.15. Пусть X — произвольное множество. Рассмотрим множество $\ell_\infty(X)$ всех ограниченных функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Оно, очевидно, представляет собой векторное пространство относительно поточечного сложения и умножения на вещественные числа. Стандартная норма $\|\cdot\|_\infty$ на $\ell_\infty(X)$ определяется формулой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Упражнение 1.2.16. Покажите, что $\mathbb{R}_\infty^n = \ell_\infty(X)$ для подходящего множества X .

Подсказка. Формально набор (x_1, \dots, x_n) является отображением, не так ли?

1.2.2. Евклидовы пространства. Пусть X — векторное пространство. Напомним, что *билинейная форма* на X — это отображение $F: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, которое линейно по обоим аргументам. Билинейная форма F *симметрична*, если $F(x, y) = F(y, x)$ для всех $x, y \in X$. Симметричную билинейную форму F можно восстановить по соответствующей ей *квадратичной форме* $Q(x) = Q_F(x) = F(x, x)$, например, по формуле $4F(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y)$.

Определение 1.2.17. *Скалярным произведением* называется такая симметричная билинейная форма F , что соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена, то есть $F(x, x) > 0$ для всех $x \neq 0$. *Евклидово пространство* — это векторное пространство, в котором определено скалярное произведение.

Различные скалярные произведения будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.2.18. *Норма, порожденная скалярным произведением* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определяется формулой $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Норма называется *евклидовой*, если она может быть порождена каким-либо скалярным произведением.

Например, стандартная норма в \mathbb{R}^n порождена скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Упражнение 1.2.19. Докажите неравенство треугольника для нормы, индуцированной любым скалярным произведением.

Подсказка. Во-первых, сведите неравенство треугольника к неравенству $\langle v, w \rangle \leq |v| \cdot |w|$ для любых векторов v и w . Затем раскройте неравенство $\langle v - tw, v - tw \rangle \geq 0$ и выполните подстановку $t = \langle v, v \rangle / \langle w, w \rangle$. Другой способ доказать неравенство треугольника — скомбинировать предложение 1.2.22 и неравенство треугольника для \mathbb{R}^n .

Поскольку скалярное произведение однозначно определяется соответствующей нормой, евклидово пространство можно было определить как нормированное пространство с евклидовой нормой. Следующее упражнение дает явную характеристику евклидовых пространств среди всех нормированных.

Упражнение 1.2.20. Докажите, что норма $|\cdot|$ на векторном пространстве V является евклидовой тогда и только тогда, когда

$$|v + w|^2 + |v - w|^2 = 2(|v|^2 + |w|^2)$$

для всех $v, w \in V$.

Упражнение 1.2.21. Покажите, что \mathbb{R}_1^n и \mathbb{R}_∞^n не являются евклидовыми пространствами при $n > 1$.

Два вектора в евклидовом пространстве называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. *Ортонормированный репер* — это набор единичных попарно ортогональных векторов. Векторы ортонормированного репера линейно независимы (докажите это!). Ортонормированный репер можно получить из любого набора линейно независимых векторов методом стандартной ортогонализации Грамма-Шмидта.

В частности, конечномерное евклидово пространство V имеет ортонормированный базис. Пусть $\dim V = n$ и пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — такой базис. Каждый вектор $x \in V$ можно представить единственным образом как линейную комбинацию $\sum x_i e_i$ некоторых $x_i \in \mathbb{R}$. Поскольку все попарные скалярные произведения векторов e_i известны, мы можем найти скалярное произведение любой их линейной комбинации, а именно

$$\left\langle \sum x_i e_i, \sum y_i e_i \right\rangle = \sum x_i y_i.$$

Отсюда следует:

Предложение 1.2.22. Каждое n -мерное евклидово пространство изоморфно \mathbb{R}^n . Это значит, что существует такой линейный изоморфизм $f: \mathbb{R}^n \rightarrow V$, что $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. В частности, все евклидовы n -мерные пространства изометричны между собой.

Доказательство. Определим $f((x_1, \dots, x_n)) = \sum x_i e_i$, где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис. \square

Это предложение позволяет применять элементарную евклидову геометрию к общим евклидовым пространствам. Например, поскольку любое двумерное подпространство евклидова пространства изоморфно \mathbb{R}^2 , любое утверждение, в котором участвуют только два вектора и их линейные комбинации, можно автоматически перенести со стандартной евклидовой плоскости на все евклидовы пространства.

Упражнение 1.2.23. Докажите, что любое сохраняющее расстояния отображение одного евклидова пространства на другое является аффинным отображением, то есть композицией линейного отображения и параллельного переноса. Покажите на примере, что для произвольных нормированных пространств это, вообще говоря, не так.

Упражнение 1.2.24. Пусть V — конечномерное нормированное пространство. Докажите, что V является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $v, w \in V$ таких, что $|v| = |w|$, существует такая линейная изометрия $f: V \rightarrow V$, что $f(v) = w$.

1.2.3. Сферы.

Пример 1.2.25. n -мерная сфера S^n — это множество единичных векторов в \mathbb{R}^{n+1} , то есть $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Угловая метрика на S^n определяется равенством

$$d(x, y) = \arccos \langle x, y \rangle.$$

Другими словами, сферическое расстояние — это евклидов угол между единичными векторами. Он равен длине кратчайшей дуги большого круга, соединяющего на сфере x и y . Другая формула для этой метрики:

$$d(x, y) = 2 \arcsin \frac{|x - y|}{2}.$$

Метрика на круге, описанная в примере 1.2.9, является частным случаем этого примера.

1.3. Метрика и топология

Определение 1.3.1. Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$ и $r > 0$. Множество точек, расстояние от которых до x меньше r , называется (открытым метрическим) *шаром* радиуса r с центром x . Обозначим этот шар через $B_r(x)$. Аналогично, *замкнутый шар* $\bar{B}_r(x)$ определяется как множество точек, лежащих на меньшем или равном r расстоянии от x .

Упражнение 1.3.2. Пусть x_1 и x_2 — точки некоего метрического пространства, а r_1 и r_2 — положительные числа. Докажите, что

- (а) если $|x_1 x_2| \geq r_1 + r_2$, то шары $B_{r_1}(x_1)$ и $B_{r_2}(x_2)$ не пересекаются;
- (б) если $|x_1 x_2| \leq r_1 - r_2$, то $B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1)$;

(в) обратные для (а) и (б) высказывания не всегда верны (приведите контрпримеры).

Топология, индуцированная метрикой, определяется следующим образом: множество U в метрическом пространстве является открытым тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Легко видеть, что открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар — замкнутым (то есть его дополнение открыто). Из первой части этого утверждения следует, что множество является открытым тогда и только тогда, когда оно представимо как объединение открытых шаров (возможно, бесконечного их множества).

Упражнение 1.3.3. Пусть X — метрическое пространство и $Y \subset X$. Докажите, что две следующие топологии на Y совпадают: топология, индуцированная сужением метрики пространства X на Y и топология на Y , индуцированная топологией пространства X (в которой множество является открытым тогда и только тогда, когда оно представимо как пересечение Y с открытым подмножеством X).

Упражнение 1.3.4. Докажите, что топология метрического произведения пространств совпадает со стандартной топологией произведения.

Определение 1.3.5. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ точек топологического пространства X *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности точки x найдется такое число n_0 , что $x_n \in U$ для всех $n \geq n_0$. Обозначение: $x_n \rightarrow x$ (при $n \rightarrow \infty$). Точка x называется *пределом* этой последовательности.

В метрическом пространстве $x_n \rightarrow x$ тогда и только тогда, когда $|x_n - x| \rightarrow 0$. Для метрических пространств также верно следующее.

Предложение 1.3.6. Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда

- (1) Последовательность в X не может иметь больше одного предела.
- (2) Точка $x \in X$ является предельной точкой множества $S \subset X$ (то есть принадлежит замыканию множества S) тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, что $x_n \in S$ для всех n и $x_n \rightarrow x$. В частности, S является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит пределы всех последовательностей, содержащихся в S .

- (3) *Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда $f(x_n) \rightarrow f(x)$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x .*

Доказательства мы оставляем читателю в качестве простых упражнений.

1.4. Липшицевы отображения

Определение 1.4.1. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *липшицевым*, если существует такое $C \geq 0$, что $|f(x_1)f(x_2)| \leq C|x_1x_2|$ для всех $x_1, x_2 \in X$. Любое подходящее значение C называется константой Липшица отображения f . Минимальная константа Липшица называется *растяжением* f и обозначается $\text{dil } f$. Растяжение не липшицевой функции полагаем равным бесконечности.

Отображение с константой Липшица 1 называется *нерастягивающим*.

Упражнение 1.4.2. По определению, расстояние от точки x до множества S — это число $\inf_{y \in S} |xy|$; это расстояние обозначаем через $\text{dist}(x, S)$. Докажите, что $\text{dist}(\cdot, S)$ является нерастягивающей функцией.

Предложение 1.4.3. (1) *Все липшицевы отображения являются непрерывными.*

(2) *Если отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — липшицевы, то $g \circ f$ — тоже липшицево, и $\text{dil}(g \circ f) \leq \text{dil } f \cdot \text{dil } g$*

(3) *Множество действительных липшицевых функций (и, более общо, множество липшицевых функций из метрического в нормированное пространство) является векторным пространством. Для любых липшицевых функций f, g и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\text{dil}(f + g) \leq \text{dil } f + \text{dil } g$, $\text{dil}(\lambda f) = |\lambda| \text{dil } f$.*

Доказательство очевидно.

Определение 1.4.4. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *локально липшицевым*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность U такую, что $f|_U$ — липшицево. *Растяжение f в точке x определяется формулой*

$$\text{dil}_x f = \inf\{\text{dil } f|_U : U \text{ — окрестность } x\}.$$

Упражнение 1.4.5. Пусть X — метрическое пространство. Докажите, что $\text{dil } f = \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{dil}_x f$ для любого отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow X$. Докажите то же самое утверждение, заменив в нем \mathbb{R} на S^1 с метрикой, описанной в упражнении 1.2.9. Покажите, что это неверно для S^1 с метрикой, суженной из \mathbb{R}^2 .

Определение 1.4.6. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *билипшицевым*, если существуют такие положительные константы c и C , что

$$c|x_1x_2| \leq |f(x_1)f(x_2)| \leq C|x_1x_2|$$

для всех $x_1, x_2 \in X$.

Очевидно, что каждое билипшицево отображение представляет собой гомеоморфизм на образ.

Определение 1.4.7. Две метрики d_1 и d_2 на одном множестве X называются *липшицево эквивалентными*, если существуют такие положительные константы c и C , что

$$c \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C \cdot d_1(x, y)$$

для всех $x, y \in X$.

Другими словами, метрики d_1 и d_2 являются липшицево эквивалентными, если тождественное отображение является билипшицевым отображением из (X, d_1) на (X, d_2) . Ясно, что это отношение — эквивалентность на множестве метрик, заданных на X . Липшицево эквивалентные метрики определяют одну и ту же топологию.

Упражнение 1.4.8. Приведите примеры двух метрик на одном и том же множестве, определяющих одну и ту же топологию, но не являющихся липшицево эквивалентными.

Упражнение 1.4.9. Пусть X и Y — метрические пространства. Докажите, что следующие три метрики на $X \times Y$ липшицево эквивалентны.

1. Метрика, определенная в примере 1.2.4.
2. $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1x_2| + |y_1y_2|$.
3. $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1x_2|, |y_1y_2|\}$.

Упражнение 1.4.10. Пусть X — метрическое пространство. Докажите, что любая из рассмотренных в предыдущем упражнении метрик на $X \times X$ является липшицевой функцией на $X \times X$,

Этот раздел мы завершим следующей важной теоремой о нормированных пространствах.

Теорема 1.4.11. 1. Две нормы на векторном пространстве определяют одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда они являются липшицево эквивалентными.

2. Все нормы на конечномерном векторном пространстве являются липшицево эквивалентными.

Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения.

1.5. Полные пространства

Определение 1.5.1. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если $|x_n x_m| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Точный смысл этого следующий: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что $|x_n x_m| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$ и $m \geq n_0$.

Метрическое пространство называется *полным*, если в нем каждая последовательность Коши имеет предел.

Как известно из анализа (см., например, [Ru]) \mathbb{R} — полное пространство. Отсюда следует, что \mathbb{R}^n является полным пространством для всех n . Примером неполного пространства служит $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; последовательность, сходящаяся к нулю в \mathbb{R} , является последовательностью Коши, не имеющей предела в этом пространстве. (Заметим, что сходящаяся последовательность всегда является последовательностью Коши.)

Упражнение 1.5.2. Докажите, что билипшицев гомеоморфизм сохраняет полноту. В частности, липшицево эквивалентные метрики — одновременно полные или неполные.

Упражнение 1.5.3. Покажите, что полнота *не* является топологическим свойством, то есть существуют такие гомеоморфные метрические пространства X и Y , что X — полное, а Y — неполное.

Упражнение 1.5.4. Диаметр множества S в метрическом пространстве определяется равенством $\text{diam}(S) = \sup_{x, y \in S} |xy|$. Докажите, что метрическое пространство X является полным тогда и только тогда, когда оно обладает следующим свойством: если $\{X_n\}$ — последовательность замкнутых подмножеств пространства X , $X_{n+1} \subset X_n$ для всех n и $\text{diam}(X_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то все множества X_n имеют общую точку.

Покажите, что предположение $\text{diam}(X_n) \rightarrow 0$ существенно.

Предложение 1.5.5. Пусть X — метрическое пространство, и $Y \subset X$. Тогда

- (1) Если Y — полное, то Y замкнуто в X .
- (2) Если X — полное и Y замкнуто в X , то Y — тоже полное.

Два следующих упражнения служат хорошим подспорьем при доказательстве полноты различных пространств.

Упражнение 1.5.6. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве. Докажите, что

- (а) если $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

(b) Для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел существует такая подпоследовательность $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $|y_n y_{n+1}| < \varepsilon_n$ для всех n .

Упражнение 1.5.7. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек метрического пространства, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n x_{n+1}|$ сходится. Докажите, что $\{x_n\}$ является последовательностью Коши.

Упражнение 1.5.8 (Теорема о неподвижной точке). Пусть пространство X — полное, $0 < \lambda < 1$ и пусть отображение $f: X \rightarrow X$ удовлетворяет условию $|f(x)f(y)| \leq \lambda|xy|$ для всех $x, y \in X$. Докажите, что тогда существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

Подсказка. Постройте x_0 как предел последовательности $\{x_n\}$, где точка x_1 произвольна, и $x_{n+1} = f(x_n)$ для всех $n \geq 1$.

Следующая простая теорема часто используется в этой книге.

Предложение 1.5.9. Пусть X — метрическое пространство, а X' — всюду плотное в нем подмножество. Пусть, далее, $f: X' \rightarrow Y$ — липшицево отображение, причем пространство Y — полное. Тогда существует единственное непрерывное отображение $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ такое, что $\tilde{f}|_{X'} = f$. Более того, \tilde{f} является липшицевым и $\text{dil } \tilde{f} = \text{dil } f$.

Доказательство. Пусть C — константа Липшица для f . Для каждого $x \in X$ построим точку $\tilde{f}(x) \in Y$ следующим образом. Выберем такую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $x_n \in X'$ для всех n , и $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что $\{f(x_n)\}$ является последовательностью Коши в Y . Действительно, имеем $|f(x_i)f(x_j)| \leq C|x_i x_j|$ для всех i, j и $|x_i x_j| \rightarrow 0$ при $i, j \rightarrow \infty$, поскольку последовательность $\{x_n\}$ сходится; значит, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится; теперь определим $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Таким образом, мы построили некоторое отображение $\tilde{f}: X \rightarrow Y$. Далее, неравенство $|\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| \leq C|xx'|$ при $x, x' \in X$ справедливо как предел аналогичных неравенств для f . В самом деле, если $x = \lim x_n$, $x' = \lim x'_n$, $\tilde{f}(x) = \lim f(x_n)$, $\tilde{f}(x') = \lim f(x'_n)$, то

$$|\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)f(x'_n)| \leq C \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n x'_n| = C|xy|.$$

Следовательно, \tilde{f} является липшицевым (в частности, оно непрерывно), и $\text{dil } \tilde{f} \leq C$.

Единственность \tilde{f} тривиальна: если два непрерывных отображения совпадают на плотном множестве, то они совпадают всюду. \square

Полнение. В метрическом пространстве определена операция замыкания, позволяющая из произвольного подмножества получить замкнутое. Следующая теорема определяет сходную операцию, которая позволяет получить полное метрическое пространство из неполного.

Теорема 1.5.10. *Для любого метрического пространства X существует такое полное метрическое пространство \tilde{X} , что X является подпространством в \tilde{X} и всюду плотно в нем. Пространство \tilde{X} единственно в следующем смысле: если \tilde{X}' — другое пространство с такими же свойствами, то существует единственная изометрия $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ такая, что $f|_X = \text{id}$.*

Определение 1.5.11. Пространство \tilde{X} из теоремы 1.5.10 называется *полнением* пространства X .

Доказательство теоремы 1.5.10. Обозначим через \mathfrak{X} множество всех последовательностей Коши в X . Расстояние в \mathfrak{X} определим равенством

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|.$$

Легко проверить, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши, то $\{|x_n y_n|\}$ является либо последовательностью Коши (вещественных чисел) или $|x_n y_n| = \infty$ для всех достаточно больших n . Таким образом, предел, стоящий в выносной формуле выше, всегда существует. Ясно, что d является полуметрикой на \mathfrak{X} . Положим $\tilde{X} = X/d$ (смотрите теорему 1.1.5 и следующее за ней замечание).

Рассмотрим естественное отображение пространства X в \tilde{X} , при котором точке $x \in X$ соответствует точка пространства \tilde{X} , представленная постоянной последовательностью $\{x\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку это отображение сохраняет расстояния, мы можем отождествить X с его образом в \tilde{X} (формально, надо изменить определение \tilde{X} , заменив точками из X их образы). При этом X становится подмножеством \tilde{X} . Оно всюду плотно, потому что точка из \tilde{X} , представленная последовательностью $\{x_n\}$, представляет собой предел этой последовательности (рассматриваемой как последовательность в $X \subset \tilde{X}$).

Единственность следует из теоремы 1.5.9, примененной к отображениям включения X в \tilde{X} и в \tilde{X}' . \square

Теорема Бэра.

Определение 1.5.12. Множество Y в топологическом пространстве X называется *нигде не плотным*, если внутренность замыкания Y пуста.

Эквивалентно, Y является *нигде не плотным* в X , если внутренность множества $X \setminus Y$ всюду плотна. Обращаясь к определениям замыкания и внутренней, мы получаем следующее описание: Y является *нигде не*

плотным тогда и только тогда, когда в любом открытом множестве U найдется шар, не пересекающийся с Y .

Теорема 1.5.13 (Теорема Бэра). *Полное метрическое пространство нельзя покрыть счетным множеством нигде не плотных в нем подмножеств. Более того, объединение счетного множества нигде не плотных подмножеств имеет плотное дополнение.*

Замечание 1.5.14. Другое, эквивалентное, определение: в полном пространстве пересечение счетного набора множеств, внутренности которых всюду плотны (в частности, пересечение счетного набора открытых всюду плотных множеств) является всюду плотным.

Замечание 1.5.15. Объединение счетного набора нигде не плотных множеств может и не быть нигде не плотным. Рассмотрим, например, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ как объединение отдельных точек.

Доказательство теоремы. Пусть X — полное метрическое пространство и $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное семейство нигде не плотных множеств. Нам нужно показать, что в любом открытом множестве $U \subset X$ найдется точка, не принадлежащая $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$. Поскольку Y_1 нигде не плотно, существует (замкнутый) шар $B_1 \subset U$, не пересекающийся с Y_1 . Поскольку Y_2 нигде не плотно, существует замкнутый шар $B_2 \subset B_1$, не пересекающийся с Y_2 . И так далее. В результате мы получаем последовательность $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ замкнутых шаров, где каждый шар B_i не имеет общих точек с соответствующим множеством Y_i . Радиусы шаров B_i мы можем выбрать сходящимися к нулю. Тогда центры шаров образуют последовательность Коши. Предел этой последовательности принадлежит всем шарам и, таким образом, не принадлежит ни одному из множеств Y_i . \square

1.6. Компактные пространства

Напомним, что топологическое пространство называется *компактным*, если любое открытое покрытие пространства X (то есть семейство открытых множеств, покрывающих X) содержит *конечное* подсемейство, которое тоже покрывает X . Термин “компактное множество” означает такое подмножество топологического пространства, которое компактно относительно индуцированной на нем топологии.

Определение 1.6.1. Пусть X — метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ называется ε -сетью в X , если $\text{dist}(x, S) \leq \varepsilon$ для каждого $x \in X$.

Пространство X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε -сеть.

Упражнение 1.6.2. Пусть X — метрическое пространство, $Y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ называется ε -сетью для Y , если $\text{dist}(y, S) \leq \varepsilon$ для всех $y \in Y$. Докажите, что если существует конечная ε -сеть для Y , то существует конечная (2ε) -сеть для Y , содержащаяся в Y .

Упражнение 1.6.3. Докажите, что

(а) любое подмножество вполне ограниченного множества является вполне ограниченным.

(б) Любое ограниченное множество (то есть множество, диаметр которого конечен) в \mathbb{R}^n является вполне ограниченным.

Упражнение 1.6.4. Множество S в метрическом пространстве называется ε -разделенным для $\varepsilon > 0$, если $|xy| \geq \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in S$. Докажите, что

1. Если существует $(\varepsilon/3)$ -сеть из n точек, то ε -разделенное множество не может содержать более, чем n точек.

2. Максимальное (по числу точек) ε -разделенное множество является ε -сетью.

Следующая теорема содержит перечень эквивалентных определений компактности для метрических пространств. Последнее из них является для нас наиболее важным.

Теорема 1.6.5. Для любого метрического пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- (1) X является компактным.
- (2) Любая последовательность в X содержит сходящуюся подпоследовательность.
- (3) Любое бесконечное подмножество X имеет предельную точку.
- (4) X является полным и вполне ограниченным.

Следующие свойства известны из общей топологии.

Предложение 1.6.6. Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства. Тогда

- (1) Если $S \subset X$ — компактное множество, то S является замкнутым в X .
- (2) Если X является компактным и $S \subset X$ является замкнутым в X , то S компактно.
- (3) Если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность таких компактных множеств, что $X_{n+1} \subset X_n$ для всех n , то $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.
- (4) Множество в \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

- (5) Если X компактно и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то $f(X)$ компактно.
- (6) Биективное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ компакта X является гомеоморфизмом.
- (7) Если $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компакте X , то f достигает своего максимума и минимума.

Свойство, описанное для \mathbb{R}^n в четвертом пункте, называется *ограниченной компактностью*.

Определение 1.6.7. Метрическое пространство называют *ограниченно компактным*, если все его замкнутые ограниченные подмножества компактны.

Упражнение 1.6.8. Докажите, что метрическое пространство (возможно, с бесконечными расстояниями) является компактным тогда и только тогда, когда оно представляет собой объединение конечного числа компактных подмножеств, на каждом из которых метрика конечна.

Упражнение 1.6.9. Пусть X — компактное метрическое пространство. Докажите, что

1. Если метрика конечна, то $\text{diam } X < \infty$.
2. Существуют точки $x, y \in X$, такие что $|xy| = \text{diam } X$.

Упражнение 1.6.10. Определим расстояние между двумя подмножествами A и B метрического пространства X равенством $\text{dist}(A, B) = \inf\{|xy|: x \in A, y \in B\}$. (Предупреждение: это “расстояние” не удовлетворяет неравенству треугольника!) Докажите, что

1. Если A и B компактны, то существует такие точки $x \in A$ и $y \in B$, что $|xy| = \text{dist}(A, B)$.
2. Если $X = \mathbb{R}^n$, то же самое будет верно при более слабом предположении, что A — компактно, а B — только замкнуто.

Теорема 1.6.11 (Лемма Лебега). Пусть X — компактное метрическое пространство, а $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $\rho > 0$, что любой шар радиуса ρ в X целиком содержится в одном из множеств U_α .

Доказательство. Можно считать, что метрика пространства X конечна и ни одно из множеств U_α не покрывает все пространство. Тогда можно определить функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$f(x) = \sup\{r \in \mathbb{R}: B_r(x) \text{ содержится в одном из } U_\alpha\}.$$

Так как $\{U_\alpha\}$ является открытым покрытием, $f(x)$ корректно определена и положительна. Очевидно, что функция f является нерастягивающим

отображением и, следовательно, она непрерывна. Следовательно, f достигает (положительного) минимума r_0 . Положим $\rho = r_0/2$. \square

Число ρ называется *числом Лебега* покрытия.

Теорема 1.6.12. Пусть X и Y — метрические пространства, причем X компактно. Тогда каждое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ является равномерно непрерывным. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющей условию $|x_1 x_2| < \delta$, справедливо $|f(x_1) f(x_2)| < \varepsilon$.

Доказательство. У каждой точки $x \in X$ имеется такая окрестность U , что $f(U) \subset B_{\varepsilon/2}(f(x))$; в частности $\text{diam}(f(U)) < \varepsilon$. Следовательно, открытые множества U , удовлетворяющие условию $\text{diam}(f(U)) < \varepsilon$, покрывают X . Остается взять в качестве δ число Лебега этого покрытия. \square

Упражнение 1.6.13. Докажите, что локально липшицево отображение компактного пространства всегда липшицево.

Изометрии компактных пространств. Следующие две теоремы, в отличие от большинства других теорем этой главы (в значительной мере аналитических), отличаются чисто геометрическим содержанием. Первая из этих теорем представляет собой частный случай второй.

Теорема 1.6.14. Компактное метрическое пространство не может быть изометрично его собственному (то есть отличному от него) подмножеству. Другими словами, если X компактно и отображение $f: X \rightarrow X$ сохраняет расстояния, то $f(X) = X$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $p \in X \setminus f(X)$. Так как множество $f(X)$ компактно и, следовательно, замкнуто, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(p) \cap f(X) = \emptyset$. Пусть n — максимальное число точек ε -разделенного множества в X (см. упражнение 1.6.4) и пусть $S \subset X$ — ε -разделенное множество из n точек. Поскольку f является изометрией, множество $f(S)$ также будет ε -разделенным. С другой стороны, $\text{dist}(p, f(S)) \geq \text{dist}(p, f(X)) \geq \varepsilon$ и, следовательно, $f(S) \cup \{p\}$ является ε -разделенным множеством мощности $n + 1$. Получаем противоречие. \square

Теорема 1.6.15. Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда

(1) любое нерастягивающее сюръективное отображение $f: X \rightarrow X$ является изометрией.

(2) Если отображение $f: X \rightarrow X$ таково, что $|f(x)f(y)| \geq |xy|$ для всех $x, y \in X$, то f является изометрией.

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть $|f(p)f(q)| < |pq|$ для некоторых точек $p, q \in X$. Зафиксируем точки p и q и выберем такое $\varepsilon > 0$, что $|f(p)f(q)| < |pq| - 5\varepsilon$.

Пусть n — такое натуральное число, что в X существует хотя бы одна ε -сеть мощности n . Рассмотрим множество $\mathfrak{N} \subset X^n$ всех ε -сетей в X , состоящих из n точек каждая. Это множество замкнуто в X^n , следовательно, оно компактно. Определим функцию $D: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$D(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j|.$$

Эта функция непрерывна и, следовательно, достигает минимума на \mathfrak{N} . Пусть $S = (x_1, \dots, x_n)$ — элемент из \mathfrak{N} , на котором достигается минимум. Поскольку функция f — нерастягивающая и сюръективная, совокупность $f(S) := (f(x_1), \dots, f(x_n))$ также принадлежит \mathfrak{N} . Более того, $D(f(S)) \leq D(S)$, так как $|f(x_i)f(x_j)| \leq |x_i x_j|$ для всех i, j . Но $D(S)$ — минимум функции D на \mathfrak{N} ; следовательно, $D(f(S)) = D(S)$ и $|f(x_i)f(x_j)| = |x_i x_j|$ для всех i, j .

С другой стороны, существуют такие номера i и j , что $|px_i| \leq \varepsilon$ и $|qx_j| \leq \varepsilon$. Для этих номеров мы имеем

$$|x_i x_j| \geq |pq| - |px_i| - |qx_j| \geq |pq| - 2\varepsilon$$

и

$$\begin{aligned} |f(x_i)f(x_j)| &\leq |f(p)f(q)| + |f(p)f(x_i)| + |f(q)f(x_j)| \\ &\leq |f(p)f(q)| + 2\varepsilon \leq |pq| - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $|f(x_i)f(x_j)| < |x_i x_j|$. Противоречие.

2. Положим $Y = f(X)$. Такое же рассуждение, как в доказательстве предыдущей теоремы, показывает, что Y плотно в X . Рассмотрим отображение $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$. Так как g — нерастягивающее и Y плотно в X , можно продолжить g до нерастягивающего отображения $\tilde{g}: X \rightarrow X$. По первой части теоремы, g — изометрия. Значит, $Y = X$ и f — изометрия. \square

1.7. Мера Хаусдорфа и хаусдорфова размерность

1.7.1. Общее понятие меры. Понятие меры обобщает понятия длины, площади и объема. Грубо говоря, мера на пространстве X — это неотрицательная функция, определенная на некотором классе подмножеств пространства X и обладающая свойством аддитивности: это значит, что мера объединения двух непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств. На самом деле, чтобы сделать меры действительно

полезными, к ним предъявляют более строгое требование *счетной аддитивности* (или σ -аддитивности), см. определения ниже.

Хотя является общепринятым говорить о площади плоской фигуры и об объеме пространственного тела, дать определение этим понятиям не так легко. На самом деле такое высказывание как “каждое множество имеет объем” неверно, о чем свидетельствует следующий факт (подробнее об этом [ГО], стр. 215). Пусть B — единичный шар в \mathbb{R}^3 с удаленным центром. Тогда B можно разбить на четыре попарно непересекающихся множества и перегруппировать их (с помощью вращений) так, что получатся две копии B . Если бы для этих четырех частей (которые являются “дикими” множествами) был определен объем, то B и объединение его непересекающихся копий имели бы равные объемы, из чего следует равенство нулю объемов всех множеств. Таким образом, приходится ограничивать класс множеств, для которых определен объем (либо другая мера). Класс множеств, на котором определена мера (множества эти называются *измеримыми*), должен быть σ -алгеброй, то есть удовлетворять следующему определению:

Определение 1.7.1. Пусть X — произвольное множество. Некоторое множество \mathfrak{A} подмножеств X называется σ -алгеброй, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (1) \emptyset и X являются элементами множества \mathfrak{A} ;
- (2) если $A, B \in \mathfrak{A}$, то $A \setminus B \in \mathfrak{A}$;
- (3) объединение $\bigcup_{i \in I} A_i$ конечного или счетного семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ элементов \mathfrak{A} также является элементом \mathfrak{A} .

Замечание 1.7.2. Из формулы $\bigcup(X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap A_i$ следует, что σ -алгебра содержит пересечение любого счетного набора ее элементов.

Определение 1.7.3. Мерой на σ -алгебре \mathfrak{A} называется такая функция $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, что

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$; и
- (2) если $\{A_i\}$ — конечное или счетное множество элементов из \mathfrak{A} , и множества A_i попарно не пересекаются, то $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Второе условие и есть σ -аддитивность. Заметим, что выражение $\sum \mu(A_i)$ представляет либо конечную сумму, либо ряд; сумма этого ряда корректно определена (не зависит от порядка следования его членов), так как члены ряда неотрицательны.

Упражнение 1.7.4. Пусть μ — мера. Докажите следующие утверждения:

- (а) пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — такая последовательность измеримых множеств, что $A_i \subset A_{i+1}$ для всех i . Тогда последовательность $\{\mu(A_i)\}$ — неубывающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\bigcup A_i)$.

(б) Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — такая последовательность измеримых множеств, что $A_i \supset A_{i+1}$ для всех i . Предположим, что $\mu(A_1) < \infty$. Тогда последовательность $\{\mu(A_i)\}$ — неубывающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\bigcap A_i)$.

(в) Сделанное в (б) предположение, что $\mu(A_1) < \infty$, является существенным.

Очевидно, что для любого семейства \mathfrak{S} подмножеств множества X существует единственная σ -алгебра, содержащая \mathfrak{S} (докажите это!); она называется σ -алгеброй, порожденной \mathfrak{S} . Если X — топологическое пространство, то σ -алгебра, порожденная его топологией (то есть множеством всех открытых множеств), называется *борелевской σ -алгеброй* пространства X . Элементы борелевской алгебры называют борелевскими множествами. Мера, определенная на борелевской алгебре, называется *борелевской мерой* на пространстве X .

Следующая теорема служит фундаментом теории меры в евклидовых пространствах.

Теорема 1.7.5 (Теорема Лебега). *Существует единственная борелевская мера m_n на \mathbb{R}^n , инвариантная относительно параллельных переносов и нормированная так, что $m_n([0, 1]) = 1$.*

Мера m_n называется *лебеговой мерой* или *мерой Лебега*. Та часть данной теоремы, что устанавливает единственность, означает, что каждая инвариантная относительно сдвигов борелевская мера на \mathbb{R}^n , принимающая конечное значение на кубе, отличается от m_n только конечным постоянным множителем.

Упражнение 1.7.6. Докажите, что

(а) мера Лебега инвариантна относительно изометрий в \mathbb{R}^n ;

(б) если $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, то $m_n(L(A)) = |\det L| \cdot m_n(A)$ для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$. В частности, гомотетия с коэффициентом C умножает меру Лебега на C^n .

Подсказка. Воспользуйтесь утверждением о единственности меры из теоремы 1.7.5.

1.7.2. Меры Хаусдорфа. Для мотивации определения мер Хаусдорфа вспомним основную линию рассуждений в доказательстве теоремы 1.7.5. Она начинается с выбора класса “простых” множеств (таких как шары или кубы). Далее множество (из соответствующей σ -алгебры) покрывается простыми множествами; затем мера Лебега множества определяется как инфимум по всем покрытиям сумм мер множеств в таком покрытии. Говоря о “сумме мер множеств”, мы предполагаем, что простым множествам уже присвоены определенные меры.

Чтобы определить n -мерную меру Хаусдорфа в метрическом пространстве, следует выполнить такие же действия: покрыть множество такими метрическими шарами, что их радиусы меньше, чем $\varepsilon > 0$. Для каждого шара рассмотреть евклидов шар того же радиуса и сложить объемы этих евклидовых шаров. Это и будет суммарная мера покрытия. Взяв инфимум по всем покрытиям и перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем версию хаусдорфовой меры множества. Вместо суммирования объемов евклидовых шаров того же радиуса можно было бы просто сложить радиусы шаров из покрытия, возведенные в n -ую степень — результат будет тем же самым с точностью до постоянного множителя. Однако, как оказалось, с технической точки зрения использовать произвольные множества и их диаметры удобнее, чем метрические шары и радиусы.

Теперь перейдем к формальным определениям.

Определение 1.7.7. Пусть X — метрическое пространство и d — неотрицательное вещественное число.

Для конечного или счетного покрытия $\{S_i\}_{i \in I}$ пространства X (то есть такого семейства множеств, что $X \subset \bigcup S_i$), определим его d -вес $w_d(\{S_i\})$ формулой

$$w_d(\{S_i\}) = \sum_i (\text{diam } S_i)^d.$$

В случае $d = 0$ заменим в формуле каждое слагаемое 0^0 (если таковые имеются) на 1.

Для $\varepsilon > 0$ определим $\mu_{d,\varepsilon}(X)$ равенством

$$\mu_{d,\varepsilon}(X) = \inf \{w_d(\{S_i\}) : \text{diam}(S_i) < \varepsilon \text{ для всех } i\}.$$

Здесь инфимум берется по всем конечным или счетным покрытиям X множествами диаметра $< \varepsilon$; если таких покрытий не существует, то полагаем инфимум равным $+\infty$.

d -Мерная мера Хаусдорфа пространства X определяется равенством

$$\mu_d(X) = C(d) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{d,\varepsilon}(X),$$

где $C(d)$ — положительный нормирующий множитель. Этот множитель $C(d)$ вводится по единственной причине: для целого d удобно выбрать $C(d)$ так, чтобы d -мерная хаусдорфова мера единичного куба в \mathbb{R}^n равнялась 1. Фактически от значения $C(d)$ почти ничего не зависит.

Возможно, из определения не вполне ясно, каково значение $\mu_d(\emptyset)$. Мы полагаем $\mu_d(\emptyset) = 0$ для всех $d \geq 0$.

Ясно, что $\mu_{d,\varepsilon}(X)$ является невозрастающей функцией от ε . Поскольку такая функция имеет (возможно бесконечный) предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mu_d(X)$

корректно определена для любого метрического пространства X . Она может быть или неотрицательным вещественным числом, или $+\infty$.

Мы определили хаусдорфову меру метрического пространства. Для подмножества B метрического пространства его хаусдорфова мера есть, по определению, хаусдорфова мера B как метрического пространства с метрикой, являющейся сужением метрики объемлющего пространства на B . (Заметим, что определение можно было истолковать и буквально, ибо если X является подмножеством бóльшего метрического пространства, то не важно, содержатся ли в X все множества S_i из рассматриваемых покрытий.)

Следующее предложение суммирует свойства хаусдорфовой меры, непосредственно следующие из определения.

Предложение 1.7.8. Пусть X и Y — метрические пространства, а A и B — подмножества X . Тогда

- (1) Если $A \subset B$, то $\mu_d(A) \leq \mu_d(B)$.
- (2) $\mu_d(\bigcup A_i) \leq \sum \mu_d(A_i)$ для любого конечного или счетного семейства множеств $A_i \subset X$.
- (3) Если $\text{dist}(A, B) > 0$, то $\mu_d(A \cup B) = \mu_d(A) + \mu_d(B)$.
- (4) Если $f: X \rightarrow Y$ — липшицево отображение с константой Липшица C , то $\mu_d(f(X)) \leq C^d \cdot \mu_d(X)$.
- (5) Если $f: X \rightarrow Y$ — C -гомотетия, то есть $|f(x_1)f(x_2)| = C|c_1x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in X$, то $\mu_d(f(X)) = C^d \cdot \mu_d(X)$.

Согласно критерию Каратеодори ([Fe], 2.3.1(9)), любая неотрицательная функция на борелевской σ -алгебре, обладающая свойствами 1-3 из предложения 1.7.8, действительно является мерой. Таким образом, справедлива

Теорема 1.7.9. Для любого метрического пространства X и любого $d > 0$ мера Хаусдорфа μ_d является мерой на σ -алгебре борелевских подмножеств X .

Упражнение 1.7.10. Докажите, что 0-мерная мера Хаусдорфа множества равна его мощности. Другими словами, $\mu_0(X)$ равна количеству точек в X , если X конечно, и $\mu_0(X) = \infty$, если X бесконечно.

Упражнение 1.7.11. Пусть X и Y — метрические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ — локально липшицево отображение с растяжением $\leq C$. Докажите, что $\mu_d(f(X)) \leq C^d \cdot \mu_d(X)$, если X компактно или если X имеет счетную топологическую базу.

1.7.3. Мера Хаусдорфа в \mathbb{R}^n . Обозначим через I интервал $[0, 1]$ числовой оси \mathbb{R} . Тогда $I^n = [0, 1]^n$ называется единичным кубом в \mathbb{R}^n .

Теорема 1.7.12. $0 < \mu_n(I^n) < \infty$.

Упражнение 1.7.13. Докажите эту теорему.

Теперь мы можем определить нормирующий коэффициент $C(n)$ в определении хаусдорфовой меры. А именно, выберем $C(n)$ так, что $\mu_n(I^n) = 1$. Существование такого коэффициента следует из теоремы 1.7.12. Тогда из теоремы 1.7.5 следует, что для \mathbb{R}^n хаусдорфова мера μ_n совпадает со стандартным n -мерным объемом m_n .

В большинстве случаев истинное значение $C(n)$ не имеет значения. Однако, интересно, что $C(n)$ равняется объему евклидова n -мерного шара единичного диаметра. Доказательство этого основано на следующей теореме.

Теорема 1.7.14 (Теорема Витали о покрытии). Пусть X — ограниченное множество в \mathbb{R}^n , и пусть \mathfrak{B} — такое семейство замкнутых шаров в \mathbb{R}^n , что для каждой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой шар $B \in \mathfrak{B}$, что $x \in B$ и $\text{diam}(B) < \varepsilon$. Тогда \mathfrak{B} содержит конечное или счетное подсемейство, состоящее из попарно непересекающихся шаров $\{B_i\}$, покрывающих X с точностью до множества меры 0 (то есть таких, что $B_i \cap B_j = \emptyset$, если $i \neq j$, и $\mu_n(X \setminus \bigcup_i B_i) = 0$).

Доказательство. Можно считать, что каждый шар $B \in \mathfrak{B}$ содержит хотя бы одну точку из X , и исключить шары с радиусами больше 1. Тогда все шары содержатся в 2-окрестности X , которая является ограниченной и, следовательно, имеет конечный объем. Построим по индукции последовательность $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ шаров. А именно, если шары B_1, \dots, B_m уже построены, выберем следующий шар B_{m+1} следующим образом. Пусть \mathfrak{B}_m — множество тех шаров семейства, которые не пересекаются ни с одним из шаров из последовательности B_1, \dots, B_m . Если \mathfrak{B}_m пусто, то $B_1 \cup \dots \cup B_m$ покрывает X и доказательство на этом заканчивается (это следует из того, что каждая точка покрыта шарами сколь угодно малых радиусов). Если \mathfrak{B}_m не пусто, выберем в качестве B_{m+1} любой такой элемент из \mathfrak{B}_m , что

$$(1.1) \quad \text{diam}(B_{m+1}) > \frac{1}{2} \sup\{\text{diam}(B) : B \in \mathfrak{B}_m\}.$$

По построению, шары B_i попарно не пересекаются. Покажем, что они покрывают X с точностью до множества меры 0. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как шары попарно не пересекаются и лежат в множестве конечного объема, имеем $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_n(B_i) < \infty$. Следовательно, существует такой номер m , что $\sum_{i=m+1}^{\infty} \mu_n(B_i) < \varepsilon$. Пусть $x \in X \setminus \bigcup_i B_i$, а B — любой шар из нашего семейства, содержащий x и не пересекающийся с шарами B_1, \dots, B_m . Заметим, что B должен пересекаться с $\bigcup_i B_i$, поскольку в противном случае $B \in \mathfrak{B}_m$ для всех m , что противоречит условию

$\mu_n(B_i) \rightarrow 0$. Пусть k — наименьшее целое число, для которого $B \cap B_k \neq \emptyset$. Тогда $B \in \mathfrak{B}_{k-1}$ и, следовательно, $\text{diam}(B_k) > \frac{1}{2} \text{diam}(B)$. Отсюда следует, что расстояние от x до центра шара B_k превосходит радиус шара B_k не более, чем в 5 раз. Следовательно, x принадлежит шару с тем же центром, что у B_k , и в 5 раз бóльшим радиусом. Обозначим этот шар через $5B_k$.

Таким образом, мы доказали, что каждая точка $x \in X \setminus \bigcup_i B_i$ принадлежит шару $5B_k$ для некоторого $k > t$. Следовательно $X \setminus \bigcup_i B_i \subset \bigcup_{i=m+1}^{\infty} (5B_i)$; отсюда

$$\mu_n(X \setminus \bigcup_i B_i) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \mu_n(5B_i) = 5^n \sum_{i=m+1}^{\infty} \mu_n(B_i) < 5^n \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, отсюда следует, что $\mu_n(X \setminus \bigcup_i B_i) = 0$. \square

Следствие 1.7.15. *Нормирующий коэффициент для n -мерной меры Хаусдорфа равен объему евклидова n -мерного шара диаметром 1.*

Доказательство. Пусть C_n — нормирующий коэффициент, о котором шла речь в теореме. Тогда объем евклидова n -мерного шара равен $C_n d^n$, где d — диаметр шара. Пусть μ'_n — n -мерная хаусдорфова мера с нормирующим коэффициентом C_n . Требуется доказать, что $\mu'_n = \mu_n$, то есть, что $\mu'_n(I^n) = 1$.

1. Докажем, что $\mu'_n(I^n) \leq 1$. Для этого применим теорему 1.7.14 к множеству \mathfrak{B} всех замкнутых евклидовых шаров, содержащихся в I^n . Это приводит к такому счетному семейству $\{B_i\}$ шаров, что множество $Y = I^n \setminus \bigcup B_i$ имеет нулевую меру. Отсюда $\mu'_n(I^n) \leq \mu'_n(Y) + \sum C_n \text{diam}(B_i)^n = 0 + \sum m_n(B_i) \leq m_n(I^n) = 1$.

2. Докажем, что $\mu'_n(I^n) \geq 1$. Согласно известному неравенству Бибербаха (см., например, [BZ], теорема 11.2.1) евклидов шар имеет максимальный объем среди множеств с таким же диаметром. Следовательно, $m_n(S) \leq C_n \text{diam}(S)^n$ для любого ограниченного множества $S \subset \mathbb{R}^n$. Теперь, если $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ является покрытием куба I^n , то $1 = m_n(I^n) \leq \sum m_n(S_i) \leq \sum C_n \text{diam}(S_i)^n$. \square

1.7.4. Хаусдорфова размерность. Следующая теорема демонстрирует, как хаусдорфова мера фиксированного множества зависит от размерности. Коротко говоря, мера или равна нулю или бесконечна для всех размерностей, кроме одной. Если точнее, то существует “критическая размерность”, ниже которой мера бесконечна и выше которой мера равна нулю. Эта размерность является важной характеристикой метрического пространства и называется хаусдорфовой размерностью. *Предупреждение:* для критической размерности могут иметь место все три возможности (мера равна нулю, положительному числу или $+\infty$).

Теорема 1.7.16. Для любого метрического пространства X существует такое $d_0 \in [0, +\infty]$, что $\mu_d(X) = 0$ для всех $d > d_0$, и $\mu_d(X) = \infty$ для всех $d < d_0$.

Доказательство. Определим $d_0 = \inf\{d \geq 0 : \mu_d(X) \neq \infty\}$. Очевидно, что $\mu_d(X) = \infty$ для всех $d < d_0$. Если $d > d_0$, то существует такое $d' < d$, что $\mu_{d'}(X) = \infty$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\{S_i\}$ пространства X , что $\text{diam } S_i < \varepsilon$ для всех i и $\sum (\text{diam } S_i)^{d'} < 2M$. Тогда

$$\sum (\text{diam } S_i)^d \leq \varepsilon^{d-d'} \cdot \sum (\text{diam } S_i)^{d'} \leq 2\varepsilon^{d-d'} M.$$

Отсюда $\mu_{d,\varepsilon}(X) \leq 2\varepsilon^{d-d'} M$. Поскольку $\varepsilon^{d-d'} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то имеем $\mu_d(X) = 0$. \square

Определение 1.7.17. Величина d_0 из теоремы 1.7.16 называется *хаусдорфовой размерностью* пространства X и обозначается $\dim_H(X)$.

Замечание 1.7.18. Хаусдорфова размерность не обязательно является целым числом.

Вот несколько свойств хаусдорфовой размерности, легко следующих из определения.

- Предложение 1.7.19.**
- (1) Если $Y \subset X$, то $\dim_H(Y) \leq \dim_H(X)$.
 - (2) Если X покрыто конечным или счетным семейством его подмножеств, то $\dim_H(X) = \sup_i \dim_H(X_i)$.
 - (3) Если $f: X \rightarrow Y$ — липшицево отображение, то $\dim_H(f(X)) \leq \dim_H(X)$. В частности, липшицево-эквивалентные метрические пространства имеют равные хаусдорфовы размерности.
 - (4) $\dim_H(\mathbb{R}^n) = \dim_H(I^n) = n$.

Упражнение 1.7.20. Пусть X и Y — метрические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ — такое отображение, что $|f(x_1)f(x_2)| \leq C \cdot |x_1x_2|^\alpha$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и некоторых положительных постоянных C и α . Докажите, что тогда $\dim_H(f(X)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(X)$.

Упражнение 1.7.21. Докажите, что хаусдорфова размерность стандартного канторова множества равна $\log_3 2$. Более общо, пусть X — компактное пространство, которое может быть разбито на n подмножеств X_1, \dots, X_n , полученных из X посредством растяжений с коэффициентами c_1, \dots, c_n , соответственно. Докажите, что $d = \dim_H(X)$ удовлетворяет уравнению $\sum c_i^d = 1$. (*Предупреждение:* компактность здесь существенна!)

Упражнение 1.7.22. Приведите примеры

- (а) несчетного метрического пространства, хаусдорфова размерность которого равна нулю;

- (б) метрического пространства X с $\dim_H(X) = 1$ и $\mu_1(X) = 0$;
- (в) метрического пространства X с $\dim_H(X) = 1$ и $\mu_1(X) = +\infty$.

Внутренние метрики

2.1. Функционалы длины

Прежде всего мы хотим “на пальцах” разъяснить основную идею этой главы. Допустим, вы спрашиваете математика: “Какое расстояние от Нью-Йорка до Сиднея?” Возможно, он ответит: “Около 8 тысяч миль”. Это формально верно и тем не менее совершенно бесполезно — это расстояние вдоль прямолинейного туннеля сквозь Землю. Аналогично, каждый альпинист знает, что расстояние в горах обманчиво; если вы измеряете его оптическими приборами, вы получаете расстояние “вдоль птичьего полета”. Для птиц это, может быть, и имеет смысл, но привязанные к земной поверхности бескрылые существа вроде нас вынуждены долго идти в обход, двигаясь то вверх, то вниз (см. рис. 2.1).

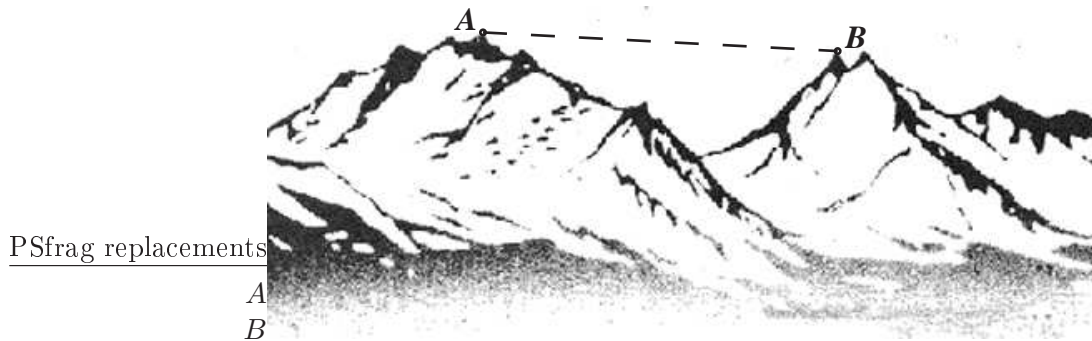


Рис. 2.1: Птица может лететь вдоль отрезка АВ; для пешехода путь намного длиннее

Это маленькое философское отступление содержит вполне ясную математическую мораль: во многих случаях приходится считать исходным понятием длину пути, и только после этого можно определить расстояние.

Сформулируем это наблюдение более точно. Для любых двух точек на поверхности в евклидовом пространстве (например, на поверхности Земли) можно измерить евклидово расстояние между ними. Вместо этого мы вводим новое расстояние, измеренное вдоль кратчайшего пути, соединяющего эти две точки. Обобщая эту идею, мы называем функцию расстояния метрического пространства внутренней метрикой, если расстояние между любыми двумя точками реализуется некоторым путем, их соединяющим. (Точнее, оно должно быть равно инфимуму длин путей между точками — кратчайшего пути может не существовать.)

Если длины путей — наше исходное понятие, то следует спросить, каково его строгое определение, где возникают такие структуры и каковы их свойства. Мы будем заниматься этими вопросами на протяжении всей книги.

2.1.1. Функционалы длины. Говоря нестрого, функционал длины задается *классом допустимых путей*, длины которых мы можем измерять, и собственно *длиной* — соответствием, которое приписывает неотрицательное число каждому пути из этого класса. Как класс, так и соответствие должны обладать несколькими естественными свойствами; во всех разумных примерах (в частности, во всех примерах в этой книге) эти свойства выполняются автоматически.

Начиная с этого момента, слово *путь* всегда означает отображение интервала, а именно, путь γ в (топологическом) пространстве X — это (непрерывное) отображение $\gamma: I \rightarrow X$, определенное на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Под *интервалом* мы понимаем любое связное подмножество вещественной прямой. Оно может быть открытым или замкнутым, ограниченным или неограниченным; множество, состоящее из одной точки, также считается интервалом. Поскольку путь — это отображение, можно говорить об образе пути, о его сужении и т.д.

Будем говорить, что на топологическом пространстве X задан *функционал длины*, если выбран некоторый класс A допустимых путей, содержащийся в множестве всех непрерывных путей в X , и на нем задана функция $L: A \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, называемая длиной пути.

Класс A должен удовлетворять следующим условиям.

- (1) Замкнутость относительно сужений: если $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — допустимый путь и $a \leq c \leq d \leq b$, то сужение $\gamma|_{[c, d]}$ пути γ на интервал $[c, d]$ — также допустимый путь.
- (2) Замкнутость относительно умножения путей: если сужения γ_1 и γ_2 пути $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ на $[a, c]$ и $[c, b]$ оба допустимы, то допустим и путь γ . (Напомним, что в этом случае γ называется *произведением* путей γ_1 и γ_2 , обозначение: $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$.)

- (3) Замкнутость относительно (по крайней мере) линейных замен параметра: для любого допустимого пути $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ и любого гомеоморфизма $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ вида $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ композиция $\gamma \circ \varphi(t) = \gamma(\varphi(t))$ также является допустимым путем.

Замечание 2.1.1. Для каждого естественного класса путей имеется свой собственный класс допустимых замен параметра. Например, для класса всех непрерывных путей это гомеоморфизмы, для кусочно гладких путей — диффеоморфизмы. Мы требуем только того, чтобы класс допустимых замен параметра включал все линейные функции.

Вот некоторые примеры таких классов: все непрерывные пути, кусочно гладкие пути (на гладких многообразиях), ломаные в \mathbb{R}^n . Далее появятся и другие примеры.

Функция длины L должна обладать следующими свойствами.

- (1) Длина пути аддитивна, то есть для любой точки $c \in [a, b]$ справедливо: $L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.
- (2) Длина части пути непрерывно зависит от этой части. Более строго, пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — путь конечной длины. Обозначим через $L(\gamma, a, t)$ длину сужения пути $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ на отрезок $[a, t]$. Мы требуем, чтобы функция $L(\gamma, a, \cdot)$ была непрерывной. (Заметим, что $L(\gamma, a, a) = 0$ из предыдущего свойства.)
- (3) Длина не меняется при замене параметра, то есть $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$ для любого линейного гомеоморфизма φ .

(На самом деле все естественные функционалы длины инвариантны относительно любых замен параметра: $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$ для произвольного гомеоморфизма φ , если пути γ и $\gamma \circ \varphi$ оба допустимы. Однако, нет необходимости проверять это с самого начала.)

- (4) Потребуем, чтобы длины были согласованы с топологией пространства X в следующем смысле: для любой окрестности U_x точки x длины путей, соединяющих x с точками дополнения U_x , отделены от нуля, то есть

$$\inf\{L(\gamma) : \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U_x\} > 0.$$

В этом курсе встретятся несколько важных типов функционалов длины. Желательно, чтобы читатель, встретившись с ними, вернулся к этому определению и проверил, что все они укладываются в эту общую схему.

Обозначения. Мы часто будем использовать уже введенное выше обозначение $L(\gamma, a, b)$. А именно, если $\gamma: I \rightarrow X$ — (допустимый) путь и $[a, b] \subset I$, где $a \leq b$, то через $L(\gamma, a, b)$ обозначается длина сужения

пути γ на $[a, b]$, то есть $L(\gamma, a, b) = L(\gamma|_{[a, b]})$. Кроме того, положим $L(\gamma, b, a) = -L(\gamma, a, b)$. Из этого соглашения следует, что $L(\gamma, a, b) = L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b)$ для любых $a, b, c \in I$ (проверьте это).

2.1.2. Пространства с внутренней метрикой. Имея функционал длины, можно определить метрику (функцию расстояния), индуцированную этой структурой. Мы всегда будем предполагать, что топологическое пространство X , на котором задан функционал длины, является хаусдорфовым. Для каждой пары точек $x, y \in X$ определим расстояние между ними как инфимум длин всех допустимых путей, соединяющих эти точки:

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\gamma); \gamma: [a, b] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Если из контекста ясно, какой функционал длины порождает метрику d_L , мы как правило будем опускать букву L в обозначении d_L .

Упражнение 2.1.2. Проверьте, что (X, d_L) — метрическое пространство.

Отметим, что метрика d_L не обязательно конечна. Например, если X несвязно, то никакой непрерывный путь не идет из одной компоненты связности в другую, и поэтому расстояния между точками из разных компонент бесконечны. Даже если непрерывные пути между двумя данными точками существуют, может оказаться, что все они имеют бесконечную длину. Будем говорить, что точки $x, y \in X$ принадлежат одной и той же *компоненте достижимости*, если их можно соединить путем конечной длины.

Упражнение 2.1.3. 1. Проверьте, что соединимость путями конечной длины действительно является отношением эквивалентности. Рассуждение должно использовать аддитивность длины и то, что произведение допустимых путей является допустимым путем.

2. Проверьте, что компоненты достижимости совпадают с компонентами конечности для d_L .

3. Проверьте, что компоненты достижимости совпадают как с компонентами связности, так и с компонентами линейной связности пространства (X, d_L) .

Заметили ли вы, что воспользовались следующим фактом?

Упражнение 2.1.4. Докажите, что допустимые пути конечной длины непрерывны относительно (X, d_L) .

В этом упражнении речь идет о топологии, определяемой метрикой d_L , а не о исходной топологии пространства X . Существуют примеры, в которых эти топологии и в самом деле различны, чуть позже мы рассмотрим некоторые из них.

Упражнение 2.1.5. Докажите, что топология, определяемая метрикой d_L , может быть разве лишь тоньше, чем топология пространства X , то есть любое открытое множество в X является открытым и в (X, d_L) .

Определение 2.1.6. Метрика называется *внутренней*, если она может быть получена описанным выше способом из какого-нибудь функционала длины.

Не всякая метрика является внутренней. Даже если метрика d является внутренней на пространстве X , ее сужение на множество $A \subset X$ может не быть внутренней метрикой. Рассмотрите в качестве примера окружность как подмножество плоскости.

Более того, не всякая метризуемая топология может быть порождена внутренней метрикой.

Упражнение 2.1.7. 1. Докажите, что множество рациональных чисел не гомеоморфно никакому пространству с внутренней метрикой.

2. Докажите, что объединение графика $\{(x, y) : y = \sin(1/x), x > 0\}$ и y -оси (с индуцированной из \mathbb{R}^2 топологией) не гомеоморфно никакому пространству с внутренней метрикой.

Бывают и более тонкие причины, по которым топологическое пространство может не быть гомеоморфным никакому пространству с внутренней метрикой.

Упражнение 2.1.8. Рассмотрим объединение сегментов

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [(0, 0), (\cos \frac{1}{i}, \sin \frac{1}{i})] \cup [(0, 0), (1, 0)]$$

на евклидовой плоскости, изображенное на рисунке 2.2.

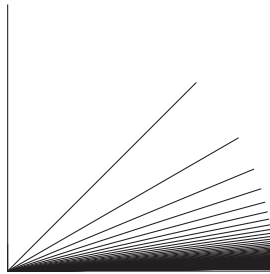


Рис. 2.2: Пространство с топологией, унаследованной из \mathbb{R}^2 , и не гомеоморфное пространству с внутренней метрикой.

Это множество (похожее на веер, составленный из отрезков) мы рассматриваем с топологией, индуцированной евклидовой метрикой (то

есть с топологией сужения евклидовой метрики на это множество). Докажите, что это топологическое пространство не гомеоморфно никакому пространству с внутренней метрикой.

В качестве подсказки к этому упражнению (но не только для этого) рассмотрим более общую ситуацию.

Упражнение 2.1.9. Докажите, что пространство с внутренней метрикой локально линейно связно, то есть каждая окрестность любой точки содержит некоторую линейно связную окрестность.

В определении d_L вместо простого минимума используется инфимум, поскольку кратчайшего пути между двумя точками может и не существовать. Рассмотрим, например, евклидову плоскость с удаленным открытым отрезком. Тогда не существует кратчайшего пути между концами этого отрезка (как раз он-то и удален). Тем не менее, его длину можно сколь угодно хорошо приблизить другими путями, соединяющих эти точки. Такие ситуации редко встречаются в “реальных” примерах; в большинстве случаев они исключаются условиями типа полноты и компактности. Для простоты изложения мы часто будем ограничиваться рассмотрением полных функционалов длины, которые определяются следующим образом.

Определение 2.1.10. Функционал длины L называется *полным*, если для любых двух точек x, y существует соединяющий их допустимый путь, длина которого равна $d_L(x, y)$; другими словами функционал длины — полный, если существует кратчайший путь между любыми двумя точками.

Внутренняя метрика, индуцированная полным функционалом длины, называется *строго внутренней*.

2.2. Первые примеры функционалов длины

Чтобы наполнить наши схемы некоторым содержанием, познакомимся с некоторыми примерами функционалов длины и внутренних метрик. Мы не исследуем их здесь подробно, но советуем читателю держать их в голове и проверять на них дальнейшие понятия и определения. Заметим, что во многих примерах само пространство является частью евклидова пространства, при этом есть два способа изменить стандартную евклидову длину: мы или изменяем класс допустимых путей, или изменяем само понятие длины (или и то, и другое).

Пример 2.2.1 (“Движение по Манхеттену”). Пространство здесь — евклидова плоскость, и длины путей измеряются как обычно. Единственное отличие состоит в том, что мы ограничиваем класс допустимых путей. А

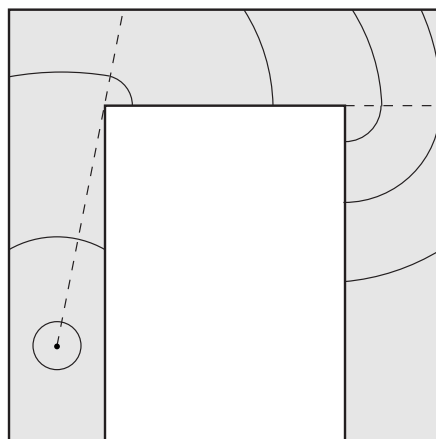


Рис. 2.3: Метрические шары на невыпуклом острове

именно, мы рассматриваем только ломаные, звенья которых параллельны координатным осям. (Критически настроенный читатель возразит, что пути должны быть отображениями, а ломаные — это множества! Он абсолютно прав, и формально мы имеем в виду пути, образы которых являются ломаными.) Попробуйте нарисовать шар в соответствующей внутренней метрике. (Он не будет выглядеть круглым, у вас должен получиться ромб.)

Пример 2.2.2 (“Метрика на острове”). Здесь пространство — это связная область на евклидовой плоскости с обычными длинами путей. Допустимые пути — все (кусочно гладкие) пути, содержащиеся в данной области. Если область выпукла, то этот функционал длины порождает обычное евклидово расстояние. Можно представлять себе, что область — это остров, а расстояние измеряется существом, не умеющим плавать. Рисование шаров возникающей при этом внутренней метрики может быть весьма забавным, см. рис. 2.3. Является ли эта метрика строго внутренней? А если рассматривать замыкание области?

Читатель может обобщить этот пример на случай подмножества любого пространства, на котором задан функционал длины. Конечно, содержательные примеры получаются только при разумном выборе подмножества. Например, сужение евклидовой длины из \mathbb{R}^2 на окружность приводит к угловой метрике. Более общо, сужая обычную длину из евклидова пространства на стандартную сферу, мы получим сферическую геометрию. С другой стороны, сужая стандартную длину из \mathbb{R} на множество рациональных точек, мы получим пространство,

в котором каждая компонента достижимости состоит из единственной точки.

Пример 2.2.3 (индуцированная длина). Формальное содержание этого примера заключается в следующем определении. Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X в пространство Y , на котором задан функционал длины. Определим *индуцированный функционал длины* на X следующим образом. Путь в X считаем допустимым, если его композиция с f допустима в Y . Длину допустимого пути в X определим как длину его композиции с f (в пространстве Y).

(На самом деле эта конструкция может и не определять функционала длины, так как для новой длины может нарушаться четвертое условие из параграфа 2.1.1. Мы будем использовать термин “индуцированный функционал длины” только если он действительно является функционалом длины.)

На первый взгляд это определение может показаться тавтологией. Однако свойства индуцированной метрики могут коренным образом отличаться от свойств исходной метрики. Так, базовый пример индуцированной метрики, когда f является *поверхностью* (то есть погружением $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ двумерной области в \mathbb{R}^3), служил для метрической геометрии основным примером и мотивировкой на протяжении более чем столетия. Для читателя, который уже знаком с римановыми метриками, упомянем также, что (хотя в это трудно поверить и нелегко доказать) функция длины любой римановой метрики в \mathbb{R}^n может быть индуцирована из евклидовой структуры отображением $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (обычно негладким и имеющим массу складок).

Пример 2.2.4 (“Переход через болото”: конформная длина). Здесь пространство — это евклидова плоскость, а допустимые пути — все (кусочно гладкие) пути. Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная (или даже L_∞) функция. Определим длину пути $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ равенством

$$L(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Этот функционал длины можно представлять себе как взвешенное евклидово расстояние. Например, путешественник, который измеряет длину (=время, затраченное на прохождение) некоторого маршрута, очевидно, припишет большие значения функции f на территориях, которые трудно преодолевать (например, на болоте или в горной местности). С математической точки зрения это — первый пример римановой длины, которая будет рассмотрена далее в главе 5; слово “конформный” в названии примера отражает то, что такие римановы структуры называются конформно плоскими.

Пример 2.2.5 (Финслерова длина). Рассматривая предыдущий пример как функционал длины для путешественника, который приписывает различные веса разным частям своего пути, можно заметить, что здесь не отражена одна важная черта реального путешествия. А именно, трудность пересечения местности зависит не только от самой местности, но также от направления маршрута; выбирая направление вдоль основных долин, можно значительно упростить путешествие. Чтобы учесть эту дополнительную информацию, вводится функция f двух переменных, в которую в качестве аргументов подставляются точка пути γ и его скорости γ' в этой точке. Тогда длина выражается следующим образом:

$$L(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

(Сведующий в физике читатель поймет, что этот функционал можно интерпретировать как действие.) Для того, чтобы это выражение было инвариантно относительно замены параметра, нужно потребовать, чтобы функция f удовлетворяла условию $f(x, kv) = |k|f(x, v)$ для всех чисел k , точек x и векторов v (проверьте это в качестве упражнения на замену переменной в определенном интеграле). Обычно на f налагается более строгое требование, именно: для любой точки x функция $f(x, \cdot)$ должна быть нормой. Это требование будет обосновано в параграфе 2.4.2. Функционалы длины, полученные такой конструкцией, называются *финслеровыми*.

Замечание 2.2.6. Читатель, серьезно сопоставляющий наши определения с нуждами путешественников и альпинистов, заметит, что некоторые моменты все же упущены. Например, то, что спуск по склону может быть легче, чем подъем, невозможно отразить в функционале длины. Действительно, поскольку расстояние в метрическом пространстве должно быть симметричным, нам пришлось потребовать сохранения длины при всех заменах переменной, в том числе изменяющих ориентацию, как, например, $t \mapsto -t$. Можно изменить определения так, чтобы допускались несимметричные функционалы длины и метрики. Вся эта глава может быть адаптирована к такой обобщенной постановке; однако это лишено смысла для оставшейся части книги.

Пример 2.2.7 (“Паутина” и “блокнот”). Начнем с нескольких попарно непересекающихся отрезков и склеим между собой некоторые из их концов. Полученное пространство может выглядеть как паутина в евклидовом пространстве. В этом пространстве естественно определен функционал длины. Все непрерывные пути допустимы. Пространство составлено из отрезков и мы знаем, как измерять длину пути, пока движение происходит внутри одного отрезка. Чтобы найти длину всего пути, разобьем исходный интервал на участки (быть может, счетное их число)

так, чтобы образ каждого участка содержался в одном отрезке, и сложим длины сужений пути на эти участки. Это первый пример метрического графа; построение этой длины является частным случаем склеивания, которое подробно рассматривается в параграфе 3.1.

Другой пример того же типа может быть получен из нескольких экземпляров замкнутой полуплоскости путем склеивания их вместе вдоль граничных прямых. Это — пример полиэдрального пространства. Его можно представить себе (и реализовать) в евклидовом пространстве: он выглядит как открытая книга. Попробуйте модифицировать определение длины на паутине для этого случая. Предостережение: на паутине можно было пренебрегать частями пути, содержащимися в концах отрезков (узлах паутины), так как они имели нулевую длину, но для общего ребра полуплоскостей это уже не так.

2.3. Длины, индуцированные метриками

2.3.1. Длина кривой в метрическом пространстве. Вспомним наш наводящий пример из самого начала главы. Мы начали с некоторой метрики (евклидово расстояние “птичьего полета”). Эта метрика нас не удовлетворяла, поскольку могло не быть путей, реализующих это расстояние. Говоря это, мы уже подразумеваем, что нам известны длины путей, и эти длины получены некоторым образом из евклидова расстояния!

В самом деле, во многих основных примерах функционалы длины индуцированы метриками. В качестве допустимых путей можно использовать все непрерывные пути; для некоторых из них длина может быть бесконечной. Иногда предпочтительнее класс липшицевых путей, то есть класс таких отображений $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, что $d_X(\gamma(t), \gamma(t')) \leq C|t - t'|$ для всех $t, t' \in [a, b]$, где C — положительная константа.

Как мы определяем длину пути в евклидовом пространстве? Мы приближаем путь ломаными и определяем длину пути как предел их длин. Вершины каждой ломаной принадлежат (образу) пути и упорядочены соответствующими им значениями параметра. Поскольку все, чем мы на самом деле пользуемся, — это расстояния между соседними вершинами, мы можем перенести это определение на общее метрическое пространство самым прямолинейным способом (сравните также с разделом 2.4.12).

Определение 2.3.1. Пусть (X, d) — метрическое пространство, γ — путь в X , то есть непрерывное отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Рассмотрим разбиение Y промежутка $[a, b]$, то есть такой конечный набор точек $Y = \{y_0, \dots, y_N\}$, что $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N = b$.

Точная верхняя грань сумм

$$\Sigma(Y) = \sum_{i=1}^N d(\gamma(y_{i-1}), \gamma(y_i))$$

по всем разбиениям Y называется *длиной* пути γ (относительно метрики d) и обозначается $L_d(\gamma)$. Кривая называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Функционал длины, индуцированный метрикой d , определяется следующим образом: все непрерывные пути (параметризованные замкнутыми интервалами) допустимы, и длиной является определенная выше функция L_d .

Если из контекста ясно, какая метрика d индуцирует длину L , то мы как правило будем опускать букву d в обозначении L_d .

Формально это определение применимо к любому метрическому пространству, но осмысленные примеры можно получить только при разумном выборе метрического пространства; например, если мы исходим из дискретного пространства, то непостоянных непрерывных путей вообще не существует.

Традиционное “евклидово” определение использует предельный переход при условии, что длины звеньев ломаных стремятся к нулю. Следующее упражнение показывает, что никакой разницы здесь нет.

Упражнение 2.3.2. Докажите, что если $\max_i \{y_i - y_{i+1}\} \rightarrow 0$, то $\Sigma(Y) \rightarrow L(\gamma)$.

Упражнение 2.3.3. Докажите, что наше определение длины согласовано с принятым в дифференциальной геометрии. А именно, если $(V, |\cdot|)$ — конечномерное нормированное векторное пространство, и отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow V$ дифференцируемо, то $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

2.3.2. Свойства индуцированной длины. Все свойства функционалов длины выполняются для этой длины, кроме того, эта длина *полунепрерывна*. Проверим некоторые из этих свойств.

Предложение 2.3.4. Функционал длины $L = L_d$, индуцированный метрикой d , обладает следующими свойствами:

(i) *Обобщенное неравенство треугольника:* $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$.

(ii) *Аддитивность:* если $a < c < b$, то $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) = L(\gamma)$.

В частности, $L(\gamma, a, c)$ — неубывающая функция от c .

(iii) Если γ спрямляем, то функция $L(\gamma|_{[c,d]}) = L(\gamma, c, d)$ непрерывна по c и d .

(iv) Функционал L полунепрерывен снизу на пространстве непрерывных отображений промежутка $[a, b]$ в X относительно поточечной сходимости и, как следствие, относительно равномерной (т. е. C^0 -) топологии.

Это означает, что если последовательность спрямляемых путей γ_i (с одной и той же областью определения $[a, b]$) такова, что для каждого $t \in [a, b]$ последовательность $\gamma_i(t)$ сходится к $\gamma(t)$ при $i \rightarrow \infty$, то $\liminf L(\gamma_i) \geq L(\gamma)$.

Доказательство. (i) В самом деле, из неравенства треугольника следует, что $\Sigma(Y) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$ для всех Y , и неравенство сохраняется при переходе к пределу.

(ii) Сначала заметим, что если Y' получено из Y присоединением одной точки, то $\Sigma(Y') \geq \Sigma(Y)$ (по тому же неравенству треугольника). Добавляя точку c к разбиению Y промежутка $[a, b]$ и затем разделяя это разбиение на два разбиения промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$, мы получаем требуемое.

Повторим еще раз, что читатель должен относиться к таким леммам как к упражнениям и пытаться доказать их самостоятельно. Если же приходится обращаться к написанным доказательствам, то обязательно нужно нарисовать картинку со всеми обозначениями!

(iii) Докажем непрерывность L по d , где $a < d \leq b$, слева (остальные случаи аналогичны и оставляются читателю). Возьмем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такое разбиение Y , что $L(\gamma) - \Sigma(Y) < \varepsilon$. Можно считать, что $y_{j-1} < d = y_j$. Тогда

$$L(\gamma, y_{j-1}, d) - d(\gamma(y_{j-1}), \gamma(d)) < \varepsilon,$$

и то же самое неравенство будет иметь место для каждой точки c такой, что $y_{j-1} \leq c \leq d$.

(iv) Пусть пути γ_j сходятся поточечно к γ . Возьмем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такое разбиение Y для γ , что $L(\gamma) - \Sigma(Y) < \varepsilon$. Теперь для путей γ_j рассмотрим суммы $\Sigma_j(Y)$, соответствующие тому же разбиению Y . Выберем j столь большим, что неравенство $d(\gamma_j(y_i), \gamma(y_i)) < \varepsilon$ выполняется для всех $y_i \in Y$. Тогда

$$L(\gamma) \leq \Sigma(Y) + \varepsilon \leq \Sigma_j(Y) + \varepsilon + (N + 1)\varepsilon \leq L(\gamma_j) + (N + 2)\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то отсюда следует утверждение (iv). \square

Замечание 2.3.5. Вообще говоря, функционал L не является непрерывным. На рисунке 2.4 показан напоминающий лестницу контрпример.

2.3.3. Индуцированная внутренняя метрика. Каждая метрика d индуцирует функционал длины. Последняя в свою очередь порождает внутреннюю метрику (на каждой компоненте достижимости спрямляемыми путями). Таким образом мы получаем каноническую конструкцию для построения внутренних метрик:

$$(X, d) \rightarrow (X, \hat{d}),$$

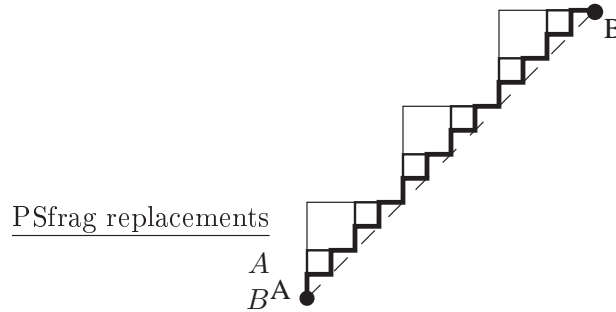


Рис. 2.4: Функционал L не является непрерывным.

где $\hat{d} = d_{L_a}$.

Упражнение 2.3.6. Докажите, что внутренняя метрика, индуцированная сужением евклидовой метрики на окружность $x^2 + y^2 = 1$, является угловой метрикой.

Заметим, что топология, индуцированная внутренней метрикой, может быть очень слабо связана с исходной топологией пространства, как показывает следующее упражнение.

Упражнение 2.3.7. Найдите внутреннюю метрику, индуцированную метрикой

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt{|y_1 - y_2|}$$

в \mathbb{R}^2 . Какова топология получившегося пространства с внутренней метрикой?

Ответ. Континуум попарно непересекающихся вещественных прямых, каждая из которых имеет свою стандартную метрику.

Упражнение 2.3.8. Рассмотрим объединение промежутков

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(0, 1), (1/n, 0)] \cup [(0, 1), (0, 0)] \subset \mathbb{R}^2.$$

Последовательность точек $\{(1/n, 0)\}$ сходится к точке $(0, 0)$ в топологии, унаследованной множеством U из \mathbb{R}^2 . Так как все попарные расстояния между этими точками в индуцированной (внутренней) метрике не меньше 2, то эта последовательность расходится по отношению к внутренней метрике. Докажите эти утверждения.

Упражнение 2.3.9. Соединив точку $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ со всеми точками стандартного канторова подмножества промежутка $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, мы получим компактное связное множество. Покажите, что в индуцированной

(внутренней) метрике это множество некомпактно, хотя и остается связным.

Упражнение 2.3.10. Начнем с простой неспрямляемой кривой в $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ и построим конус над ее образом, выбрав некоторую точку (вершину конуса) в \mathbb{R}^3 и соединив отрезками вершину со всеми точками (образа) кривой. Внутреннее расстояние в этом конусе, индуцированное евклидовым расстоянием в \mathbb{R}^3 , конечно для любых двух точек, так как можно пройти от любой точки до вершины конуса вдоль прямолинейного отрезка и затем добраться любой другой точки, двигаясь вдоль другого сегмента. Покажите, что удаление вершины конуса делает его несвязным в топологии индуцированной метрики, в то время как он остается связным в обычной топологии.

Можно было начать с простой кривой, сужение которой на любой нетривиальный промежуток, неспрямляемо (докажите, что такая кривая действительно существует). В исходной топологии этот конус гомеоморфен диску. Докажите, что в индуцированной внутренней метрике этот конус гомеоморфен “букету” из континуума интервалов (то есть берется континуум попарно непересекающихся отрезков и их “начала” склеиваются между собой).

Упражнение 2.3.11. Для двух векторов $V, W \in \mathbb{R}^2$, положим

$$d(V, W) = \left| |V| - |W| \right| + \min(|V|, |W|) \cdot \sqrt{\angle(V, W)},$$

где через $\angle(V, W)$ обозначен угол между V и W . Докажите, что

(i) топология, определяемая метрикой d , — стандартная евклидова топология.

(ii) индуцированная внутренняя метрика \hat{d} задается формулой

$$\hat{d}(V, W) = \begin{cases} \left| |V| - |W| \right|, & \text{если } \angle(V, W) = 0, \\ \left| |V| + |W| \right| & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(iii) (\mathbb{R}^2, \hat{d}) гомеоморфно букету из континуума лучей.

Можно рассмотреть длины $L_{\hat{d}}$, индуцированные новой метрикой \hat{d} . Эта структура в свою очередь определяет внутреннюю метрику “второго порядка”, и так далее. Читатель может представить себе, какая путаница могла бы возникнуть с этими длинами и метриками. Однако этого не случается, поскольку длины, индуцированные метрикой \hat{d} , те же, что и индуцированные метрикой d . Точнее:

Предложение 2.3.12. Пусть (X, d) — метрическое пространство и \hat{d} — внутренняя метрика, индуцированная метрикой d .

- (1) Для любой спрямляемой кривой γ в пространстве (X, d) имеем $L_{\hat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$.
- (2) Внутренняя метрика, индуцированная метрикой \hat{d} , совпадает с \hat{d} . Другими словами, индуцирование внутренней метрики является идемпотентной операцией.¹

Доказательство. Из того, что длина каждой кривой в (X, d) не меньше, чем расстояние между ее концами, следует, что $\hat{d} \geq d$. Отсюда немедленно вытекает, что $L_{\hat{d}}(\gamma) \geq L_d(\gamma)$. Докажем обратное неравенство. Пусть путь γ определен на промежутке $[a, b]$ и $Y = \{y_i\}$ — произвольное разбиение этого промежутка. Заметим, что $\hat{d}(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1})) \leq L_d(\gamma, y_i, y_{i+1})$, так как выражение слева представляет собой инфимум длин, одна из которых фигурирует справа. Поэтому

$$\Sigma_{\hat{d}}(Y) = \sum \hat{d}(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1})) \leq L_d(\gamma).$$

В силу произвольности разбиения Y справедливо неравенство $L_{\hat{d}}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$. Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение тривиально следует из первого. \square

Замечание 2.3.13. Предположение о том, что кривая γ спрямляема, существенно, хотя бы потому, что иначе она может не быть непрерывной в (X, \hat{d}) . Кривые, непрерывные в (X, \hat{d}) , вообще говоря, образуют подмножество в множестве кривых пространства (X, d) , но это подмножество содержит все спрямляемые кривые. См. упражнения 2.1.4 и 2.1.5.

2.4. Характеризация внутренних метрик

Мы назвали метрику внутренней, если ее можно получить с помощью определенной конструкции. В этом параграфе мы обсудим свойства, которые отличают внутренние метрики от всех остальных, и критерии, по которым можно судить, является данная метрика внутренней или нет.

Хотя мы допускаем метрики с бесконечными расстояниями, многие утверждения в этом и в последующих параграфах имеют место только для конечных метрик. Далее это условие подразумевается всюду. Мы оставляем читателю самостоятельно внести уточнения, необходимые в случае метрик с бесконечными расстояниями.

2.4.1. Другое определение внутренней метрики. Второе утверждение предложения 2.3.12 дает “конструктивный” критерий для ответа на вопрос: может ли данная метрика быть индуцирована функционалом длины. А именно, метрика является внутренней тогда и только тогда,

¹Операция f называется идемпотентной, если $f \circ f = f$.

когда она совпадает с индуцированной ею метрикой. Следующее предложение обобщает это утверждение на произвольные внутренние метрики.

Предложение 2.4.1. Пусть (X, d) — пространство с внутренней метрикой, а \hat{d} — внутренняя метрика, индуцированная метрикой d . Тогда $\hat{d} = d$.

Доказательство. Пусть метрика d индуцирована функционалом длины L , а L_d — функционал длины, индуцированный метрикой d . Заметим, что $L_d(\gamma) \leq L(\gamma)$ для любой допустимой кривой γ конечной длины (повторите соответствующие рассуждения из доказательства предложения 2.3.12). Очевидно, меньшая длина определяет меньшую метрику; таким образом, $\hat{d} \leq d$. С другой стороны мы уже знаем, что $\hat{d} \geq d$; следовательно $\hat{d} = d$. \square

Заметим, что равенство $\hat{d} = d$ автоматически влечет то, что метрика d — внутренняя, просто в силу того, что метрика \hat{d} — внутренняя. Следовательно, это равенство можно рассматривать как альтернативное определение внутренней метрики. Другими словами, (X, d) является пространством с внутренней метрикой тогда и только тогда, когда для любых точек $x, y \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кривая γ , соединяющая x and y , что $L_d(\gamma) < d(x, y) + \varepsilon$.

Если мы рассматриваем внутреннюю метрику d и нам неважно, из какого именно функционала длины она произошла, то на основании предложения 2.4.1 мы можем считать, что это была именно длина, индуцированная самой метрикой d и, следовательно, можем пользоваться всеми свойствами индуцированного метрикой функционала длины, установленными в предыдущих параграфах.

2.4.2. Восстановление функционала длины. Теперь мы подошли к ответу на еще один естественный вопрос, а именно: если задано пространство (X, d) с внутренней метрикой, то можно ли (и как) восстановить исходный функционал длины. На самом деле восстановление невозможно без дополнительных предположений, поскольку одна и та же внутренняя метрика как правило может быть получена из многих различных функционалов длины.

Упражнение 2.4.2. Приведите пример функционала длины на плоскости, для которого все непрерывные кривые допустимы, полученная внутренняя метрика является стандартной евклидовой, но длины некоторых кривых отличаются от их евклидовых длин.

Предложение 2.4.1 выдвигает естественного кандидата на роль искомого функционала длины. А именно, длина L_d , индуцированная метрикой d ,

порождает снова исходную метрику. Поэтому мы переформулируем наш вопрос так: при каких предположениях $L = L_d$? Такой вопрос важен еще и потому, что во многих примерах исходное понятие длины имеет специфические свойства, которые могут быть полезны. Например, определение финслеровой длины как интеграла “скорости” (см. пример в параграфе 2.2) гораздо удобнее для вычисления настоящих длин, чем общее определение индуцированной длины, примененное к полученной финслеровой метрике. Если известно, что эти две длины совпадают, можно комбинировать специфические свойства исходного функционала L с общими свойствами длин, индуцированных метриками.

Конечно, два функционала длины могут быть различными просто потому, что они заданы на разных классах допустимых путей. Поэтому мы будем заботиться только об их значениях на путях, допустимых для L . Заметим, что помимо всех свойств длин, вытекающих из определения, L_d обладает дополнительным свойством полунепрерывности снизу (см. предложение 2.3.4). В действительности именно полунепрерывность снизу оказывается здесь ключевым свойством.

Теорема 2.4.3. *Полунепрерывный снизу функционал длины L совпадает на всех кривых, допустимых для L , с функционалом длины, индуцированным внутренней метрикой $d = d_L$, то есть $L(\gamma) = L_d(\gamma)$.*

Как обычно, полунепрерывность означает, что поточечная сходимость последовательности путей $\gamma_i(t)$ к $\gamma(t)$ влечет неравенство $\liminf L(\gamma_i) \geq L(\gamma)$.

Доказательство. Неравенство $L_d(\gamma) \leq L(\gamma)$ имеет место для любых функционалов длины — см. предложения 2.3.12 и 2.4.1. Докажем обратное неравенство. По свойству 2 функционалов длины, функция $L(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ равномерно непрерывна на промежутке $[a, b]$ для каждой спрямляемой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} = b$, что $d_L(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon$ для любого натурального числа i между 0 и k . Согласно определению d_L , для любого $i = 0, 1, \dots, k$ существует такая кривая $\sigma_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow X$ с концами $\sigma_i(t_i) = \gamma(t_i)$, $\sigma_i(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1})$, что $L(\sigma_i) \leq d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon/k$. Для произведения h_ε кривых σ_i мы имеем

$$L(h_\varepsilon) = \sum_{i=0}^k L(\sigma_i) \leq \sum_{i=0}^k d_L(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon \leq L_d(\gamma) + \varepsilon.$$

Из неравенства треугольника следует, что $d(\gamma(t), h_\varepsilon(t)) \leq 3\varepsilon$ для любого $t \in [a, b]$. Отсюда мы заключаем, что $h_\varepsilon(t) \rightarrow \gamma(t)$, поскольку топология, определяемая метрикой d , сильнее исходной. Теперь из полунепрерывности

L следует

$$L(\gamma) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L(h_\varepsilon) \leq L_d(\gamma),$$

что и доказывает теорему. \square

Пример 2.4.4. Вернемся к примеру "Финслерова длина" из параграфа 2.2. Там мы выбрали функцию f двух векторных переменных и определили длину пути γ формулой

$$L(\gamma) = \int_a^b f((\gamma(t)), \gamma'(t)) dt.$$

Возьмем функцию f , не зависящую от первого аргумента и такую, что $f(x, (1, 0)) = f(x, (0, 1)) = 1/10$ и $f(x, (1, 1)) = 1$. (Независимость f от первого аргумента интуитивно означает, что стоимость нашего путешествия зависит только от выбранного направления и не зависит от нашего местоположения). Эта финслерова длина не является полунепрерывной снизу. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим последовательность (ступенчатых) ломаных, звенья которых параллельны координатным осям, сходящуюся к отрезку $[(0, 0), (1, 1)]$. Финслерова длина этого отрезка равна $\sqrt{2}$, в то время как финслерова длина каждой ломаной равна $1/5$. Причина такого явления в том, что мы сделали движение в диагональном направлении "слишком дорогим" по сравнению с координатными направлениями.

Упражнение 2.4.5. Покажите, что финслеров функционал длины, построенный с помощью функции $f(x, v) = F(v)$, полунепрерывен снизу тогда и только тогда, когда $F(v)$ удовлетворяет требованию полуаддитивности из определения 1.2.11 нормы: $F(v + w) \leq F(v) + F(w)$. Покажите, что это также справедливо для произвольной функции $f(x, v)$: полунепрерывность соответствующего функционала длины эквивалентна предположению, что f удовлетворяет неравенству $f(x, v + w) \leq f(x, v) + f(x, w)$. Именно поэтому в определении финслеровой структуры обычно требуют, чтобы функция $f(x, \cdot)$ была *нормой* для каждого x .

Упражнение 2.4.6. Пусть d — финслерова метрика (то есть метрика, индуцированная финслеровым функционалом длины) в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что топология, индуцированная метрикой d , совпадает со стандартной евклидовой топологией.

2.4.3. Существование середин.

Определение 2.4.7. Точка $z \in X$ называется *серединой* между точками x, y в метрическом пространстве (X, d) , если

$$d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{2} d(x, y).$$

Следующая простая лемма дает необходимое условие для того, чтобы метрика была строго внутренней (при некотором дополнительном ограничении это условие оказывается и достаточным).

Лемма 2.4.8. *Если d — строго внутренняя метрика, то для любых двух точек x, y существует середина z .*

Доказательство. Длина кратчайшей $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ между x и y равна $L(\gamma) = d(x, y)$. Обозначим $L(t) = L(\gamma|_{[a, t]})$. Так как функция $L(t)$ непрерывна по t и $L(0) = 0$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что $L(c) = \frac{1}{2}L(b)$. Теперь, выбирая $z = \gamma(c)$ и используя тот факт, что длина пути не меньше, чем расстояние между его концами, мы немедленно получаем $d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y)$. \square

Другими словами, эта лемма утверждает, что если d — строго внутренняя метрика, то (замкнутые) шары $\overline{B}_{d(x,y)/2}(x)$ и $\overline{B}_{d(x,y)/2}(y)$ имеют непустое пересечение.

Упражнение 2.4.9. Покажите, что, если метрика d — строго внутренняя и $r_1 + r_2 = d(x, y)$, то шары $\overline{B}_{r_1}(x)$ и $\overline{B}_{r_2}(y)$ имеют непустое пересечение.

Для внутренних метрик справедлива аналогичная лемма.

Лемма 2.4.10. *Если метрика d — внутренняя, то для любого положительного ε и любых двух точек $x, y \in X$ существует ε -середина, то есть такая точка z , что $|2d(x, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$ и $|2d(y, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$. Другими словами, если $2r > d(x, y)$, то шары $B_r(x)$ и $B_r(y)$ имеют непустое пересечение.*

Доказательство. Для пути γ , соединяющего x и y и такого, что $L(\gamma) - d(x, y) \leq \varepsilon$, повторим те же самые рассуждения, что и при доказательстве предыдущей леммы. \square

Упражнение 2.4.11. Пусть метрика d — внутренняя. Докажите, что если $r_1 + r_2 > d(x, y)$, то шары $B_{r_1}(x)$ и $B_{r_2}(y)$ имеют непустое пересечение.

Следующее утверждение мы оставим читателю в качестве упражнения. В некотором смысле оно позволяет измерять расстояние с помощью (достаточно частой) пунктирной линии между двумя точками вместо того, чтобы измерять его, соединяя точки путями. (Сравните также с определением 2.3.1).

Следствие 2.4.12. *Для любого положительного ε и любых двух точек x, y в пространстве X со строго внутренней метрикой d существует такая конечная последовательность точек $x_1 = x, x_2, \dots, x_k = y$, что каждые две соседние точки этой последовательности ε -близки (то есть $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, k-1$) и $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) = d(x, y)$.*

Для внутренних метрик последняя формула этого следствия должна быть заменена на следующую: $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) - d(x, y) \leq \varepsilon$.

Упражнение 2.4.13. Для пространства (X, d) с внутренней метрикой, любых двух точек $x, y \in X$ и числа $r < d(x, y)$ справедливо равенство $\text{dist}(y, B_r(x)) = d(x, y) - r$. Докажите это.

Упражнение 2.4.14. Пусть X, Y — метрические пространства, причем метрика пространства X — внутренняя, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — локально липшицево отображение с константой Липшица C . Докажите, что f липшицево с той же константой.

Упражнение 2.4.15. Пусть A — связное открытое подмножество пространства X с внутренней метрикой d . Тогда d индуцирует на A (конечную) внутреннюю метрику d_A . Более того, каждая точка $p \in A$ имеет такую окрестность $U \subset A$, что для любых точек $p, q \in U$ мы имеем $d(p, q) = d_A(p, q)$.

2.4.4. Полные внутренние метрики. Во многих случаях обратное лемме 2.4.8 утверждение также верно: из существования середин (соответственно, ε -середин) в полном метрическом пространстве следует, что метрика является строго внутренней (соответственно, внутренней). Таким образом, мы имеем критерий того, что полное метрическое пространство является пространством с внутренней метрикой.

Теорема 2.4.16. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство.

1. Если для каждой пары точек $x, y \in X$ существует середина, то метрика d — строго внутренняя.
2. Если для каждой пары точек $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε -середина, то метрика d — внутренняя.

Из этой теоремы немедленно вытекает следствие, которое дает удобный критерий внутренней метрики.

Следствие 2.4.17. Метрика полного пространства (X, d) является внутренней тогда и только тогда, когда для любого положительного ε и любых двух точек $x, y \in X$ существует такая конечная последовательность точек $x_1 = x, x_2, \dots, x_k = y$, что любые две соседние точки в этой последовательности ε -близки (то есть, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, k-1$) и $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) < d(x, y) + \varepsilon$.

Это следствие утверждает, что метрика является внутренней тогда и только тогда, когда для любых двух точек и любого положительного ε можно попасть из одной из этих точек в другую при помощи серии прыжков, каждый из которых короче ε , и при этом суммарная длина этих прыжков не превосходит расстояния между точками плюс ε .

Доказательство теоремы 2.4.16. Чтобы доказать, что метрика является внутренней, мы должны показать, что для любых двух точек x и y существуют такие пути, соединяющие x и y , что их длины приближают расстояние $d(x, y)$ с любой заранее заданной точностью. В случае строго внутренней метрики мы должны доказать, что существует путь, длина которого в точности равна $d(x, y)$. Проведем рассуждение для строго внутренних метрик; модифицировать это рассуждение для второго случая оставляется читателю в качестве упражнения.

Мы построим такой путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ между x и y , что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ и $L(\gamma) = d(x, y)$. Для этого сначала мы зададим значения γ во всех двоично рациональных точках (то есть, в точках вида $k/2^m$ для натуральных k, m). Затем мы продолжим это частично определенное отображение по непрерывности; только этот шаг доказательства использует полноту пространства (X, d) .

Путь с нужными свойствами должен проходить через середину между x и y . Поскольку такая точка существует по условию теоремы, выберем ее в качестве $\gamma(1/2)$. Теперь поместим $\gamma(1/4)$ в середину между $x = \gamma(0)$ и $\gamma(1/2)$, а $\gamma(3/4)$ — в середину между $\gamma(1/2)$ и $y = \gamma(1)$. Продолжая этот процесс, мы определим γ для всех двоично рациональных точек из $[0, 1]$.

Из построения следует, что для любых двух двоично рациональных точек t и t' выполняется неравенство

$$(2.1) \quad d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq |t - t'| \cdot d(x, y).$$

Из этого неравенства следует, что отображение γ , определенное на множестве двоично рациональных точек, является липшицевым. Так как X — полное пространство и множество двоично рациональных точек плотно в промежутке $[0, 1]$, то это отображение может быть продолжено на весь промежуток $[0, 1]$ (см. предложение 1.5.9). Таким образом, мы получили путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, соединяющий точки x и y . Теперь из (2.1) следует, что $L(\gamma) = d(x, y)$. \square

В следующих упражнениях читатель может увидеть, как работают эти результаты.

Упражнение 2.4.18. Докажите, что пополнение пространства с внутренней метрикой является снова пространством с внутренней метрикой.

Упражнение 2.4.19. Пусть X — компактное топологическое пространство и $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность внутренних метрик на X , равномерно сходящаяся к метрике d (напомним, что метрики являются функциями на $X \times X$, так что понятие равномерной сходимости здесь применимо). Докажите, что метрика d также внутренняя.

2.5. Кратчайшие

2.5.1. Кривые и натуральные параметризации. Важно помнить, что, говоря о путях, мы имеем в виду отображения, а не образы. В самом деле, образ непрерывного пути может даже заполнять диск; два пути, идущие по окружности и обходящие ее различное число раз, существенно различны и, в частности, имеют разные длины. Тем не менее, после замены параметра с помощью строго возрастающего отображения путь по-прежнему обходит тот же самый набор точек, причем в том же порядке; другими словами, мы путешествуем по той же “дороге” в том же самом направлении. Естественно ожидать, что такое изменение параметризации не меняет геометрических свойств.

Это наблюдение подсказывает идею рассматривать кривую как класс эквивалентных путей при следующем определении эквивалентности: пути $\gamma_1: I_1 \rightarrow X$ и $\gamma_2: I_2 \rightarrow X$ эквивалентны, если существует такое строго возрастающее непрерывное отображение φ из I_1 на I_2 , что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. (Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности.) Однако для наших целей такое определение слишком ограничительно. Если путь постоянен на некоторой части промежутка (то есть движение замирает в точке на некоторое время), то же самое происходит с любым путем, полученным из этого с помощью замены параметра. Мы хотим, чтобы такой путь был эквивалентен любому пути, который проходит по тем же точкам и в том же порядке, но не делает остановок. Чтобы добиться этого, мы допустим нестрогие монотонные замены переменной. Это формализуется следующим образом.

Определение 2.5.1. Непараметризованная кривая или просто *кривая* есть класс эквивалентности при условии, что рассматривается минимальное отношение эквивалентности, удовлетворяющее условию: пути $\gamma_1: I_1 \rightarrow X$ и $\gamma_2: I_2 \rightarrow X$ эквивалентны всякий раз, когда существует такое неубывающее непрерывное отображение φ интервала I_1 на I_2 , что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Пути (представители классов эквивалентности) тоже называются *параметризациями* кривой, а по отношению друг к другу — *перепараметризациями*.

Термин “кривая” используется как для непараметризованных кривых, так и для их параметризаций (то есть путей). В большинстве случаев слово “кривая” формально означает то же, что “путь”. Однако первое более приемлемо, когда речь идет о свойствах, не зависящих от выбора параметризации.

Замечание 2.5.2. Нестрогие монотонные замены параметра сами по себе не дают отношения эквивалентности (из-за отсутствия обратной замены). Именно поэтому мы рассматриваем отношение эквивалентности,

порожденное этим отношением. Другими словами, два пути γ и $\tilde{\gamma}$ эквивалентны (представляют одну и ту же кривую) тогда и только тогда, когда существует такая конечная последовательность путей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, что $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_n = \tilde{\gamma}$ и для каждого $i = 1, \dots, n-1$ либо γ_i получается из γ_{i+1} , либо γ_{i+1} получается из γ_i при помощи неубывающей замены параметра. Это описание можно упростить с помощью следующего упражнения.

Упражнение 2.5.3. Назовем путь $\gamma: I \rightarrow X$ *безостановочным*, если не существует такого промежутка $[a, b] \subset I$, что $a \neq b$ и сужение пути γ на $[a, b]$ является постоянным отображением. Докажите, что:

(а) Каждая кривая допускает безостановочную параметризацию.

Подсказка. Рассуждая формально, для пути $\gamma: I \rightarrow X$ рассмотрите отношение эквивалентности \sim на I : $y \sim y'$ тогда и только тогда, когда путь γ постоянен на $[y, y']$. Покажите, что факторпространство $J = I / \sim$ гомеоморфно некоторому интервалу. Затем заметьте, что существует единственное отображение $\tilde{\gamma}: J \rightarrow X$ такое, что $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \pi$, где π — каноническая проекция I на J и путь $\tilde{\gamma}$ является безостановочным и непрерывным. (Грубо говоря, J получается из I выбрасыванием всех интервалов, где путь постоянен, и склеиванием концов полученных дырок.)

(б) Два пути $\gamma_1: I_1 \rightarrow X$ и $\gamma_2: I_2 \rightarrow X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такой путь $\gamma: J \rightarrow X$ и такие замены переменной $\varphi_1: I_1 \rightarrow J$ и $\varphi_2: I_2 \rightarrow J$, что $\gamma_i = \gamma \circ \varphi_i$.

Подсказка. Возьмите в качестве γ безостановочную параметризацию.

(с) Два пути $\gamma_1: I_1 \rightarrow X$ и $\gamma_2: I_2 \rightarrow X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует промежуток J и замены параметра $\varphi_i: J \rightarrow I_i$ ($i = 1, 2$) такие, что $\gamma_1 \circ \varphi_1 = \gamma_2 \circ \varphi_2$.

Легко видеть, что все параметризации кривой имеют одинаковые длины (проверьте это). Мы будем обозначать кривую и ее параметризацию одной и той же буквой.

Определение 2.5.4. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ называется *простой*, если прообразом любой точки является интервал.

Это означает, что на простой кривой возможна остановка в точке на некоторое время, но покинув эту точку, мы никогда не возвращаемся в нее назад. Грубо говоря, образ простого пути — это “кривая без самопересечений”. Следующее очень простое упражнение подтверждает корректность этого определения.

Упражнение 2.5.5. Если какая-либо параметризация кривой является простой, то таковы же и все другие ее параметризации.

Упражнение 2.5.6. Если две простые кривые имеют один и тот же образ, то они эквивалентны с точностью до перепараметризации $t \mapsto -t$.

Наша следующая цель — выбрать самую удобную параметризацию для каждой кривой. Такие параметризации аналогичны движению с единичной скоростью в механике или дифференциальной геометрии.

Определение 2.5.7. Параметризация $\gamma: I \rightarrow X$ называется *натуральной*, если $L(\gamma, t, t') = t - t'$ для всех $t, t' \in I$.

Замечание 2.5.8. Чтобы проверить, что параметризация γ является натуральной, достаточно убедиться, что $L(\gamma, a, t) = t - a$ для фиксированного a и всех t . Это вытекает из формулы: $L(\gamma, t, t') = L(\gamma, a, t') - L(\gamma, a, t)$.

Поэтому другое название для натуральной параметризации — *параметризация длиной дуги*. Другими словами, параметризация $\gamma(t)$ является натуральной, если

$$\frac{d}{dt}L(\gamma, a, t) = 1.$$

Ее можно назвать параметризацией с единичной скоростью. Более общо, мы говорим о параметризации γ с *постоянной скоростью* v , если $L(\gamma, t, t') = v(t - t')$ для всех значений t, t' .

Следующее предложение утверждает, что каждая кривая допускает натуральную параметризацию.

Предложение 2.5.9. Каждая спрямляемая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ может быть представлена в виде $\gamma = \bar{\gamma} \circ \varphi$, где $\bar{\gamma}: [0, L(\gamma)] \rightarrow X$ — натуральная параметризация и φ — неубывающее непрерывное отображение промежутка $[a, b]$ на промежуток $[0, L(\gamma)]$.

Доказательство. Идея построения φ тривиальна: пусть $\bar{\gamma}(\tau)$ — такая точка на (образе) γ , что длина участка кривой γ между ее началом и этой точкой равна τ . Это формализуется следующим образом. Положим $\varphi(t) = L(\gamma, a, t)$ для всех $t \in [a, b]$. Тогда функция φ будет неубывающей и непрерывной (по непрерывности длины). Множество ее значений — промежуток $[0, L(\gamma)]$. Теперь для каждого значения $\tau \in [0, L(\gamma)]$ выберем $t \in [a, b]$ так, чтобы $\varphi(t) = \tau$ и положим $\bar{\gamma}(\tau) = \gamma(t)$. Точка $\bar{\gamma}(\tau)$ не зависит от выбора t . Действительно, если $\varphi(t) = \varphi(t')$, то $\gamma(t) = \gamma(t')$, так как $L(\gamma, t, t') = \varphi(t') - \varphi(t) = 0$.

Таким образом, мы определили отображение $\bar{\gamma}: [0, L(\gamma)] \rightarrow X$. Равенство $\gamma = \bar{\gamma} \circ \varphi$ немедленно следует из определения. Остается проверить, что отображение $\bar{\gamma}$ действительно путь (то есть непрерывно) и притом — параметризованный длиной дуги. Чтобы доказать первое, положим $\tau_1 = \varphi(t_1)$, $\tau_2 = \varphi(t_2)$. Тогда $\bar{\gamma}(\tau_1)$ и $\bar{\gamma}(\tau_2)$ — концы пути $\gamma|_{[t_1, t_2]}$. Длина этого пути равна $L(\gamma, t_1, t_2) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \tau_2 - \tau_1$.

Так как расстояние между концами пути не больше, чем его длина, мы получаем $d(\bar{\gamma}(\tau_1), \bar{\gamma}(\tau_2)) \leq |\tau_1 - \tau_2|$. Это означает, что $\bar{\gamma}$ является нерастягивающим и, следовательно, непрерывным отображением. Более того, $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ является перепараметризацией пути $\bar{\gamma}|_{[\tau_1, \tau_2]}$ и, следовательно, $L(\bar{\gamma}, \tau_1, \tau_2) = L(\gamma, t_1, t_2) = \tau_2 - \tau_1$. Таким образом, $\bar{\gamma}$ представляет собой натуральную параметризацию. \square

Упражнение 2.5.10. Докажите, что натуральная параметризация кривой единственна с точностью до сдвига $[a, b] \rightarrow [a + c, b + c]: t \mapsto t + c$.

Упражнение 2.5.11. Для любого числа $v > 0$ любая спрямляемая кривая допускает параметризацию с постоянной скоростью v .

Следующее упражнение является (тривиальным) следствием предложения 2.5.9.

Упражнение 2.5.12. Если пространство с внутренней метрикой гомеоморфно отрезку, то оно изометрично отрезку.

Это следствие обнаруживает замечательный факт: одномерная внутренняя геометрия тривиальна, так как внутренние метрики на прямой локально неразличимы! Мы увидим, что уже двумерные поверхности совершенно отличны в этом отношении. Между прочим, хотя внутренняя метрика на \mathbb{R} по существу единственна, на \mathbb{R} существует множество различных метрик, которые не являются внутренними. Например, рассмотрим метрику $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ (можно получить много разных, заменяя квадратный корень другими вогнутыми функциями). Внутренняя метрика, индуцированная этой метрикой, всюду бесконечна.

2.5.2. Существование кратчайших. Цель этого параграфа — доказать, что полная локально компактная внутренняя метрика является строго внутренней, то есть между любыми двумя точками есть кратчайший путь.

Начнем с определения равномерной сходимости кривых.

Определение 2.5.13. Последовательность кривых равномерно сходится к кривой γ , если эти кривые допускают параметризации (с общей областью задания), которые равномерно сходятся к некоторой параметризации кривой γ .

Следующая теорема показывает, что пространство кривых равномерно ограниченной длины, лежащих в компактном пространстве, компактно относительно равномерной сходимости. Это — вариант теоремы Арцела–Асколи о компактности из функционального анализа.

Теорема 2.5.14 (Теорема Арцела–Асколи). *В компактном метрическом пространстве любая последовательность кривых, длины которых равномерно ограничены, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Для каждой кривой γ_i существует единственная параметризация с постоянной скоростью, заданная на единичном интервале $[0, 1]$. Равномерная ограниченность длин кривых γ_i означает, что скорости таких параметризаций равномерно ограничены. В свою очередь из этого следует, что для некоторого $C < \infty$

$$(2.2) \quad d(\gamma_i(t), \gamma_i(t')) \leq L(\gamma, t, t') \leq C|t - t'|$$

для любого натурального i и всех $t, t' \in [0, 1]$.

Пусть $S = \{t_j\}$ — счетное всюду плотное подмножество промежутка $[0, 1]$. Используя диагональный процесс Кантора, можно найти такую подпоследовательность $\{\gamma_{n_i}\}$ исходной последовательности, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\gamma_{n_i}(t_j)\}$ сходится. Мы покажем, что сама подпоследовательность $\{\gamma_{n_i}\}$ сходится; чтобы упростить обозначения, мы будем считать (это не ограничивает общности), что эта подпоследовательность — сама последовательность $\{\gamma_i\}$, то есть что для любого t_j существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(t_j)$.

Чтобы доказать, что для любого $t \in [0, 1]$ последовательность $\{\gamma_i(t)\}$ сходится, покажем, что она является последовательностью Коши.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $t_j \in S$, что $|t - t_j| < \varepsilon/C$, а затем — такое $N \in \mathbb{N}$, что $d(\gamma_i(t_j), \gamma_k(t_j)) < \varepsilon$ для всех $i, k > N$. Тогда

$$d(\gamma_i(t), \gamma_k(t)) \leq d(\gamma_i(t), \gamma_i(t_j)) + d(\gamma_i(t_j), \gamma_k(t_j)) + d(\gamma_k(t_j), \gamma_k(t)) \leq 3\varepsilon.$$

Это доказывает, что $\{\gamma_i(t)\}$ является последовательностью Коши, таким образом, мы можем положить $\gamma(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j(t_i)$.

Переходя к пределу в (2.2), получаем

$$(2.3) \quad d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq C|t - t'|,$$

следовательно, γ — непрерывное отображение.

Покажем, что последовательность $\{\gamma_i\}$ сходится к γ равномерно. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное $N > \frac{4C}{\varepsilon}$ и выберем M таким, что $d(\gamma(k/N), \gamma_i(k/N)) < \varepsilon/2$ для всех $k = 0, 1, \dots, N$ и всех $i > M$. Такой выбор возможен, поскольку последовательность $\{\gamma_i\}$ сходится к γ поточечно. Комбинируя (2.2) с (2.3), мы получаем, что, для любого $0 \leq t \leq 1$ и $k/N \leq t \leq (k+1)/N$, справедливы неравенства

$$d(\gamma(t), \gamma_i(t)) \leq C|t - k/N| + \varepsilon/2 + C|t - k/N| \leq \varepsilon$$

для всех $i > M$. Это завершает доказательство. \square

Несмотря на то, что мы уже говорили о кратчайших путях, это ключевое понятие заслуживает формального определения.

Определение 2.5.15. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ называется *кратчайшей*, если ее длина минимальна среди всех кривых с теми же концами; другими словами, $L(\gamma_1) \geq L(\gamma)$ для любой кривой γ_1 , соединяющей $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Легко убедиться, что любой участок кратчайшей тоже является кратчайшей (проверьте это).

Замечание 2.5.16. Для пространства с внутренней метрикой предыдущее определение можно переформулировать так: кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ является кратчайшей тогда и только тогда, когда ее длина равна расстоянию между ее концами: $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Кратчайшие в пространствах с внутренними метриками обладают рядом приятных свойств, которые не выполняются для метрических пространств общего вида. Вот одно из таких свойств.

Предложение 2.5.17. Если последовательность кратчайших γ_i в пространстве (X, d) с внутренней метрикой сходится при $i \rightarrow \infty$ к кривой γ , то γ — тоже кратчайшая.

Доказательство. Так как концы кривых γ_i сходятся к концам γ и длина каждой из кривых γ_i равна расстоянию между ее концами, то мы заключаем, что $L(\gamma_i) \rightarrow d(x, y)$, где x, y — концы кривой γ . В силу полунепрерывности длины снизу

$$L(\gamma) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} L(\gamma_i) = d(x, y).$$

□

Упражнение 2.5.18. Приведите пример, показывающий, что предел кратчайших в метрическом пространстве не обязательно является кратчайшей.

Пример пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ показывает, что кратчайшей между двумя точками может и не быть. С другой стороны, может существовать несколько различных кратчайших между двумя данными точками: например, диаметрально противоположные точки сферы соединимы континуумом кратчайших.

Соглашение. Мы используем обозначение $[x, y]$ для кратчайшей между точками x и y . Это удобно в случаях, когда либо такая кратчайшая единственна, либо неважно, какая из кратчайших рассматривается. Это обозначение согласуется с нашим обозначением отрезков в евклидовом пространстве, так как они являются кратчайшими относительно евклидовой метрики.

Предложение 2.5.19. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, и пусть точки $x, y \in X$ соединимы хотя бы одной спрямляемой кривой. Тогда существует кратчайшая между x и y .

Доказательство. Обозначим через L_{\inf} инфимум длин спрямляемых кривых, соединяющих x и y . Тогда существует последовательность кривых $\{\gamma_i\}$ со свойством $L(\gamma_i) \rightarrow L_{\inf}$. По теореме 2.5.14 последовательность $\{\gamma_i\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, мы можем считать, что сама последовательность $\{\gamma_i\}$ сходится к кривой γ . Тогда γ имеет те же самые концы и, в силу полунепрерывности длины снизу, $L(\gamma) \leq \lim L(\gamma_i) = L_{\inf}$. Таким образом, $L(\gamma) = L_{\inf}$. \square

Следствие 2.5.20. Пусть метрическое пространство (X, d) ограничено компактно. Тогда, если точки $x, y \in X$ можно соединить спрямляемой кривой, то существует кратчайшая между x и y .

Доказательство. Пусть L — длина какой-нибудь спрямляемой кривой, соединяющей x и y . Заметим, что эта кривая, так же как и любая более короткая кривая с теми же концами, содержится в замкнутом метрическом шаре радиуса L с центром в точке x , так что достаточно доказать существование кратчайшей только в этом шаре. Так как замкнутый шар компактен, утверждение следует из предыдущего предложения. \square

Определение 2.5.21. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если любая точка пространства X имеет предкомпактную окрестность.

Предложение 2.5.22. В полном локально компактном пространстве (X, d) с внутренней метрикой каждый замкнутый шар в X компактен (и, следовательно, пространство X ограничено компактно).

Отметим, что в этом предложении существенно, что метрика является внутренней. Например, пространство, в котором все расстояния между точками равны 1, локально компактно и полно, но замкнутый единичный шар в таком пространстве не компактен, если только пространство не конечно.

Доказательство предложения 2.5.22. Выберем произвольную точку $x \in X$. Заметим, что если замкнутый шар $\bar{B}_r(x)$ компактен для некоторого r , то шар $\bar{B}_\rho(x)$ компактен для любого $\rho < r$. Положим

$$R = \sup\{r > 0: \text{ шар } \bar{B}_r(x) \text{ компактен}\}.$$

Так как точка x имеет предкомпактную окрестность, то $R > 0$. Предположим, что $R < \infty$ и обозначим шар $\bar{B}_R(x)$ через B .

Сначала докажем, что шар B компактен. Так как B — замкнутое множество в полном пространстве, то достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ шар B содержит конечную ε -сеть. Можно предположить, что $\varepsilon < R$. Пусть B' означает замкнутый шар $\bar{B}_{R-\varepsilon/3}(x)$. Этот шар

компактен и, следовательно, содержит конечную $(\varepsilon/3)$ -сеть S . Пусть $y \in B$. Так как X — пространство с внутренней метрикой, мы имеем $\text{dist}(y, B') \leq \varepsilon/3$. Поэтому существует точка $y' \in B'$, для которой $d(y, y') < \varepsilon/2$. С другой стороны, $\text{dist}(y', S) \leq \varepsilon/2$, следовательно $\text{dist}(y, S) < \varepsilon$. Это означает, что S является ε -сетью для шара B , и таким образом мы доказали компактность B .

Каждая точка $y \in B$ имеет предкомпактную окрестность U_y . Выберем конечный набор таких окрестностей $\{U_y\}_{y \in Y}$, покрывающий B . Объединение $U = \bigcup_{y \in Y} U_y$ является предкомпактной окрестностью B . Еще раз используя компактность B , мы можем заключить, что существует такое положительное $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность B содержится в U . Поскольку X — пространство с внутренней метрикой, ε -окрестность шара B представляет собой шар $B_{R+\varepsilon}(x)$ с замыканием $\bar{B}_{R+\varepsilon}(x)$. Поэтому шар $\bar{B}_{R+\varepsilon}(x)$ компактен. Это противоречит выбору R .

Таким образом, предположение, что $R < \infty$, ложно. Следовательно $R = \infty$. Это означает, что все шары с центром в x компактны. \square

Комбинируя предложение 2.5.22 с предыдущим следствием, 2.5.20, мы получаем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.5.23. Пусть (X, d) — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Тогда его метрика — строго внутренняя. Иначе говоря, для каждой пары точек $x, y \in X$ таких, что $d(x, y) < \infty$, существует кратчайшая γ , соединяющая x и y , то есть такая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, что $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ и $L(\gamma) = d(x, y)$.

Пример $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ показывает, что требование полноты в этой теореме существенно. Это относится и к локальной компактности:

Упражнение 2.5.24. Приведите пример полного пространства с внутренней (конечной) метрикой, в котором не существует кратчайших между некоторыми точками.

Однако предположение о том, что метрика является внутренней, на самом деле можно убрать.

Упражнение 2.5.25. Пусть X — полное локально компактное метрическое пространство (не обязательно с внутренней метрикой). Докажите, что для любых двух точек $x, y \in X$, которые могут быть соединены спрямляемой кривой, существует кратчайшая между x и y .

Подсказка. Докажите, что для любого $R > 0$ множество точек, которые соединимы с x кривой с длиной меньше R , предкомпактно. Другими словами, шары индуцированной внутренней метрики являются предкомпактными в топологии исходной метрики (!). Чтобы доказать это, модифицируйте доказательство предложения 2.5.22.

Упражнение 2.5.26. Верно ли, что пополнение локально компактного пространства с внутренней метрикой локально компактно?

2.5.3. Геодезические и теорема Хопфа–Ринова.

Определение 2.5.27. Пусть X — пространство с внутренней метрикой. Кривая $\gamma: I \rightarrow X$ называется *геодезической*, если для любого $t \in I$ существует промежуток $J \in I$, содержащий окрестность точки t в I и такой, что кривая $\gamma|_J$ является кратчайшей. Другими словами, геодезическая — это кривая, которая локально реализует расстояние.

Пример сферы показывает, что существуют геодезические, которые не являются кратчайшими: несмотря на то, что любой участок дуги большого круга на сфере — геодезическая, он не является кратчайшей, если он длиннее половины экватора. Хотя пример сферы наводит на мысль, что кратчайшая между двумя точками должна быть единственной хотя бы локально, это тоже, вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим поверхность куба в \mathbb{R}^3 с внутренней метрикой, индуцированной метрикой окружающего пространства. Предлагаем читателю показать, что любая окрестность вершины содержит точки, которые можно соединить между собой двумя кратчайшими. Оказывается неверным и другое естественное предположение, что предел геодезических — геодезическая. Постройте контрпример к этому утверждению на поверхности куба. Позже мы увидим, что такие явления вызваны негладкостью поверхности, и такого никогда не случается в гладких примерах.

Ясно, что кратчайшая всегда допускает натуральную параметризацию и, следовательно, то же самое верно для геодезической.

Интуитивно, пространство не полно, если в нем не хватает какой-нибудь точки. Можно ожидать, что отсутствие точки можно выявить, двигаясь по геодезической, которая должна была бы закончиться в этой точке: интервал, на котором наше движение еще определено, оказывается незамкнутым. Следующая теорема представляет собой формализацию этого наблюдения.

Прежде чем сформулировать теорему, мы обобщим понятие кратчайшей так, чтобы включить в рассмотрение пути, определенные на незамкнутых интервалах. А именно, мы будем говорить, что кривая $\gamma: I \rightarrow X$ (где I — интервал в \mathbb{R} , а X — метрическое пространство) является кратчайшей, или *минимальной геодезической*, если ее сужение на любой замкнутый подинтервал $[a, b] \subset I$ является кратчайшей в смысле определения 2.5.15.

Теорема 2.5.28 (Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена). *Для локально компактного пространства X с внутренней метрикой следующие четыре утверждения эквивалентны:*

- (i) *Пространство X полно.*

- (ii) Пространство X ограничено компактно, то есть каждый замкнутый метрический шар в X компактен.
- (iii) Каждая геодезическая $\gamma: [0, a] \rightarrow X$ может быть продолжена до непрерывного пути $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow X$.
- (iv) Существует такая точка $p \in X$, что каждая кратчайшая $\gamma: [0, a] \rightarrow X$ с $\gamma(0) = p$ может быть продолжена до непрерывного пути $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow X$.

Эта теорема обобщает классическую теорему Хопфа-Ринова, которая первоначально была доказана только в гладком случае, то есть для римановых многообразий.

Замечание 2.5.29. По теореме 2.5.23, из условий (i)–(iv) следует, что любые две точки соединимы кратчайшей.

Доказательство теоремы. Импликации (ii) \implies (i) \implies (iii) \implies (iv) мы оставляем читателю в качестве простых упражнений. Докажем, что из (iv) следует (ii). Будем следовать той же общей схеме, что и при доказательстве предложения 2.5.22. Однако детали будут сложнее, поскольку здесь мы не можем пользоваться полнотой. Мы можем использовать только свойство (iv), а это потребует более тонких рассуждений.

Поскольку X локально компактно, достаточно малые замкнутые шары $\bar{B}_r(p)$ компактны. Рассуждая от противного (то есть предполагая, что существуют некомпактные замкнутые шары), положим

$$R = \sup\{r: \text{шар } \bar{B}_r(p) \text{ компактен}\}$$

и допустим, что $R < \infty$. Дальнейшие рассуждения проведем в два этапа.

1. Сначала мы докажем, что открытый шар $B_R(p)$ предкомпактен. Для этого достаточно показать, что любая последовательность $\{x_i\}$ точек этого шара содержит сходящуюся подпоследовательность (предел которой не обязательно принадлежит этому шару). Положим $r_i = d(p, x_i)$. Можно считать, что $r_i \rightarrow R$ при $i \rightarrow \infty$; в противном случае у $\{x_i\}$ есть подпоследовательность, содержащаяся в шаре $\bar{B}_r(p)$, где $r < R$, и тогда существует сходящаяся подпоследовательность, поскольку этот меньший шар компактен (по выбору R).

Пусть $\gamma_i: [0, r_i] \rightarrow X$ — (натурально параметризованная) кратчайшая, соединяющая p с x_i . Такая кратчайшая существует, так как x_i принадлежит компактному шару с центром в точке p (см. доказательство свойства 2.5.20). Из последовательности $\{\gamma_i\}$ можно выбрать подпоследовательность, в которой сужения путей на промежуток $[0, r_1]$ сходятся. Из этой подпоследовательности выберем следующую подпоследовательность путей, сужения которых на промежуток $[0, r_2]$ сходятся, и так далее. Затем

канторовский диагональный процесс (то есть выбор n -го элемента из n -ой подпоследовательности для $n = 1, 2, \dots$) дает такую последовательность $\{\gamma_{i_n}\}$, что для любого $t \in [0, R)$ последовательность $\{\gamma_{i_n}(t)\}$ сходится в пространстве X . (Более точно, точки $\gamma_{i_n}(t)$ определены для всех достаточно больших значений n и образуют сходящуюся последовательность.)

Положим $\gamma(t) = \lim \gamma_{i_n}(t)$; тогда $\gamma: [0, R) \rightarrow X$ является нерастягивающим отображением и кратчайшей (см. предложение 2.5.17). Согласно (iv), существует непрерывное продолжение $\bar{\gamma}: [0, R] \rightarrow X$. Легко видеть (упражнение!), что точки x_{i_n} (то есть концы наших сходящихся кривых $\{\gamma_{i_n}\}$) сходятся к $\bar{\gamma}(R)$.

2. Так как открытый шар $B_R(p)$ предкомпактен, замкнутый шар $\bar{B}_R(p)$ компактен. (Напомним, что в пространстве с внутренней метрикой замкнутый шар совпадает с замыканием соответствующего открытого шара.) Теперь покажем, что шар $B_{R+\varepsilon}(p)$ предкомпактен для некоторого $\varepsilon > 0$. Поскольку пространство X локально компактно, то для любого $x \in \bar{B}_R(p)$ существует такое $r(x) > 0$, что шар $B_{r(x)}(x)$ предкомпактен. Выберем конечное подпокрытие $\bar{B}_{r(x_i)}(x_i)$ из покрытия $\bar{B}_R(x)$ этими шарами. Объединение этих шаров предкомпактно и содержит шар $B_{R+\varepsilon}(p)$ при $\varepsilon = \min r_i > 0$. Это противоречит выбору R . \square

2.6. Длина и мера Хаусдорфа

Напомним, что длина кривой не зависит от параметризации. Этот факт наводит на мысль о том, что длина простой кривой может быть восстановлена по ее образу в пространстве, то есть по множеству точек, через которые она проходит. В этом параграфе мы покажем, что длина простой кривой в действительности равна одномерной мере Хаусдорфа μ_1 образа этого пути. Мы будем предполагать, что нормализующая константа $C(1)$ для меры Хаусдорфа равна 1 (определение и элементарные свойства меры Хаусдорфа можно найти в параграфе 1.7).

Лемма 2.6.1. *Если X — связное метрическое пространство, то $\mu_1(X) \geq \text{diam } X$.*

Доказательство. 1. Общее наблюдение: в определении меры Хаусдорфа мы можем ограничиться покрытиями *открытыми* множествами S_i . В самом деле, произвольное покрытие $\{S_i\}$ может быть заменено открытым покрытием $\{S'_i\}$, где

$$S'_i = U_{\delta/2^i}(S_i) := \{x \in X : \text{dist}(x, S_i) < \delta/2^i\}$$

для малого значения $\delta > 0$. Тогда $\text{diam } S'_i \leq \text{diam } S_i + 2\delta/2^i$ и, следовательно, $w_1(\{S'_i\}) \leq w_1(\{S_i\}) + 2\delta$. Так как число δ произвольно, отсюда следует, что меру можно приблизить 1-весами открытых покрытий (см. определение 1.7.7).

Упражнение. Обобщите это рассуждение так, чтобы оно работало для всех размерностей.

2. Пусть X — связное топологическое пространство и $\{S_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда для любых двух точек $x, y \in X$ существует конечная последовательность S_{i_1}, \dots, S_{i_n} таких множеств, что $x \in S_{i_1}$, $y \in S_{i_n}$ и $S_{i_k} \cap S_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ для всех $k, 1 \leq k \leq n-1$. Чтобы доказать это, фиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим множество Y всех точек $y \in X$, для которых такая последовательность существует. Ясно, что для любого множества S_i либо $S_i \subset Y$, либо $S_i \subset X \setminus Y$. Поэтому как Y , так и $X \setminus Y$ являются открытыми множествами. Поскольку множество X связно, то $Y = X$ и поэтому любая точка $y \in Y$ “достижима” с помощью описанной выше последовательности множеств.

3. Пусть последовательность $\{S_i\}$ представляет собой открытое покрытие X , x и y — две точки из пространства X , а S_{i_1}, \dots, S_{i_n} — последовательность из пункта 2. Для каждого $k = 1, \dots, n-1$ выберем точку $x_k \in S_{i_k} \cap S_{i_{k+1}}$ положив $x_0 = x, x_n = y$. Тогда $|x_{k-1}x_k| \leq \text{diam } S_{i_k}$ для всех $k = 1, \dots, n$, поскольку как x_{k-1} , так и x_k содержатся в S_{i_k} . Следовательно,

$$\sum \text{diam } S_i \geq \sum_{k=1}^n \text{diam } S_{i_k} \geq \sum_{k=1}^n |x_{k-1}x_k| \geq |x_0x_n| = |xy|.$$

Согласно замечанию, сделанному в первом пункте, мы заключаем, что $\mu_1(X) \geq |xy|$. Поскольку x и y — произвольные точки, это означает, что $\mu_1(X) \geq \text{diam } X$. \square

Теорема 2.6.2. Пусть X — метрическое пространство и $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — простая кривая. Тогда $L(\gamma) = \mu_1(\gamma([a, b]))$.

Доказательство. Пусть $S = \gamma([a, b])$ и $L = L(\gamma)$. Не теряя общности, мы можем предположить, что γ имеет натуральную параметризацию: $\gamma: [0, L] \rightarrow X$. Тогда для любого натурального числа N кривая S может быть покрыта N интервалами γ , каждый — длины L/N , то есть множествами $\gamma([i\frac{L}{N}, (i+1)\frac{L}{N}])$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Диаметры этих множеств не больше, чем L/N . Следовательно, сумма этих диаметров не больше, чем L , в то время как сами диаметры приближаются к 0, когда $N \rightarrow \infty$. Это показывает, что $\mu_1(S) \leq L(\gamma)$.

С другой стороны, для разбиения $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ промежутка $[a, b]$ положим $S_i = \gamma([t_i, t_{i+1}])$, где $i = 1, \dots, n-1$. За исключением конечного числа точек $\gamma(t_i)$, множества S_i попарно не пересекаются. Так как одномерная мера отдельной точки очевидно равна нулю, то $\mu_1(S) = \sum \mu_1(S_i)$. По лемме 2.6.1, $\mu_1(S_i) \geq \text{diam } S_i \geq |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$ и, следовательно,

$$\mu_1(S) = \sum \mu_1(S_i) \geq \sum |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$$

для любого разбиения $\{t_i\}$. Отсюда следует, что $\mu_1(S) \geq L(\gamma)$. \square

Замечание 2.6.3. Если γ не является простой кривой, те же рассуждения показывают, что $L(\gamma) \geq \mu_1(\gamma([a, b]))$.

Упражнение 2.6.4. Докажите, что для любой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow X$,

$$L(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} k \cdot \mu_1(\{x \in X : \#(\gamma^{-1}(x)) = k\})$$

где $\#$ обозначает мощность и $\infty \cdot 0 = 0$.

Подсказка. Правая часть этого равенства есть интеграл функции $x \mapsto \#(\gamma^{-1}(x))$ по мере μ_1 . Скомбинируйте теорему Леви о предельном переходе в интеграле и неравенства “ $\text{diam} \leq \mu_1 \leq L$ ” для малых участков кривой γ .

2.7. Длина и скорость липшицевых путей

Этот параграф носит в большой мере технический характер. Мы обобщим хорошо известную и тривиальную для гладких кривых в пространстве \mathbb{R}^n формулу “длина равна интегралу скорости” (cf. Exercise 2.3.3). Последняя теорема этого параграфа требует знания интеграла Лебега. Мы будем использовать без доказательства некоторые факты из теории меры.

Определение 2.7.1. Пусть $\gamma: I \rightarrow X$ — некоторая кривая в метрическом пространстве (X, d) . *Скорость* кривой γ в точке $t \in I$, обозначаемая через $v_\gamma(t)$, определяется равенством

$$v_\gamma(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t), \gamma(t + \varepsilon))}{|\varepsilon|},$$

если этот предел существует.

Упражнение 2.7.2. Пусть γ — дифференцируемая кривая в \mathbb{R}^n (или, более общо, в нормированном векторном пространстве). Докажите, что скорость $v_\gamma(t)$ существует для всех t , причем $v_\gamma(t) = |\gamma'(t)|$.

Упражнение 2.7.3. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — некоторая кривая в метрическом пространстве X . Предположим, что скорость $v_\gamma(t)$ существует для всех $t \in [a, b]$ и непрерывна по t . Докажите, что тогда

$$L(\gamma) = \int_a^b v_\gamma(t) dt$$

(сравните с упражнением 2.3.3).

Конечно, скорость может и не существовать. Однако для широкого класса кривых, именно, для любой липшицевой кривой, она существует почти всюду (то есть всюду, кроме множества меры нуль). Более того, длина липшицевой кривой равна интегралу (Лебега) от ее скорости.

(Заметим, что любая спрямляемая кривая допускает липшицеву параметризацию. Например, все натуральные параметризации являются липшицевыми с константой Липшица, равной единице).

В качестве первого шага докажем следующую теорему.

Теорема 2.7.4. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — спрямляемая кривая в метрическом пространстве (X, d) . Тогда для почти всех $t \in [a, b]$ (то есть для всех t , за исключением множества меры нуль) имеет место одно из двух соотношений: либо

$$\liminf_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0+} \frac{L(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon']})}{\varepsilon + \varepsilon'} = 0,$$

либо

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0+} \frac{d(\gamma(t - \varepsilon), \gamma(t + \varepsilon'))}{L(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon']})} = 1.$$

В этих формулах допускается, что или ε , или ε' равно нулю. Отсюда мы получаем

Следствие 2.7.5. Для кривой γ из теоремы 2.7.4 для почти всех $t \in [a, b]$ либо

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\gamma|_{[t, t+\varepsilon]})}{|\varepsilon|} = 0,$$

либо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t), \gamma(t + \varepsilon))}{L(\gamma|_{[t, t+\varepsilon]})} = 1$$

(если $\varepsilon < 0$, то промежуток $[t, t + \varepsilon]$ в числителе последней формулы следует понимать как $[t + \varepsilon, t]$).

Доказательство теоремы 2.7.4. Допустим противное и обозначим через Z_α , где $\alpha > 0$, множество всех тех $t \in [a, b]$, для которых

$$\liminf_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0+} \frac{L(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon']})}{\varepsilon + \varepsilon'} > \alpha$$

и

$$\liminf_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0+} \frac{d(\gamma(t - \varepsilon), \gamma(t + \varepsilon'))}{L(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon']})} < 1 - \alpha.$$

Тогда $\mu_1(Z_\alpha) > 0$ для всех достаточно малых значений α . В самом деле, иначе множество $Z_0 = \bigcup_{\alpha > 0} Z_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_{1/n}$ имело бы меру нуль, а это равносильно утверждению теоремы. Зафиксируем такое $\alpha > 0$, что $\mu_1(Z_\alpha) > 0$. Для краткости обозначим $Z = Z_\alpha$ и $\mu = \mu_1(Z)$. Выберем ε_0 столь малым, что для разбиения $\{y_i\}_{i=1}^N$ ($a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_N = b$) промежутка $[a, b]$, для которого $\max_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon_0$, будем иметь

$$L(\gamma) - \sum_{i=1}^N d(\gamma(y_{i-1}), \gamma(y_i)) < \mu \alpha^2 / 2.$$

Такое ε_0 существует в силу упражнения 2.3.2. Рассмотрим множество \mathfrak{B} всех таких промежутков вида $[t - \varepsilon, t + \varepsilon']$, что $t \in Z$, $\varepsilon + \varepsilon' < \varepsilon_0$, $L(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon']}) > \alpha(\varepsilon + \varepsilon')$ и

$$d(\gamma(t - \varepsilon), \gamma(t + \varepsilon')) < (1 - \alpha)L(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon']}).$$

По определению $Z = Z_\alpha$ каждая точка $t \in Z$ содержится в сколь угодно малых промежутках, принадлежащий множеству \mathfrak{B} . Применяя теорему Витали о покрытиях (теорема 1.7.14), мы можем выделить из множества \mathfrak{B} счетный набор попарно непересекающихся промежутков $\{[t_i - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon'_i]\}_{i=1}^\infty$, который покрывает Z с точностью до множества меры нуль. В частности,

$$\sum_{i=1}^\infty (\varepsilon_i + \varepsilon'_i) = \mu_1\left(\bigcup [t_i - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon'_i]\right) \geq \mu_1(Z) = \mu.$$

Следовательно, для достаточно больших значений M

$$\sum_{i=1}^M (\varepsilon_i + \varepsilon'_i) > \mu/2.$$

Поскольку промежутки $\{[t_i - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon'_i]\}_{i=1}^M$ попарно не пересекаются, они могут быть включены в разбиение $\{y_j\}_{j=1}^N$, все промежутки которого короче ε_0 . Обозначим: $L_j = L(\gamma|_{[y_{j-1}, y_j]})$ и $d_j = d(\gamma(y_{j-1}), \gamma(y_j))$. Согласно выбору ε_0 мы имеем

$$\sum_{j=1}^N (L_j - d_j) = L(\gamma) - \sum_{j=1}^N d_j < \mu\alpha^2/2.$$

В сумме слева все слагаемые неотрицательны, а те из них, для которых $[y_{j-1}, y_j] \in \mathfrak{B}$ (то есть $y_{j-1} = t_i - \varepsilon_i$ и $y_j = t_i + \varepsilon'_i$ для некоторого i), удовлетворяют неравенству

$$L_j - d_j > \alpha L_j > \alpha^2(y_{j-1} - y_j) = \alpha^2(\varepsilon_i + \varepsilon'_i).$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^N (L_j - d_j) \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^M (\varepsilon_i + \varepsilon'_i) > \mu\alpha^2/2.$$

Это противоречие доказывает теорему. \square

Теорема 2.7.6. Для липшицевой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ в метрическом пространстве X скорость $v_\gamma(t)$ существует для почти всех $t \in [a, b]$ и $L(\gamma) = \int_a^b v_\gamma(t) dt$, где \int — интеграл Лебега.

Доказательство. Нам понадобится следующий факт (см. [Fe], теорема 2.9.19): производная $f'(t)$ липшицевой функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ существует для почти всех $t \in [a, b]$, причем $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

Замечание. Доказательство этого факта основывается на тех же идеях, что и доказательство теоремы 2.7.4, хотя оно и сложнее.

Для $t \in [a, b]$ положим $f(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$. Тогда функция f — липшицева и, следовательно, она почти всюду дифференцируема. Перепишем $f'(t)$ следующим образом:

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\gamma|_{[t,t+\varepsilon]})}{|\varepsilon|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\gamma|_{[t,t+\varepsilon]})}{d(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))} \cdot \frac{d(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))}{|\varepsilon|}.$$

По следствию 2.7.5 для почти всех $t \in [a, b]$ либо $f'(t) = 0$, либо первый сомножитель последнего произведения стремится к 1, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. В первом случае мы имеем

$$v_\gamma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))}{|\varepsilon|} = 0,$$

так как $d(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon)) \leq L(\gamma|_{[t,t+\varepsilon]})$. Во втором случае

$$v_\gamma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{d(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))}{|\varepsilon|} = f'(t).$$

Таким образом, $v_\gamma(t)$ существует и равна $f'(t)$ в обоих случаях. Теорема доказана. \square

Упражнение 2.7.7. Приведите пример непостоянной кривой γ в пространстве \mathbb{R}^2 , для которой $v_\gamma = 0$ почти всюду.

Упражнение 2.7.8. Пусть X — метрическое пространство и $\gamma: I \rightarrow X$ — некоторая кривая. Определим

$$\text{dil}_t(\gamma) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \text{dil}(\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}),$$

где $t \in [a, b]$.

- (1) Докажите, что если в точке t существует скорость $v_\gamma(t)$, то $\text{dil}_t(\gamma) \geq v_\gamma(t)$.
- (2) Докажите, что если скорость $v_\gamma(t)$ существует при всех t и непрерывна по t , то $\text{dil}_t(\gamma) = v_\gamma(t)$ для всех t .
- (3) Приведите пример, когда кривая γ липшицева и тем не менее $\int_a^b \text{dil}_t(\gamma) \neq L(\gamma)$.

Конструкции

3.1. Локальность, склеивание и максимальные метрики

3.1.1. Локальность. Прежде всего заметим, что для восстановления внутренней метрики достаточно знать ее локально. Следующая лемма уточняет, что это означает.

Лемма 3.1.1. *Предположим, что топологическое пространство X покрыто набором (не обязательно конечным или счетным) открытых множеств $\{X_\alpha\}$ и в каждом X_α задана внутренняя метрика d_α , причем эти метрики согласованы между собой. (Последнее означает, что если кривая γ принадлежит пересечению множеств X_α и X_β , то $L_\alpha(\gamma) = L_\beta(\gamma)$, где L_α — длина в метрике d_α .)*

Тогда на X существует единственная внутренняя метрика d , сужение которой на каждое X_α совпадает с d_α . Кроме того, если X связно и все внутренние метрики d_α конечны, то метрика d тоже конечна.

Доказательство. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Прообразы $\gamma^{-1}(X_\alpha)$ образуют открытое покрытие отрезка $[a, b]$. Из компактности $[a, b]$ следует существование такого конечного разбиения $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$, что каждый интервал $[t_i, t_{i+1}]$ содержится в некотором элементе этого покрытия. Тем самым каждый образ $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ содержится в одном из множеств X_α и длина $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ полностью определяется метрикой d_α . По аддитивности длины, длина L кривой γ должна равняться сумме длин ее сужений на интервалы $[t_i, t_{i+1}]$. Поскольку внутренняя метрика однозначно определяется длинами кривых, это доказывает единственность метрики d и дает способ ее построения.

Для завершения доказательства остается проверить, что длина кривой, определенная таким способом, не зависит от выбора разбиения, и полученный функционал длины задает внутреннюю метрику, обладающую требуемыми свойствами. Мы оставляем это в качестве упражнения.

Для доказательства конечности метрики зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим множество Y всех точек, удаленных от x на конечное расстояние. Каждое множество X_α содержится либо в Y , либо в $X \setminus Y$; следовательно оба множества Y и $X \setminus Y$ открыты. Так как X связно, то $Y = X$ и, значит, метрика конечна. \square

Свойство локальности внутренней метрики можно также сформулировать в следующей форме.

Следствие 3.1.2. Пусть две внутренние метрики d_1 и d_2 заданы на одном и том же множестве X и индуцируют одну и ту же топологию. Предположим, что каждая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U_x , что сужения метрик на эту окрестность совпадают; то есть для любых $p, q \in U_x$ имеем $d_1(p, q) = d_2(p, q)$. Тогда $d_1 = d_2$.

Это следствие показывает, что, в отличие от произвольных метрик, внутренняя метрика может быть найдена с помощью локальных измерений.

Упражнение 3.1.3. Докажите это следствие.

Упражнение 3.1.4. Приведите пример, показывающий, что следствие 3.1.2 неверно без предположения, что метрика — внутренняя.

Следующее предложение показывает, что локальность является характеристическим свойством внутренних метрик (в классе всех метрик).

Предложение 3.1.5. Если полная метрика d на множестве X — не внутренняя, то существует такая метрика d_1 на X , что $d \neq d_1$, но каждая точка имеет окрестность, в пределах которой метрики d и d_1 совпадают.

Доказательство. Для каждого положительного ε определим метрику d_ε по формуле

$$d_\varepsilon(x, y) = \inf \sum_{i=0}^k d(p_i, p_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем таким конечным последовательностям точек p_0, p_1, \dots, p_{k+1} , что $p_0 = x$, $p_{k+1} = y$ и $d(p_i, p_{i+1}) \leq \varepsilon$ для всех $i = 0, 1, \dots, k$. Интуитивно, d_ε измеряет расстояние между x и y скачками не длиннее ε . Очевидно, что $d_\varepsilon(x, y) = d(x, y)$, если $d(x, y) \leq \varepsilon$, так что d и d_ε совпадают в каждом шаре радиуса $\varepsilon/2$. С другой стороны, если бы $d_\varepsilon = d$ для всех $\varepsilon > 0$, то метрика d была бы внутренней согласно предложению 2.4.17. \square

3.1.2. Склеивание. Вообразим, что мы склеиваем два пространства с внутренней метрикой (или даже некоторые точки в одном пространстве) подобно тому, как мы делаем из бумажного прямоугольника кольцо или ленту Мебиуса. Как измерять расстояния в полученном пространстве? Первое, что приходит в голову: для двух точек, лежащих “по разные стороны от линии склейки”, найти кратчайшую, состоящую из двух участков: сначала кратчайшая идет с одной стороны до линии склейки, а затем продолжается с другой стороны. Другими словами, мы представляем себе путь с разрывом, который устраняется при склеивании. На самом деле не во всех случаях это столь просто. Легко может случиться, что кратчайшая должна будет пересечь линию склейки несколько раз или даже бесконечно много раз.

Прежде чем переходить к строгим определениям, рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.1.6. Возьмем полосу $\mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ и склеим ее стороны, отождествив точки $(x, 1)$ с $(x + 100, 0)$ при всех x . Топологически полученное пространство является цилиндром.

Вопрос. Будет ли расстояние между $(0, 1/2)$ и $(1000, 1/2)$ (после склеивания) больше, чем 899?

Ответ. Нет, оно будет даже меньше, чем 11!

Действительно, рассмотрим следующий путь:

$$|(0, 1/2) \rightarrow (0, 1)| = 1/2, |(0, 1) \rightarrow (100, 0)| = 0 \text{ (“бесплатно”)},$$

$$|(100, 0) \rightarrow (100, 1)| = 1, |(100, 1) \rightarrow (200, 0)| = 0 \text{ (“бесплатно”)},$$

...

$$|(900, 0) \rightarrow (900, 1)| = 1, |(900, 1) \rightarrow (1000, 0)| = 0 \text{ (“бесплатно”)},$$

$$|(1000, 0) \rightarrow (1000, 1/2)| = 1/2.$$

Длина этого пути равна 10.

Упражнение 3.1.7. Является ли указанный выше путь кратчайшим?

Упражнение 3.1.8. Рассмотрим область E , заключенную между графиком функции e^{-x} , $x \geq 0$, и x -осью; $E = \{(x, y): 0 \leq y \leq e^{-x}, x \geq 0\}$. Склеим между собой бесконечные граничные “стороны” этой области, отождествив точки $(x, 0)$ с точками $(x + 1, e^{x+1})$ при всех $x \geq 0$. Докажите, что диаметр полученного пространства конечен!

Подсказка. Рассмотрите путь, составленный из интервалов вида $[(n, 0), (n, e^{-n})]$, $n = 1, 2, \dots$. Проверьте, что это действительно непрерывная кривая, и ее длина равна

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} < \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Замечание 3.1.9. Этот пример — отнюдь не искусственный: подобные примеры естественно возникают в гиперболической геометрии.

Разумеется, все эти вопросы и рассуждения — не строгие: мы еще не дали формального определения склеивания. Чтобы показать, что понятие склеивания не так уж просто и что формальное определение действительно необходимо, рассмотрим следующий настораживающий пример.

Пример 3.1.10. На плоскости \mathbb{R}^2 отождествим каждую точку (x, y) с точкой $(-y, 2x)$.

Вопрос 1. Если мы, забыв о метрике, сделаем такое отождествление топологически, что будет представлять факторпространство?

Вопрос 2. Можем ли мы найти расстояния между точками после такого склеивания?

Ответ. Это очень просто: все расстояния будут равны нулю.

Упражнение 3.1.11. Докажите, что в предыдущем примере для любых двух точек и любого $\varepsilon > 0$ найдется соединяющий эти точки путь, длина которого меньше ε .

Подсказка. Наше правило склеивания можно записать в форме:

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{y}{2}, -x\right) \rightarrow \left(\frac{-x}{2}, \frac{-y}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{-y}{4}, \frac{x}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{x}{4}, \frac{-y}{4}\right) \rightarrow \dots$$

Эти примеры подсказывают следующую стратегию для определения полученной “отождествлением между собой некоторых точек” метрики на языке исходного (то есть еще до склеивания) пространства. Чтобы измерить расстояние между двумя точками, мы рассматриваем такие конечные последовательности путей, что первый путь начинается в первой точке, а последний кончается во второй, и конечная точка каждого пути (кроме последнего) склеивается с начальной точкой следующего пути. Точная нижняя грань длин таких составных “путей” и есть новое расстояние. Другими словами, чтобы измерить обычное расстояние между x и y , мы соединяем x и y посредством конечной цепочки точек (“пунктирная кривая”). Сложив расстояния между каждыми соседними точками такой цепочки и взяв инфимум таких сумм, мы получили бы исходное расстояние между x и y . Однако теперь вместо этого мы складываем только расстояния между теми точками, которые *не эквивалентны*. Интуитивно, мы перепрыгиваем от точки до другой, ей эквивалентной, “бесплатно”

Определение 3.1.12. Пусть R — отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d) . Полуметрика d_R факторпространства определяется формулой

$$d_R(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d(p_i, q_i) : p_0 = x, q_k = y, k \in \mathbb{N} \right\},$$

где инфимум берется по всем таким наборам $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$, что точка q_i R -эквивалентна точке p_{i+1} при всех $i = 1, \dots, k-1$. Как обычно, мы сопоставляем полуметрике (X, d_R) метрическое пространство $(X/d_R, d_R)$, отождествляя точки, находящиеся на нулевом d_R -расстоянии (мы будем сохранять то же самое обозначение d_R для этой метрики), смотрите главу 1, параграф 1.1. Полученная метрика называется *факторметрикой* или *метрикой факторпространства*. Также говорят, что эта метрика есть результат *склеивания* пространства (X, d) с помощью эквивалентности R .

Упражнение 3.1.13. Проверьте, что d_R и на самом деле полуметрика, то есть она неотрицательна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника.

В дальнейшем мы будем рассматривать только факторметрики для пространств с внутренней метрикой. Нетрудно видеть, что в этом случае факторметрика тоже будет внутренней. Для этого заметим сначала, что $d_R \leq d$, то есть что склеивание не может увеличивать расстояния. Следовательно, все d -непрерывные кривые также и d_R -непрерывны, и d_R -длины не больше d -длин. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^k$ и $\{q_i\}_{i=1}^k$ — точки из определения метрики $d_R(x, y)$. Мы можем построить кривые, соединяющие x и y в $(X/d_R, d_R)$ и имеющие длины, почти равные $\sum d(p_i, q_i)$. Для этого просто объединим в одну кривую кратчайшие, соединяющие p_i to q_i , $i = 1, \dots, k$. Так как точки q_i и p_{i+1} отождествляются между собой в X/d_R , такие кривые непрерывны в $(X/d_R, d_R)$. Их можно выбрать так, что их длины сколь угодно близки к $\sum d(p_i, q_i)$ и, следовательно, к $d_R(x, y)$. Значит, метрика d_R — внутренняя.

Полезно сделать несколько простых наблюдений. Во первых, если две точки R -эквивалентны, то, очевидно, они отождествляются при переходе к X/d_R . С другой стороны, может случиться, что отношение $d_R = 0$, определяющее факторпространство X/d_R , на самом деле сильнее, чем R . Это значит, что на самом деле при построении X/d_R отождествляется больше точек, чем в X/R . В частности, $(X/d_R, d_R)$ может быть *не* гомеоморфно топологическому факторпространству X/R . Чтобы понять, как это может случиться, отождествим между собой все рациональные точки из $[0, 1]$. Топологическое факторпространство — весьма “дикое” (даже не метризуемое), в то время как метрическое

факторпространство представляет собой одну точку. Такой же эффект наблюдался выше, в примере 3.1.10.

Даже если не возникает дополнительных отождествлений по метрическим причинам (то есть если X/d_R и X/R совпадают как множества), метрическое и топологическое факторпространства могут иметь различную топологию (см. выше пример 3.1.17).

Упражнение 3.1.14. Предположим, что X/d_R и X/R совпадают как множества, то есть совпадают отношения $d_R = 0$ и R . Докажите, что тогда

1) топология метрического факторпространства не сильнее топологии топологического факторпространства X/R .

2) Если X компактно, то эти топологии совпадают.

Подсказка. Каждая непрерывная биекция из компакта в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом. Остается заметить, что пространство X/R — компактно, X/d_R — хаусдорфово, и тождественное отображение из X/R на X/d_R — непрерывно.

Операцию метрической факторизации можно использовать и для склеивания друг с другом нескольких метрических пространств. Для этого, прежде всего, нужно следующее определение.

Определение 3.1.15. Пусть (X_α, d_α) — семейство пространств с внутренней метрикой. Рассмотрим формальное объединение $\cup_\alpha X_\alpha$ этих пространств, считая их попарно не пересекающимися (дизъюнктное объединение). Введем внутреннюю метрику d на этом объединении, определяя расстояния по правилу:

если $x, y \in X_\alpha$ для некоторого α , то $d(x, y) = d_\alpha(x, y)$;

в противном случае $d(x, y) = \infty$.

Эту метрику d будем называть *внутренней метрикой дизъюнктного объединения пространств*.

В качестве простейшего примера рассмотрим два пространства с внутренней метрикой, (X, d_X) и (Y, d_Y) , и биекцию $I: X' \rightarrow Y'$ между подмножествами $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$. Рассмотрим дизъюнктное объединение $Z = X \cup Y$ этих пространств с метрикой дизъюнктного объединения. Чтобы склеить X и Y вдоль I , введем в Z эквивалентность R , порожденную отношением: $x \sim y$, если $I(x) = y$. По определению, результат склеивания X и Y вдоль I — это факторпространство $(Z/d_R, d_R)$.

Более общо, если мы хотим склеить семейство пространств с внутренней метрикой с помощью эквивалентности, заданной на их дизъюнктном объединении, мы сначала снабжаем это дизъюнктное объединение внутренней метрикой дизъюнктного объединения и затем переходим к факторпространству.

В этой главе, как и в дальнейшем, появятся многочисленные примеры склеивания. Сейчас мы приведем лишь несколько простейших примеров.

Пример 3.1.16. Рассмотрим интервал $I = [0, 1]$ вместе с его канонической метрикой d и введем эквивалентность $0 \sim 1$. Легко видеть, что $(I/d_R, d_R)$ изометрично окружности длины 1.

Пример 3.1.17. Рассмотрим счетное семейство дизъюнктивных интервалов I_i и склеим вместе все их левые концы. Полученное пространство выглядит как “еж”: счетное множество игл, торчащих из одной точки. Этот пример может показаться столь же элементарным, как предыдущий; однако многие студенты, встретившие этот пример впервые, ошибаются при анализе его топологии.

Вопрос. Компактно ли полученное пространство?

Ответ. Топология этого (*метрического*) факторпространства зависит от длин интервалов I_i !

Например, если длины всех интервалов I_i равны 1, метрическое факторпространство гомеоморфно топологическому факторпространству: это букет из бесконечного набора отрезков. В частности, это пространство некомпактно: правые концы интервалов образуют счетное множество точек, попарно удаленных на расстояние 2. С другой стороны, если длина I_i равна $1/i$, то “метрический букет” компактен (докажите это!). Так как компактность — топологическое свойство, то мы видим, что даже в случае одной и той же исходной топологии и одного и того же отношения эквивалентности метрические факторпространства могут иметь различные топологии.

Упражнение 3.1.18. Можете ли вы найти все топологические пространства, которые можно получить в предыдущем примере, по разному выбирая длины интервалов I_i ?

Пример 3.1.19. Возьмем квадрат $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ с евклидовой метрикой. Введем на нем эквивалентность R , порожденную отношениями $(0, x) \sim (1, x)$ и $(x, 0) \sim (x, 1)$, где $x \in [0, 1]$. Полученное факторпространство называется тором. На первый взгляд может показаться, что тор может быть устроен по разному в окрестности внутренних точек квадрата (с которыми “ничего не происходило”) и его граничных точек, а особенно — вершин (ведь все 4 вершины склеиваются вместе). Но на самом деле это не так.

Упражнение 3.1.20. Докажите, что класс эквивалентности вершин квадрата Q имеет (в метрическом факторпространстве) окрестность, *изометричную* области на плоскости.

Это упражнение объясняет, почему наше факторпространство называется *плоским* тором.

Пример 3.1.21. Пусть G — подгруппа группы изометрий (движений) плоскости \mathbb{R}^2 . Определим эквивалентность R следующим образом: xRy тогда и только тогда, когда существует такое $g \in G$, что $x = gy$ (то есть x и y принадлежат одной и той же орбите).

Упражнение 3.1.22. Докажите, что в метрическом факторпространстве расстояние между классами точек x и y равно $\inf_{g \in G} |x - g(y)|$, где $|\cdot|$ означает евклидово расстояние.

Выбирая различные группы G , мы можем получать разнообразные примеры. Например, группа переносов на все вектора с целыми координатами даст тот же тор, что и в предыдущем примере. Если G — группа всех вращений вокруг фиксированной точки, то факторпространство изометрично лучу $[0, \infty)$.

Попробуйте определить, какие факторпространства возникают, если группа G порождена:

- (а) всеми переносами вдоль оси x -координат;
- (б) преобразованием $(x, y) \rightarrow (x + 1, -y)$;
- (с) параллельным переносом на вектор $(0, 1)$ и симметрией относительно оси y -ов;
- (д) преобразованиями $(x, y) \rightarrow (x + 1, -y)$ и $(x, y) \rightarrow (-x, y + 1)$.

3.1.3. Максимальная метрика. В этом параграфе описывается очень полезная конструкция, которая обобщает (и в некотором смысле аксиоматизирует) процедуру склеивания. Для того, чтобы рельефнее выделить идею конструкции, мы сначала опишем неформально свойства, которыми процедура склеивания должна обязательно обладать; потом мы увидим, что склеивание полностью определяется этими свойствами.

Неформальная “аксиоматизация” склеивания. Вместо того, чтобы говорить, что склеивание делает из двух (или более) точек одну, мы могли бы сказать, что мы склеиваем две точки “метрически”, полагая равным нулю расстояние между ними. Формально это невозможно, ибо, согласно определению метрического пространства, расстояние между различными точками всегда положительно. Это, однако, не слишком серьезное препятствие: можно отказаться от требования положительности расстояния и тем самым определить *полуметрику*, вполне подходящую для нашей цели. Имеется более серьезная проблема: если заменить некоторые расстояния нулем, оставляя другие расстояния неизменными, то может нарушиться неравенство треугольника; а им мы уже не можем пожертвовать. Это заставляет нас изменить и другие расстояния. С другой стороны, было бы неестественно, если при склеивании вместе некоторых точек какие либо расстояния *увеличились* бы. Кроме того, мы

хотим уменьшать расстояния только в пределах необходимости. Подводя итоги, мы, пока неформально, определяем метрику, порожденную склеиванием, как наибольшую метрику, не превосходящую исходную метрику и такую, что расстояния между отождествленными точками равны нулю.

Максимальная метрика. Теперь мы готовы дать формальное определение. Чтобы формализовать слова “наибольшая метрика” в нашем определении, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1.23. Пусть $b: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ — произвольная функция. Рассмотрим класс D всех таких полуметрик d на X , что $d \leq b$, то есть $d(x, y) \leq b(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Тогда в D найдется единственная максимальная полуметрика d_m , то есть такая, что $d_m \geq d$ для всех $d \in D$.

Доказательство. Для любых $x, y \in X$ положим

$$d_m(x, y) = \sup\{d(x, y) : d \in D\}.$$

Функция d_m неотрицательна и симметрична, причем $d_m \leq b$. Так что остается только доказать неравенство треугольника для d_m . Однако для всех $x, y, z \in X$ выполняется

$$\begin{aligned} d_m(x, y) &= \sup_{d \in D} d(x, y) \leq \sup_{d \in D} (d(x, z) + d(z, y)) \\ &\leq \sup_{d \in D} d(x, z) + \sup_{d \in D} d(z, y) = d_m(x, z) + d_m(z, y) \end{aligned}$$

и тем самым лемма доказана. \square

Следствие 3.1.24. Пусть множество X покрыто семейством подмножеств $\{X_\alpha\}$, каждое из которых снабжено полуметрикой d_α . Рассмотрим класс D всех таких полуметрик d (бесконечные расстояния разрешаются), что $d(x, y) \leq d_\alpha(x, y)$ при $x, y \in X_\alpha$. В этом случае D содержит единственную полуметрику d_m , обладающую свойством $d_m(x, y) \geq d(x, y)$ для всех $d \in D$ и $x, y \in X$.

Если все (полу)метрики d_α являются внутренними, то (полу)метрика d_m — тоже внутренняя.

Доказательство. Можно считать, что все метрики d_α заданы на всем X (иначе полагаем $d_\alpha(x, y) = \infty$, если $x \notin X_\alpha$ или $y \notin X_\alpha$). Для доказательства существования d_m применим лемму 3.1.23 к функции $b(x, y) = \inf_\alpha d_\alpha(x, y)$. Чтобы доказать, что метрика d_m — внутренняя, если таковы все d_α , рассмотрим внутреннюю метрику \hat{d}_m , индуцированную метрикой d_m . Поскольку все d_α — внутренние и $d_m \leq d_\alpha$, имеем $\hat{d}_m \leq d_\alpha$, так что \hat{d}_m принадлежит D . Тем самым $\hat{d}_m = d_m$, ибо d_m максимальна. \square

Отметим важный частный случай. Предположим, что топологическое пространство X покрыто семейством метрических пространств (X_α, d_α) , метрики которых согласованы между собой на пересечениях их областей задания и согласованы с топологией X (сравните с леммой 3.1.1).

Если X связно, множества X_α открыты, а полуметрики d_α — конечные, то максимальная полуметрика тоже конечна.

Упражнение 3.1.25. Докажите последнее утверждение.

Упражнение 3.1.26. Предположим, что метрическое пространство (X, d) покрыто шарами радиуса $\varepsilon > 0$ с метриками, являющимися сужением метрики X на эти шары. Пусть d_ε — максимальная метрика на X относительно этого покрытия. Положим $d_0(x, y) = \sup_{\varepsilon > 0} d_\varepsilon(x, y)$. Докажите, что если метрика d — полная, то d_0 — внутренняя метрика, индуцированная метрикой d .

Теперь мы готовы дать определение склеивания в терминах максимальной метрики.

Теорема 3.1.27. Пусть (X, d) — метрическое пространство, а R — эквивалентность на X . Рассмотрим функцию b_R на $X \times X$, определенную по правилу

$$b_R(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ } R\text{-эквивалентны,} \\ d(x, y) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда максимальная среди полуметрик, не превосходящих b_R , полуметрика совпадает с полуметрикой d_R , полученной R -факторизацией пространства (X, d) в смысле определения 3.1.12.

Доказательство. Обозначим через D класс всех полуметрик, не превосходящих b_R . Очевидно, что $d_R \in D$, так что достаточно доказать неравенство $d_R \geq d'$ для любой полуметрики $d' \in D$. Пусть $x, y \in X$, а обозначения $\{p_i\}_{i=1}^k, \{q_i\}_{i=1}^k$ имеют тот же смысл, что и в определении 3.1.12. Тогда по неравенству треугольника

$$d'(x, y) \leq \sum_{i=1}^k d'(p_i, q_i) + \sum_{i=1}^{k-1} d'(q_i, p_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^k d(p_i, q_i),$$

ибо $b_R(p_i, q_i) \leq d(p_i, q_i)$ и $b_R(q_i, p_{i+1}) = 0$. Следовательно, $d' \leq d_R$. \square

Отметим, что в теореме 3.1.27 функция b_R равна минимуму двух внутренних (полу)метрик: исходной метрики d и метрики, которая обращается в 0 для R -эквивалентных точек и бесконечна в остальных случаях. Таким образом, мы находимся в условиях следствия 3.1.24, которое дает нам другое доказательство того, что метрика d_R — внутренняя.

3.2. Полиэдральные пространства

3.2.1. Полиэдральные метрики.

Двумерные полиэдральные пространства. Грубо говоря, полиэдральное пространство — это пространство с внутренней метрикой, которое может быть построено из “блоков” — выпуклых многогранников с помощью набора изометрий между их гранями; эти изометрии показывают, как грани должны быть приклеены друг к другу.

Так, двумерные полиэдральные пространства склеены из точек, отрезков и многоугольников. Так как каждый многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, мы можем всегда иметь дело с треугольниками вместо многоугольников.

Теперь дадим более формализованные определения нульмерных, одномерных и двумерных конечных полиэдральных пространств.

Нульмерное конечное полиэдральное пространство P_0 — это просто конечный набор точек с бесконечными расстояниями между различными точками. Эти точки называются *вершинами*.

Чтобы построить одномерное конечное полиэдральное пространство, начнем с нульмерного конечного полиэдрального пространства P_0 и конечного множества отрезков $E = \{E_i\}$ (каждый отрезок рассматривается как изометричное интервалу пространство с внутренней метрикой). Каждому отрезку E_i сопоставим инъективное отображение e_i его концов в P_0 . Приклеивая E к P_0 вдоль $\{e_i\}$, мы получим одномерное полиэдральное пространство P_1 . Заметим, что концы отрезка из E никогда не склеиваются между собой и, следовательно, мы можем считать отрезки из E лежащими в P_1 . Эти отрезки называются *ребрами*. одномерное полиэдральное пространство называется *графом*, см. следующий параграф.

Чтобы построить двумерное полиэдральное пространство, начнем с одномерного полиэдрального пространства P_1 и конечного набора многоугольников $F = \{F_i\}$. Каждому многоугольнику F_i сопоставим такое инъективное отображение f_i его границы в P_1 , что f_i отображает взаимно-однозначно каждую сторону F_i на ребро из E той же длины. Кроме того, f_i должны отображать стороны многоугольника на соответствующие ребра *изометрично* в том смысле, что склеиваемые участки имеют равные длины. Приклеивая F к P_1 вдоль $\{f_i\}$, мы получим двумерное полиэдральное пространство P_2 . Копии многоугольников F_i , лежащие в P_2 , называются *гранями*.

Естественно, два полиэдральных пространства могут оказаться изометричными между собой, хотя они и склеивались из разных многоугольников. Например, можно склеить полиэдральное пространство — поверхность куба — из его 6 квадратных граней, а можно нарисовать на поверхности

куба другую карту из многоугольных областей и склеить поверхность куба из них. Обычно полиэдральное пространство рассматривается с точностью до изометрии, а его конкретное разложение на многоугольники называется *разверткой*, так что можно сказать, что полиэдральное пространство — это класс эквивалентных (изометричных) разверток.

Следующие упражнения предоставят нам несколько примеров.

Упражнение 3.2.1. Докажите, что поверхность выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 является двумерным полиэдральным пространством.

Упражнение 3.2.2. Докажите, что плоский тор из упражнения 3.1.19 является двумерным полиэдральным пространством.

Упражнение 3.2.3. Докажите, что каждое двумерное конечное полиэдральное пространство может быть склеено из многоугольников таким образом, что расстояние между точками одной и той же грани равно длине отрезка, соединяющего эти точки в грани (в частности, грани являются выпуклыми многоугольниками); другими словами, эти точки можно соединить кратчайшей, не заходящей в другие грани.

Общие полиэдральные пространства. Здесь мы опишем общие полиэдральные пространства, не связывая себя такими ограничениями, как локальная конечность, конечномерность и даже локальная компактность. Такие пространства могут оказаться очень полезными, и в этой книге появятся несколько примеров полиэдральных монстров.

Однако большинство полиэдральных пространств, рассматриваемых в этой книге, — это двумерные локально конечные (а чаще конечные) полиэдральные пространства. Так что этот параграф может быть пропущен при первом чтении.

Мы не будем повторять стандартные понятия теории выпуклых многогранников в евклидовых пространствах. (Читатели, которые опасаются иметь дело с многомерными многогранниками, могут думать о двумерных многоугольниках или трехмерных многогранниках.) Так как каждый многогранник можно триангулировать, то достаточно иметь дело только с симплексами.

Одномерные симплексы — это отрезки, двумерные симплексы — треугольники, а трехмерные симплексы — тетраэдры. Каждый тетраэдр имеет четыре треугольные грани (размерности 2) и шесть ребер (одномерных граней). Вершины можно рассматривать как нульмерные грани. Сам тетраэдр может рассматриваться как его трехмерная грань.

Теперь дадим формальное определение полиэдрального пространства.

Определение 3.2.4. Пусть топологическое пространство (P, d) покрыто семейством пространств (P_α, d_α) с внутренней метрикой, причем каждое

из этих пространств изометрично некоторому симплексу (или выпуклому многограннику). Предположим, что для любых двух симплексов P_α и P_β их пересечение $P_\alpha \cap P_\beta$ является гранью в каждом из них, и что сужения метрик P_α и P_β на $P_\alpha \cap P_\beta$ совпадают. Рассмотрим максимальную метрику d , которая не превосходит каждой из метрик d_α . Метрика d — внутренняя. Пространство (P, d) называется *полиэдральным пространством* или, точнее, *евклидовым полиэдральным пространством*. (Последнее название подчеркивает тот факт, что P построено из евклидовых многогранников, в то время как можно рассматривать полиэдры, склеенные из симплексов, снабженных и неевклидовыми внутренними метриками.)

Симплексы P_α называются *гранями* P . Нульмерные и одномерные грани называются *вершинами* и *ребрами*, соответственно. Каждое представление полиэдрального пространства в виде объединения граней P_α называется его *триангуляцией*.

Обычно мы будем рассматривать каждое полиэдральное пространство вместе с какой либо фиксированной его триангуляцией.¹

Имеется более конструктивная переформулировка этого определения. Именно, мы можем начать с семейства симплексов (или выпуклых многогранников) $\{P_\alpha\}$ и семейства таких изометрий $\{I_\delta\}$, что каждая изометрия $I_\delta: P_\alpha^f \rightarrow P_\beta^f$ отображает грань $P_\alpha^f \subset P_\alpha$ на грань $P_\beta^f \subset P_\beta$ для некоторых P_α и P_β . Составим дизъюнктивное объединение $Z = \bigcup_\alpha P_\alpha$ и введем на Z отношение эквивалентности R , порожденное отношениями $x \sim I_\delta(x)$.

Читатель, вероятно, уже догадался, что мы собираемся теперь факторизовать множество Z (снабженное внутренней метрикой дизъюнктивного объединения) по отношению R . Здесь, однако, имеется небольшое формальное затруднение. Может случиться, что отношение R отождествит две различные точки одного симплекса P_α . Если мы хотим, чтобы наша конструкция соответствовала предыдущим определениям, мы должны запретить это. Таким образом, факторпространство (P, d) , полученное из Z склеиванием с помощью отношения R , является полиэдральным пространством только если каждый симплекс P_α проектируется в P инъективно. К счастью, это требование не уменьшает класс пространств, которые могут быть получены таким путем.

Упражнение 3.2.5. Докажите, что каждое пространство P , склеенное из выпуклых многогранников с помощью изометрий их граней, является полиэдральным пространством.

Подсказка. Подразбейте многогранники на более мелкие.

¹Так что триангуляция — это почти синоним слова развертка, однако последнее обычно употребляется применительно к конечным полиэдрам, а первое — в общей ситуации и, преимущественно, когда все грани — симплексы.

Отметим, что изометрия между двумя симплексами однозначно определяется образами вершин. Таким образом, необходимые для описания полиэдрального пространства данные являются более или менее комбинаторными. Точнее, чтобы описать полиэдральное пространство, достаточно зафиксировать длины ребер симплексов P_i (чтобы задать их геометрию) и задать комбинаторную схему их склеивания.

Под *размерностью* полиэдрального пространства мы понимаем максимальную размерность многогранников, из которых он склеен. Говорят, что полиэдральное пространство *размерностно однородно*, если его можно склеить из многогранников одной размерности. Иными словами, полиэдральное пространство P размерностно однородно, если каждая его точка принадлежит n -мерной грани для некоторого n ; это n — размерность P .

Полиэдральное пространство называется *конечным*, если оно имеет конечное число граней, и *локально конечным*, если каждая точка имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом граней.

Упражнение 3.2.6. Докажите, что полиэдральное пространство P локально конечно тогда и только тогда, когда каждая его точка принадлежит конечному числу граней.

Естественные примеры читатель мог найти уже в предыдущем параграфе. Здесь мы добавим к ним более “экзотический” пример.

Пример 3.2.7. Рассмотрим бесконечную последовательность кубов $P_i = [0, 1]^i$. Пусть изометрии $I_i: P_{i-1} \rightarrow P_i$ действуют добавлением нуля к последней координате:

$$I_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0).$$

Тем самым, мы можем построить полиэдральное пространство; это — бесконечномерный куб, состоящий из всех конечных последовательностей вещественных чисел из $[0, 1]$.

Упражнение 3.2.8. Можете ли вы дать определение бесконечномерного симплекса?

3.2.2. Метрические графы. Мы предполагаем, что читатель знаком с топологическими графами, по крайней мере как со способом нарисовать несколько городов, соединенных дорогами. Метрический граф — это одномерное полиэдральное пространство. Хотя определение полиэдрального пространства было дано в предыдущем параграфе, мы повторим его здесь, чтобы сделать его более наглядным в этом простейшем случае. Это определение обобщает наш пример “паутины” 2.2.7 из второй главы.

Под метрическим отрезком длины a мы имеем в виду метрическое пространство, изометричное интервалу $[0, a]$.

Определение 3.2.9. Метризованным графом называется результат склеивания набора метрических отрезков E_i и точек v_j , снабженного метрикой дизъюнктного объединения, с помощью эквивалентности R , определенной на множестве, состоящем из точек v_j и концов наших отрезков.

Другими словами, мы рассматриваем максимальную полуметрику, которая ограничена сверху всеми метриками наших отрезков, и дополнительную полуметрику $d_R(x, y)$, для которой расстояние равно нулю, если xRy , и бесконечности — в остальных случаях, и затем отождествляем точки, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга относительно максимальной полуметрики.

Отрезки $\{E_i\}$ называются ребрами, а классы эквивалентных концов и точек v_j называются вершинами графа. Длина ребра — это просто длина соответствующего отрезка (она может отличаться от расстояния в графе между его концами). Число концов отрезков в представляющем вершину классе эквивалентности называется *порядком* вершины. Большая часть графов, рассматриваемых в этой книге, — локально конечные и, следовательно, имеют вершины только конечного порядка (исключением является пример графа-монстра в этом параграфе).

Наиболее естественный путь построения графа — это взять набор V вершин, отметить, какие пары вершин соединены ребрами, и указать длины этих ребер.

Чтобы восстановить по этим данным граф в соответствии с исходным определением, возьмем набор отрезков E_i , соответствующих ребрам и имеющих данные длины. Теперь, если ребру, соответствующему отрезку E_i , следует соединять вершины a и b , то считаем один конец отрезка E_i эквивалентным a , а другой — эквивалентным b . Это порождает эквивалентность R , которая и склеивает граф из V и $\{E_i\}$.

В частности, каждый топологический граф можно превратить в метрический граф, сопоставив длину каждому его ребру. Однако следует помнить, что (для бесконечных графов) это может изменить топологию пространства. См. ниже упражнение 3.2.12.

Отметим, что две вершины могут быть соединены двумя или большим числом различных ребер. Определение 3.2.9 позволяет графу иметь даже петли, то есть ребра, соединяющие точку с ней собой. Однако любой граф можно переделать в граф без петель и пар ребер, соединяющих те же вершины, просто разбив ребра на части (сравните с примером 3.2.5).

Мы предлагаем следующее упражнение, которое позволит лучше понять определение графа.

Упражнение 3.2.10. Изучите определение склеивания и проверьте, что для конечного графа наше определение совпадает с обычным: расстояние между x и y равно длине кратчайшего из путей из x в y , составленных из конечного числа последовательно проходимых ребер (таких, что конечная точка предыдущего ребра отождествлена с начальной следующего). Верно ли это для бесконечных графов? Что случится, если мы заменим “кратчайший путь” на “инфимум ...”?

Предостережение. Точки, которые не R -эквивалентны, при склеивании могут (как мы уже видели) тем не менее оказаться отождествленными.

Упражнение 3.2.11. Приведите такой пример.

Упражнение 3.2.12. Докажите, что подобных “лишних” отождествлений не будет, если граф — локально конечный или если длины всех ребер ограничены снизу некоторым положительным числом. Кроме того, в этих случаях метрический и топологический графы имеют одинаковую топологию (то есть в обоих случаях это — топологическое факторпространство дизъюнктного объединения точек по тому же отношению эквивалентности).

С другой стороны, факторизация $X \rightarrow X/d_R$ не может воздействовать на внутренние точки отрезков.

Упражнение 3.2.13. Докажите, что внутренние точки ребер никогда ни с чем не склеиваются, и, таким образом, объединение внутренних точек отрезков оказывается вложенным в граф.

Иными словами, каждое ребро является простой кривой, соединяющей две вершины и не проходящей через другие вершины, а внутренности различных ребер не имеют общих точек.

Упражнение 3.2.14. Докажите, что длина ребра, рассматриваемого как кривая в графе, равно длине интервала, из которого это ребро было получено.

Упражнение 3.2.15. Пусть X — пространство с внутренней метрикой, а множество $V \subset X$ конечно. Предположим, что множество $X \setminus V$ покрыто конечным набором спрямляемых кривых, каждая из которых соединяет две точки множества V , причем эти кривые не имеют самопересечений и попарно не пересекаются (за исключением их концов). Докажите, что тогда X — метрический граф.

Упражнение 3.2.16. Покажите, что утверждение предыдущего упражнения может стать неверным, если отбросить предположение о конечности семейства кривых.

Подсказка. Каждое пространство с внутренней метрикой является объединением точек, но не всякое такое пространство является нульмерным полиэдром.

Хотя наше определение графа звучит весьма научнообразно, сами графы являются привычными объектами, и наша житейская интуиция может служить хорошим гидом, когда речь идет о простых ситуациях. Скажем, нахождение кратчайших путей и внутренних расстояний в одномерном скелете куба — упражнение, посильное для десятилетнего ребенка. Графы могут даже показаться скучноватыми для геометрически мыслящего читателя, как слишком дискретные и комбинаторные объекты. Чтобы избавить его от такого ощущения, мы предлагаем следующий подход: попробуйте аппроксимировать произвольное пространство X с внутренней метрикой графами, вершины которых лежат достаточно густо в X , см. подробности в главе 7.

Наиболее скептически настроенным читателям мы советуем рассмотреть следующий пример, показывающий, что каждое метрическое пространство можно представить как множество вершин некоторого графа, причем расстояния между точками будет тем же, что и в графе. Разумеется, такой граф представляет собой своего рода монстр, который вряд ли может оказаться полезным.

Пример 3.2.17. Произвольному метрическому пространству (X, d) сопоставим дизъюнктное объединение отрезков $I_{x,y}$, “занумерованных” всеми парами точек $x, y \in X$. Каждый отрезок $I_{x,y}$ снабдим длиной, равной $d(x, y)$. Это будущие ребра графа. Склеивание совершенно естественное: мы отождествляем левые концы отрезков $I_{x,y}$ и $I_{x',y'}$, если $x = x'$, и правые концы, если $y = y'$. Проверьте в качестве упражнения, что множество X можно отождествить канонически с множеством вершин графа и что внутренняя метрика этого графа, суженная на множество его вершин, совпадает с исходной метрикой d пространства X . (Эту конструкцию можно описать более наглядно: представим, что каждой паре точек $x, y \in X$ мы сопоставляем отрезок длины $d(x, y)$ и приклеиваем один конец этого отрезка к точке x , а другой — к точке y .)

3.2.3. Метрика слов. Один важный класс графов связан с группами. Пусть G — конечно порожденная группа, то есть группа с конечным множеством образующих. Это значит, что в группе имеется такой конечный набор ее элементов $S = \{g_1, \dots, g_k\} \subset G$, что каждый элемент группы можно представить как конечное произведение элементов из S . Мы также предполагаем, что S симметрично: для каждого $s \in S$ обратный элемент s^{-1} также содержится в S .

Замечание 3.2.18. Если S не симметрично, его всегда можно симметризовать, добавив к нему элементы, обратные ко всем его элементам. Поэтому, описывая S , мы обычно будем упоминать только один из двух взаимно обратных элементов: согласно общепринятому соглашению, обратные элементы для элементов из S включены в S по умолчанию.

По группе G и множеству ее образующих $S = \{g_1, \dots, g_k\} \subset G$ можно построить граф Кэли пары (G, S) . Вершины этого графа — это в точности элементы из G , и два элемента $g, h \in G$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $gh^{-1} \in S$. Другими словами, каждый элемент $g \in G$ соединен k ребрами с вершинами g_1g, g_2g, \dots, g_kg . Длины всех ребер полагаем равными 1.

На языке определения 3.2.9 граф Кэли можно описать следующим образом. Возьмем семейство единичных интервалов I_g^s , помеченных парами $(g \in G, s \in S)$ и склеим их с помощью эквивалентности, порожденной следующими отождествлениями: если $h = sg$, отождествляем правый конец отрезка I_g^s с левыми концами отрезков I_h^t при всех $t \in S$.

Упражнение 3.2.19. Опишите графы Кэли для следующих групп и их систем образующих:

1. G — группа \mathbb{Z} , порожденная числом $\{1\}$.
2. G — группа $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ с одним образующим.
3. G — группа \mathbb{Z}^2 с образующими $(0, 1)$ и $(1, 0)$.
4. G — группа \mathbb{Z}^2 с образующими $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.
5. G — свободная группа с двумя образующими a, b .

Ответы. 1. Вещественная прямая, составленная из единичных интервалов.

2. Правильный m -угольник со сторонами единичной длины.

3. Решетка на плоскости, образованная прямыми $x = n$ и $y = n$ для всех целых n .

4. Решетка на плоскости, образованная прямыми $x = n$, $y = n$ и $x - y = n$ для всех целых n . Чтобы картинка лучше соответствовала нашей метрике (все ребра должны быть единичной длины), нарисуйте решетку, разбивающую плоскость на правильные треугольники со сторонами длины 1.

5. Бесконечное дерево с вершинами порядка 4. (*Дерево* — это граф, не содержащий подмножества, гомеоморфного окружности.)

Задание длин ребер определяет на графе Кэли внутреннюю метрику.

Определение 3.2.20. Сужение на G внутренней метрики, порожденной длинами ребер графа Кэли, называется *метрикой слов* группы G (по отношению к данному множеству образующих).

Упражнение 3.2.21. Докажите, что эта метрика конечна.

Упражнение 3.2.22. Выпишите метрику слов и изобразите метрические шары радиуса 5 в случае первых четырех примеров из упражнения 3.2.19.

Упражнение 3.2.23. Покажите, что расстояние (в метрике слов) между g и h равно наименьшему из таких чисел n , что g можно представить в виде $g = h_1 h_2 \dots h_n h$, где все $h_i \in S$ (напомним, что S предполагается симметричным). Именно с этим связано название “метрика слов”: расстояние между элементами g и h равно длине самого короткого слова, составленного из образующих и равного $g^{-1}h$.

Роль этой конструкции как в комбинаторной теории групп, так и в современной геометрии, трудно переоценить; мы остановимся на этом подробнее несколько позднее, в главе 8.

3.3. Изометрии и факторпространства

Напомним определение изометрии.

Определение 3.3.1. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — два метрических пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *изометрией на образ*, если оно сохраняет расстояния. Последнее означает, что $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$ (таким образом, отображение автоматически инъективно).

Сюръективное сохраняющее расстояния отображение называется *изометрией*. Два пространства *изометричны*, если существует изометрия одного из них на другое.

Ясно, что изометрия всегда является гомеоморфизмом, а изометричность — отношение эквивалентности. Также очевидно, что изометрия на образ переводит кривые в кривые той же длины, следовательно, это — изоморфизм функционалов длины. Образ кратчайшей (геодезической, сферы, шара, и т.д.) при изометрии — снова кратчайшая (геодезическая, сфера, шар, и т.д.), Можно сказать, что метрическая геометрия изучает классы изометричных пространств.

Изометрии пространства на самого себя образуют группу (докажите это!), которая называется *группой изометрий*. Мы будем обозначать ее $\text{Iso}(X)$. Для “большинства” метрических пространств (в случае “общего положения”) эта группа тривиальна. (Приведите пример пространства с внутренней метрикой, группа изометрий которого тривиальна.) О метрическом пространстве, имеющем нетривиальную группу изометрий, часто говорят, что оно обладает симметриями. Имеется замечательный класс очень симметричных пространств; это так называемые *однородные* пространства.

Определение 3.3.2. Пространство с внутренней метрикой X называется (метрически) *однородным*, если для любых $x, y \in X$ существует изометрия $I: X \rightarrow X$ такая, что $I(x) = y$.

Пример 3.3.3. Евклидово пространство и (метрические) сферы являются однородными пространствами. Цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ в \mathbb{R}^3 и тор из примера 3.1.19 — также однородные пространства. С другой стороны, конус $x^2 + y^2 = z^2$ и параболоид $x^2 + y^2 = z$ не являются однородными пространствами.

Можете ли вы найти группы изометрий этих пространств?

Здесь самое время ввести следующее важное понятие.

Определение 3.3.4. Метрическое пространство X называется *локально изометричным* однородному пространству Y , если каждая точка пространства X имеет окрестность, изометричную открытому подмножеству в Y . Если пространство локально изометрично евклидову пространству, то говорят, что оно *плоское*.

Плоское пространство нельзя отличить от евклидова с помощью локальных измерений: “в малом” они совершенно одинаковы. Например, цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ в \mathbb{R}^3 — плоское пространство. Чтобы понять, что это цилиндр, двумерное существо было бы вынуждено совершить долгое “магелланово” путешествие вокруг цилиндра. Конус $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, — не плоский; это ясно из рассмотрения окрестности его вершины.

Вопрос: что бы вы предложили двумерному существу, живущему на конусе, чтобы проверить, что конус не является плоским? А двумерному существу, живущему на сфере? Должно ли оно совершить кругосветное путешествие, чтобы узнать, что его мир — не плоскость? Заметим, что опыты с горизонтом незаконны при нашей постановке: они используют измерения в объемлющем пространстве, а нам допустимо использовать только внутренние измерения.

Ответы на такие вопросы не всегда легки, но читатель должен научиться отвечать на них после прочтения этой книги.

Факторпространство. В этом параграфе мы собираемся иметь дело с подгруппами группы изометрий. Читатель, знакомый с понятием действия группы, может предпочесть думать о группе G , действующей на X изометриями. Напомним определение действия группы.

Определение 3.3.5. Говорят, что группа G действует на множестве X , если существует такое отображение $\varphi: G \times X \rightarrow X$ (для краткости мы будем писать $g(x)$ вместо $\varphi(g, x)$), что

$$(i) \quad gh(x) = g(h(x)) \text{ и}$$

$$(ii) \quad e(x) = x$$

для любых $g, h \in G$, $x \in X$. Здесь e — единица группы G .

Рассмотрим подгруппу G группы изометрий пространства с внутренней метрикой (X, d) . Введем отношение эквивалентности R_G : точки $x, y \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $x = g(y)$ для некоторого $g \in G$ (проверьте, что это — действительно эквивалентность!).

Так как у нас есть эквивалентность на пространстве с внутренней метрикой, мы можем склеить между собой эквивалентные точки и рассмотреть факторметрику на пространстве, полученном в результате такого отождествления в соответствии с определением 3.1.12 склеивания.

Оказывается, что в случае эквивалентности, индуцированной действием подгруппы группы изометрий, факторпространство, полученное склеиванием, есть в точности X/R_G (обычно обозначаемое X/G), а расстояние между точками в X/G — это инфимум расстояний между их представителями в X .

Более формально, для $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$ положим

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf\{d(x, y) : x \in \bar{x}, y \in \bar{y}\}$$

для $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$.

Напомним, что класс эквивалентности точки x называется орбитой этой точки: $O(x) = \{g(x) : g \in G\}$. Теперь определение метрики \bar{d} можно переформулировать следующим образом:

$$\bar{d}(O(x), O(y)) = \inf_{g \in G} d(x, g(y)).$$

Лемма 3.3.6. *Метрика \bar{d} совпадает с факторметрикой d_{R_G} .*

Доказательство. По определению склеивания, расстояние между классами точек $p, q \in X$ в факторметрике равно инфимуму сумм

$$\sum_{i=0}^k d(p_i, q_i)$$

по всем таким конечным наборам $\{p_i, q_i, i = 0, 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$, что $p_0 = p, q_k = q$ и точка p_i эквивалентна точке q_{i-1} при всех $i > 1$. Это означает, что существуют такие изометрии $g_i \in G$, что $g_i(p_i) = q_{i-1}$. Мы можем использовать эти изометрии, чтобы собрать вместе все отрезки p_i, q_i . А именно, рассмотрим новую последовательность точек

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= p_0 = p, & \tilde{q}_0 &= q_0, \\ \tilde{p}_1 &= g_1(p_1), & \tilde{q}_1 &= g_1(q_1), \\ \tilde{p}_2 &= g_1(g_2(p_2)), & \tilde{q}_2 &= g_1(g_2(q_2)), \\ & \dots & & \\ \tilde{p}_k &= g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k(p_k), & \tilde{q}_k &= g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k(q_k). \end{aligned}$$

Так как все отображения g_i и, тем самым, их композиции $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_i$ — изометрии, то $d(p_i, q_i) = d(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)$ и поэтому

$$\sum_{i=0}^k d(p_i, q_i) = \sum_{i=0}^k d(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i).$$

С другой стороны, по выбору изометрий g_i , $\tilde{q}_i = \tilde{p}_{i+1}$. Таким образом

$$d(p, \tilde{q}_k) \leq \sum_{i=0}^k (d(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i) + d(\tilde{q}_i, \tilde{p}_{i+1})) = \sum_{i=0}^k d(p_i, q_i).$$

Напомним, что

$$\tilde{q}_k = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k(q_k) = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k(q),$$

так что \tilde{q}_k принадлежит орбите $O(q)$ точки q . Отсюда мы заключаем, что расстояние между орбитами точек p и q не больше расстояния в факторметрике между классами эквивалентности точек p и q .

Противоположное неравенство очевидно. В самом деле, если $q' \in O(q)$ и $p' \in O(p)$, то p' и q' эквивалентны точкам p и q , соответственно, и, следовательно, можно выбрать путь только с одним ненулевым прыжком, положив $p_0 = q_0 = p$, $p_1 = p'$, $q_1 = q'$ и $p_2 = q_2 = q$. Длина этого пути равна $d(p', q')$. \square

Упражнение 3.3.7. Дайте прямое (то есть не использующее ни определения 3.1.12, ни понятия максимальной метрики) доказательство того, что определенная выше метрика \bar{d} является внутренней.

Подсказка. Ниже приведено доказательство для “модельного” случая, когда X локально компактно и полно, а все орбиты компактны. Воспользуйтесь аппроксимацией, чтобы получить доказательство в общем случае.

Пусть $a, b \in X/G$. Выберем представителей x, y классов a, b так, чтобы $\bar{d}(a, b) = d(x, y)$. Такие представители найдутся ввиду компактности орбит.

Пусть z — середина между x и y , то есть такая точка, что $d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y)$. Ясно, что $d(a, O(z)) \leq d(x, z) = \frac{1}{2}d(x, y) = \frac{1}{2}d(a, b)$. Аналогично, $d(b, O(z)) \leq \frac{1}{2}d(a, b)$. Из неравенства треугольника следует, что оба предыдущих неравенства должны обращаться в равенства, и тем самым $O(z)$ является серединой между a и b . \square

Пример 3.3.8. Если подгруппа G группы изометрий плоскости \mathbb{R}^2 действует целочисленными переносами, то есть если $g(x, y) = (x + k, y + l)$, где k, l — целые, то факторметрическое пространство \mathbb{R}^2/G является плоским тором (сравните с примером 3.1.19)).

Пример 3.3.9. Если подгруппа G группы $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ состоит из двух элементов: единицы и центральной симметрии $-\text{id}: (x, y) \rightarrow (-x, -y)$, то факторпространство изометрично конусу $x^2 + y^2 = cz^2, z \geq 0$. Можете ли вы найти значение коэффициента c ? А что будет, если G — конечная группа поворотов?

Пример 3.3.10. Если подгруппа G группы изометрий плоскости \mathbb{R}^2 состоит из двух элементов: единицы и осевой симметрии $(x, y) \rightarrow (x, -y)$, то факторпространство оказывается полуплоскостью.

Читатель мог заметить различие между этими примерами: в то время как тор выглядит “одинаково во всех точках”, конус и полуплоскость имеют особые точки (вершину конуса и ребро, ограничивающее полуплоскость). В следующем параграфе мы увидим, что появление таких “сингулярных” точек связано с наличием неподвижных точек изометрий из G .

3.4. Локальные изометрии и накрытия

3.4.1. Локальные изометрии.

Определение 3.4.1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *локальной изометрией* в окрестности точки $x \in X$, если существует такая окрестность U_x точки x , что (сужение) f отображает U_x изометрично на открытое множество $U_y \subset Y$. Если отображение является локальной изометрией в окрестности каждой точки, оно называется *локальной изометрией*.

Отметим, что при этом мы рассматриваем в областях U_x и U_y сужения исходных метрик, но не индуцированные в них метрики. Это существенно в случае пространства, в котором точки могут и не иметь выпуклых окрестностей.

Локальные изометрии могут изменять расстояния. Например, они могут отображать две различные точки в одну точку. Однако, любая локальная изометрия пространств с внутренней метрикой является *нерастягивающим отображением*, то есть она не может увеличивать расстояния между точками.

Упражнение 3.4.2. Докажите последнее утверждение.

Пример 3.4.3. Отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow S$, заданное равенством $f(t) = (\sin(t), \cos(t))$, является локальной изометрией по отношению к внутренней (угловой) метрике on S^1 .

Пример 3.4.4. Более общо, если $f: X \rightarrow Y$ — локальный гомеоморфизм и Y — пространство с внутренней метрикой, то в X существует такая (единственная) структура пространства с внутренней метрикой, что f

является локальной изометрией. Эта структура — в точности функционал длины, индуцированный отображением f (см. определения в параграфе 2.2).

Упражнение 3.4.5. Докажите утверждение, сформулированное в последнем примере.

Следующее упражнение объясняет, почему тор $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — плоский, а конус $\mathbb{R}^2/\{id, -id\}$ — нет.

Упражнение 3.4.6. Пусть группа G действует изометриями на пространстве X с внутренней метрикой. (Читатель может рассматривать G как подгруппу $\text{Iso}(X)$.) Предположим, что все орбиты являются дискретными. Докажите, что проектирование $p: X \rightarrow X/G$ является локальной изометрией в окрестности точки x тогда и только тогда, когда x не является неподвижной точкой нетривиального элемента группы G .

3.4.2. Накрытия. Накрывающие отображения представляют собой важный класс локальных гомеоморфизмов, а в случае пространств с внутренней метрикой накрытия образуют важный класс локальных изометрий. Напомним основные свойства накрывающих отображений и связь между накрытиями и внутренними метриками.

Что касается топологических свойств, мы ограничимся определениями и перечнем основных фактов. Доказательства можно найти во многих книгах (см. [Mas]). Здесь же мы выделим те дополнительные свойства накрытий, которые возникают, когда мы рассматриваем накрытия пространств с внутренней метрикой.

Общие свойства накрытий. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Открытое множество $V \subset Y$ называется *правильно накрытым*, если его полный прообраз $f^{-1}(V)$ является дизъюнктым объединением таких открытых множеств $U_i \subset X$, что сужение f на каждое U_i является гомеоморфизмом на V . Отображение f называется *накрывающим отображением*, или, короче, *накрытием*, если каждая точка $y \in Y$ имеет правильно накрытую окрестность. Пространство Y называется *базой* накрытия, а X — *накрывающим пространством*. Вот классические примеры накрытий: отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, определенное равенством $f(x) = (\cos x, \sin x)$; стандартное накрытие тора плоскостью, то есть отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$, заданное формулой $F(x, y) = (f(x), f(y))$, где $f(x) = (\cos x, \sin x) \in S^1$; проектирование сферы S^2 на проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ (напомним, что $\mathbb{R}P^2$ — это факторпространство сферы S^2 по эквивалентности $x \sim -x$).

Каждое накрытие является локальным гомеоморфизмом. Однако обратное не верно: например, рассмотрим отображение включения интервала $(0, 1)$ в \mathbb{R} .

Если X и Y связны и $f: X \rightarrow Y$ — накрытие, то число точек в прообразе $f^{-1}(y)$ не зависит от $y \in Y$ и называется *числом листов* накрытия f (это “число” может быть и бесконечностью). Мы будем рассматривать накрытия только для линейно связных пространств.

Предположим, что $f: X \rightarrow Y$ — накрытие пространства Y с внутренней метрикой. Так как f — локальный гомеоморфизм, на X существует единственная внутренняя метрика, для которой f является локальной изометрией. Эта метрика на X называется *подъемом* метрики пространства X .

Для читателя, уже знакомого с гладкими многообразиями и римановыми метриками, отметим, что если Y — риманово многообразие, то его гладкая структура и риманова метрика могут быть естественно подняты в X .

Упражнение 3.4.7. Пусть X и Y — пространства с внутренней метрикой, а $f: X \rightarrow Y$ — накрытие и локальная изометрия. Предположим, что шар $B_r(y)$ является правильно накрытой окрестностью точки $y \in Y$. Докажите, что тогда расстояние между различными точками из $f^{-1}(y)$ не меньше, чем $2r$.

Упражнение 3.4.8. Пусть X и Y — пространства с внутренней метрикой, причем Y — полное, а $f: X \rightarrow Y$ — накрытие и локальная изометрия. Докажите, что тогда X тоже полно.

Подсказка. Так как отображение f — нерастягивающее, то оно переводит любую последовательность Коши пространства X в последовательность Коши в Y . Рассмотрите предельную точку последней последовательности и ее правильную окрестность.

Упражнение 3.4.9. Пусть X и Y — пространства с внутренней метрикой, $f: X \rightarrow Y$ — накрытие и локальная изометрия, $y_1, y_2 \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Докажите, что тогда для точки $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ найдется такая точка $x_2 \in f^{-1}(y_2)$, что $|x_1 x_2| \leq |y_1 y_2| + \varepsilon$. Если метрика пространства Y — строго внутренняя, то то же самое верно при $\varepsilon = 0$.

Подсказка. Воспользуйтесь стандартной топологической леммой о подъеме пути: для любого пути $\gamma: [a, b] \rightarrow Y$ и каждой точки $x \in f^{-1}(\gamma(a))$ существует такой (единственный) путь $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow X$, что $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ и $\tilde{\gamma}(a) = x$.

Упражнение 3.4.10. Докажите утверждение, обратное упражнению 3.4.8. Именно, если X и Y — пространства с внутренней метрикой,

$f: X \rightarrow Y$ — накрытие и локальная изометрия, а X полно, то Y также полно.

Подсказка. Для любой последовательности Коши $\{y_n\}$ в Y найдется такая последовательность Коши $\{x_n\}$ в X , что $f(x_n) = y_n$.

Универсальное накрытие. Накрытие $f: X \rightarrow Y$ называется *универсальным*, если X односвязно. Пространство X в этом случае называется *универсальным накрывающим* для Y .

Следующая теорема говорит о том, что всякое “не слишком плохое” топологическое пространство имеет универсальное накрывающее. Чтобы сформулировать ее в строгой форме, предварительно дадим определения. Говорят, что два накрытия $f_1: X_1 \rightarrow Y$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y$ *эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм $h: X_1 \rightarrow X_2$, что $f_1 = f_2 \circ h$. Эквивалентные накрытия естественно не различать.

Топологическое пространство Y называется *локально линейно связным*, если для каждой точки $y \in Y$ и каждой ее окрестности U существует столь малая окрестность U' , $y \in U' \subset U$, что каждые две точки $a, b \in U'$ можно соединить путем, проходящим в U . Пространство Y называется *локально односвязным в целом* или *полулокально односвязным*, если каждая точка $y \in Y$ имеет такую окрестность U , что каждая петля, содержащаяся в U , стягиваема в Y . (Другими словами, образ фундаментальной группы $\pi_1(U, y)$ при гомеоморфизме $\pi_1(U, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ индуцированном включением U в Y , тривиален.)

Теорема 3.4.11. *Если топологическое пространство Y связно, локально линейно связно и полулокально односвязно, то существует универсальное накрытие $f: X \rightarrow Y$. Универсальное накрытие единственно с точностью до эквивалентности.*

Условия, накладываемые на Y в этой теореме, выглядят естественными и выполняются для большинства топологических пространств, за исключением “патологических”. В дальнейшем мы будем рассматривать только топологические пространства, удовлетворяющие этим условиям.

Одним из наиболее существенных свойств универсального накрытия является его тесная связь с фундаментальной группой. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — накрытие. Зафиксируем $y_0 \in Y$ и выберем $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. После этого для каждого пути γ в Y , начинающегося в x_0 , существует единственный подъем $\tilde{\gamma}$ в X , начинающийся в x_0 . (Напомним: то, что $\tilde{\gamma}$ — подъем пути γ , означает, что $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$). В частности, петля с вершиной y_0 поднимается в кривую, начинающуюся в x_0 и кончающуюся в некоторой точке множества $f^{-1}(y_0)$. Стандартная “лемма о накрывающей гомотопии” утверждает, что подъемы гомотопных путей гомотопны (мы имеем в виду гомотопию с фиксированными концами). В частности, подъемы

гомотопных путей имеют общие концы, то есть, если две петли γ_1 и γ_2 с общей вершиной y_0 гомотопны, то их подъемы $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, начинающиеся в x_0 , кончатся в одной и той же точке $y \in f^{-1}(y_0)$.

Если f — универсальное накрытие, то обратное утверждение тоже верно: любые пути в X , соединяющие данную пару точек, гомотопны и, следовательно, их подъемы гомотопны в Y .

Таким образом, мы имеем взаимно-однозначное соответствие между классами гомотопных петель пространства Y с вершинами в y_0 (то есть, между элементами фундаментальной группы $\pi_1(Y, y_0)$) и точками множества $f^{-1}(y_0) \subset X$.

Регулярные накрытия и преобразования скольжения. На самом деле не все накрытия в равной мере интересны с геометрической точки зрения. Поэтому мы рассмотрим более детально так называемые *регулярные* накрытия. Сразу скажем, что все универсальные накрытия регулярны.

Напомним, что каждое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп. Именно, если $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0)$, то существует канонический гомоморфизм $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, отображающий класс петель в вершине γ в X в класс петель $f \circ \gamma$ в Y . Если f — накрытие, то, по лемме о накрывающей гомотопии, образ нестягиваемой петли нестягиваем. Другими словами, гомоморфизм f_* является мономорфизмом (то есть инъективным гомоморфизмом) из $\pi_1(X, x_0)$ в $\pi_1(Y, y_0)$.

Таким образом, $f_*(\pi_1(X, x_0))$ является подгруппой в $\pi_1(Y, y_0)$, изоморфной группе $\pi_1(X, x_0)$. Эта подгруппа называется *группой накрытия*. Геометрически, она состоит из всех тех петель с вершинами в y_0 , подъемы которых с началом x_0 оказываются петлями. Заметим, что эта подгруппа может зависеть от выбора точки $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, хотя все группы, полученные таким способом, изоморфны между собой.

Накрытие $f: X \rightarrow Y$ называется *регулярным*, если выполняются следующие (эквивалентные между собой) свойства

- $f_*(\pi_1(X, x_0))$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(Y, y_0)$.
- $f_*(\pi_1(X, x_0))$ не зависит от $x_0 \in f^{-1}(y_0)$.

Преобразование скольжения накрытия $f: X \rightarrow Y$ — это такой гомеоморфизм (эквивалентность) $h: X \rightarrow X$, что $f = f \circ h$. Наглядно, преобразование скольжения — это гомеоморфизм X на себя, который “переставляет листы” накрытия; более формально, переставляет точки множества $f^{-1}(y)$ для любого $y \in Y$. Преобразования скольжения, очевидно, образуют группу. Накрытие $f: X \rightarrow Y$ регулярно тогда и только тогда, когда эта группа действует “транзитивно на листах”, то есть

- для любых $y \in Y$, $x, x' \in f^{-1}(y)$ существует такое (единственное) преобразование скольжения $h: X \rightarrow X$, что $h(x) = x'$.

Последнее свойство можно рассматривать как другое (эквивалентное) определение регулярного накрытия.

Нетрудно показать, что группа преобразований скольжения изоморфна факторгруппе $\pi_1(Y, y_0)/f_*(\pi_1(X, x_0))$, где $y_0 = f(x_0)$. В частности, если $f: X \rightarrow Y$ — универсальное накрытие, то группа преобразований скольжения изоморфна $\pi_1(Y)$.

Пример 3.4.12. В случае накрытия $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, заданного равенством $f(x) = (\cos x, \sin x)$, преобразованиями скольжения являются отображения из \mathbb{R} в \mathbb{R} вида $x \mapsto x + 2\pi k$, где k — целое. Таким образом, здесь группой скольжений является группа \mathbb{Z} , действующая на \mathbb{R} сдвигами.

Аналогично, группой преобразований скольжения стандартного накрытия $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ является группа \mathbb{Z}^2 , действующая на \mathbb{R}^2 параллельными переносами.

Группа преобразований скольжения канонического накрытия $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ состоит из двух элементов: тождественного отображения (единицы) и центральной симметрии $x \mapsto -x$.

Пусть теперь Y — пространство с внутренней метрикой, а X снабжено внутренней метрикой, поднятой из Y . Тогда каждое преобразование скольжения оказывается изометрией X на себя (докажите это!). В случае универсального накрытия этим определено действие группы $\pi_1(Y)$ на X изометриями.

Этот факт (то есть то, что фундаментальная группа пространства с внутренней метрикой действует на универсальном покрывающем пространстве изометриями) очень важен. Некоторые из его многочисленных применений можно найти и в этой книге.

Существует другой (но эквивалентный) подход к этим вопросам, базирующийся на том, что пространство Y и накрытие $f: X \rightarrow Y$ определяются группой преобразований скольжения. Именно, Y можно рассматривать как факторпространство X по действию этой группы, а f — как проектирование на факторпространство. Например, $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Конечно, не каждую группу, действующую на топологическом пространстве, можно получить как группу преобразований скольжения некоторого накрытия. Следующие определения дают необходимые и достаточные условия для такой возможности.

Определение 3.4.13. Пусть группа G действует на множестве X . Это действие называется *свободным*, если $gx \neq x$ для всех $x \in X$, $g \neq e$.

Определение 3.4.14. Пусть группа G действует на топологическом пространстве X . Это действие называется *вполне разрывным*, если каждая точка x имеет такую окрестность U , что $gU \cap U = \emptyset$ для всех таких $g \in G$, что $gx \neq x$.

Легко видеть, что группа преобразований скольжения накрытия действует свободно и вполне разрывно. Обратно, каждая группа, действующая свободно и вполне разрывно, оказывается группой преобразований скольжения накрытия.

Предложение 3.4.15. Если группа G действует на топологическом пространстве X свободно и вполне разрывно, то проекция $X \rightarrow X/G$ является накрытием. Кроме того, это накрытие регулярно и группа его преобразований скольжения совпадает с G .

Доказательство. Хотя доказательство очень просто, оно может служить хорошей проверкой того, насколько хорошо поняты определения.

Пусть $f: X \rightarrow X/G$ — проектирование. Если $x \in X$ и U — окрестность точки x , упомянутая в определении вполне разрывного действия, то ее образ $V = f(U)$ будет правильной окрестностью точки $f(x)$. В самом деле, $f^{-1}(V)$ представляет собой дизъюнктное объединение множеств gU для всех $g \in G$ и $f|_{gU}$ — гомеоморфизм из gU в V .

Ясно, что каждый элемент из G (рассматриваемый как гомеоморфизм X на себя) является преобразованием скольжения. Если $y \in Y$ и $x, x' \in f^{-1}(y)$, то найдется такой элемент $g \in G$, что $gx = x'$. Это означает, что G действует транзитивно на листах; следовательно, f — регулярное накрытие. С другой стороны, существует по крайней мере одно преобразование скольжения, которое отображает x в x' ; таким образом, каждое преобразование скольжения представимо элементом из G . \square

Рассмотрим накрытие $f: X \rightarrow X/G$, где G действует на X свободно и вполне разрывно. Мы уже видели, что каждая внутренняя метрика на X/G может быть так поднята на X , что f становится локальной изометрией. Полученная метрика *G -инвариантна*; это означает, что G действует изометриями по отношению к этой метрике.

Обратно, каждая G -инвариантная внутренняя метрика на X поднимается до (единственной) внутренней метрики на X/G . Последняя метрика — это просто стандартная метрика факторпространства, определенная в параграфе 3.3 (см. также упражнение 3.4.6). Следующее предложение подводит итог всем этим наблюдениям.

Предложение 3.4.16. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — регулярное накрытие и G — его группа преобразований скольжения. Тогда внутренние метрики

на Y находятся в таком взаимно однозначном соответствии с G -инвариантными внутренними метриками на X , что для соответствующих метрик d_X на X и d_Y на Y отображение f является локальной изометрией из (X, d_X) на (Y, d_Y) .

3.4.3. Локальные изометрии полных пространств. Вообще говоря, локальная изометрия не обязательно является накрытием. В этом можно убедиться, рассмотрев пример 3.4.3 и заменив \mathbb{R} (область задания f) на открытый интервал. Тем не менее для *полного* пространства X с внутренней метрикой локальные изометрии $f: X \rightarrow Y$ напоминают накрытия. В частности, геодезические (и кратчайшие) в Y могут быть подняты в X .

Лемма 3.4.17. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — локальная изометрия, причем X — полное пространство с внутренней метрикой. Тогда для любой геодезической (кратчайшей) $\gamma: [0, a] \rightarrow Y$ и любой такой точки x_0 , что $f(x_0) = \gamma(0)$, существует единственная геодезическая (соотв., кратчайшая) $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow X$, удовлетворяющая условиям: $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ и $f(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично построению подъема пути в теории накрывающих пространств. Предположим, что γ параметризована длиной дуги. Рассмотрим такой участок $[0, t)$ интервала $[0, a]$, что путь $\gamma|_{[0, t)}$ может быть поднят в X . Это означает, что существует такой путь $\tilde{\gamma}_t: [0, t) \rightarrow X$, что $\gamma|_{[0, t)} = f \circ \tilde{\gamma}_t$, причем $\tilde{\gamma}_t(0) = x_0$. Множество таких участков $[0, t)$ не пусто, так как сужение f на достаточно малую окрестность точки x_0 является гомеоморфизмом на образ. Пусть $[0, t_0)$ — объединение всех таких участков, то есть максимальный интервал, который еще допускает подъем. Тем самым мы имеем такой путь $\tilde{\gamma}_{t_0}: [0, t_0) \rightarrow X$, что $\gamma|_{[0, t_0)} = f \circ \tilde{\gamma}_{t_0}$. Выберем такую последовательность $\{t_i\}$, что $t_i < t_0$ и $t_i \rightarrow t_0$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда $\tilde{\gamma}_{t_0}(t_i)$ является последовательностью Коши и, так как X — полное, она сходится к точке p . Ясно, что точка p не зависит от выбора последовательности $\{t_i\}$. Так как точки $f \circ \tilde{\gamma}_{t_0}(t_i) = \gamma(t_i)$ сходятся к $\gamma(t_0)$ при $i \rightarrow \infty$, мы можем поднять точку $\gamma(t_0)$ в точку p , и таким образом, γ допускает подъем на замкнутом интервале $[0, t_0]$. Поскольку f — локальный гомеоморфизм на окрестность точки p , то при $t_0 \neq a$ можно было бы поднять больший интервал $[0, t_0 + \varepsilon)$ пути γ . Последнее противоречит максимальнойности $[0, t_0)$, откуда $t_0 = a$. \square

Из этой леммы вытекает следующее полезное утверждение.

Теорема 3.4.18. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — сюръективная локальная изометрия полного локально компактного пространства X с внутренней метрикой.

Предположим, что любая точка из Y имеет такую окрестность, что каждая проходящая в этой окрестности геодезическая является единственной кратчайшей соединяющей ее концы. Тогда f — накрытие.

Замечание 3.4.19. На самом деле теорема остается верной и при более слабом предположении, что существует единственная кратчайшая, соединяющая любые две точки нашей окрестности (но допускается существование геодезических, которые не являются кратчайшими). Однако в этом случае доказательство усложняется.

Доказательство. Согласно определению накрытия, нам надо показать, что точка $q \in Y$ имеет правильную окрестность U_q , то есть окрестность, прообраз которой состоит из попарно непересекающихся открытых множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается на U_q . Неформальная идея доказательства состоит в том, чтобы представить маленький шар с центром в q как пучок кратчайших, исходящих из q и идущих во все точки этого шара. Как только мы выбрали точку p в полном прообразе q , каждая из этих кратчайших может быть поднята в кратчайшую с началом p . Таким образом, весь шар оказывается поднятым (как “еж”).

Выберем в качестве U_q метрический шар $B = B_r(q)$. Радиус r возьмем столь малым, что каждая точка $y \in \bar{B}_r(q)$ соединима с q единственной геодезической. В частности, эта геодезическая — кратчайшая. Возьмем точку $p \in f^{-1}(q)$. По лемме 3.4.17, примененной к произвольной точке $y \in \bar{B}$, кратчайшая $[q, y]$ может быть поднята в X в кратчайшую $[p, x]$. Определим отображение g_p равенством $x = g_p(y)$ и положим $V_p = g_p(B)$ и $\bar{V}_p = g_p(\bar{B}_r(q))$. Очевидно, $V_p \subset B_r(p)$. С другой стороны, если $x \in V_p$, то f -образ кратчайшей $[px]$ является геодезической и, следовательно, кратчайшей. Тем самым $f(x) \in V_q$. Это значит, что $V_p = B_r(p)$, в частности множество V_p открыто.

Теперь легко видеть, что $f(g_p(y)) = y$ и $g_p(f(x)) = x$ для всех $y \in \bar{V}_q$ и $x \in \bar{V}_p$. Таким образом, сужение f на \bar{V}_p является биекцией на $\bar{B}_r(q)$ и, следовательно, гомеоморфизмом (поскольку шар $\bar{B}_r(q)$ компактен). Значит $f|_{V_p}$ — гомеоморфизм на B .

Остается проверить, что все V_p попарно не пересекаются и что $f^{-1}(B) = \bigcup_{p \in f^{-1}(q)} V_p$.

Действительно, допустим, что $x \in V_{p_1} \cap V_{p_2}$. По построению V_{p_1} и V_{p_2} найдутся две кратчайшие $[p_1, x]$ и $[p_2, x]$, являющиеся подъемами кратчайшей $[q, f(x)]$. Поднимая кратчайшую $[f(x), q]$ “начиная с другого конца”, то есть с началом x , и используя утверждение об единственности из леммы 3.4.17, мы заключаем, что $p_1 = p_2$.

Наконец, покажем, что $f^{-1}(B) = \bigcup_{p \in f^{-1}(q)} V_p$. Так как мы уже знаем, что $f(V_p) = B$ для всех p , нам остается показать, что точка x

принадлежит одному из множеств V_p , если только $f(x) \in B$. Рассмотрим подъем $[x, p]$ кратчайшей $[f(x), q]$. Тогда p принадлежит f^{-1} и, значит, $x \in V_p$. \square

3.5. Отображения, сохраняющие длины кривых

Поскольку функционал длины является для нас одним из основных понятий, нам следует рассмотреть отображения, сохраняющие эту структуру, то есть сохраняющие длины кривых.

Определение 3.5.1. Говорят, что отображение f между двумя пространствами с внутренней метрикой *сохраняет длины* кривых, если $L(\gamma) = L(f(\gamma))$ для каждого пути γ .

Отметим, что мы не требуем биективности f , иначе мы бы не получили ничего нового по сравнению с обычной изометрией.

Упражнение 3.5.2. 1. Докажите, что биективное отображение, сохраняющее длины, является изометрией.

2. Докажите, что биективное отображение, сохраняющее длины и являющееся локальным гомеоморфизмом, есть локальная изометрия.

3. Дайте определение отображения, локально сохраняющего длины, и докажите, что такие отображения — это в точности отображения, сохраняющие длины.

Например, путь, параметризованный длиной дуги, является сохраняющим длины отображением из интервала в пространство с внутренней метрикой. Это подсказывает, что полезно ввести следующее важное понятие.

3.5.1. Изометрические вложения. Инъективные отображения, сохраняющие длины, часто называют также *изометрическими вложениями*. Так как в связи с этим понятием иногда возникает терминологическая путаница, то мы подчеркнем, что изометрическое вложение — это *не* то же самое, что *изометрия на образ*! Например, простая дуга $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ — это изометрическое вложение, но не изометрия на образ (по отношению к сужению евклидовой метрики). Изометрические вложения, которые изучаются в дифференциальной геометрии (такие, как изометрическое вложение поверхности), — это на самом деле отображения, сохраняющие длины. С другой стороны, уже для сферы S^2 нет вложения $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое было бы изометрией на образ. Это, однако, становится возможным, если перейти от вложений в \mathbb{R}^n к вложениям в бесконечномерные пространства. Этим объясняется ценность конструкции, описанной ниже.

Пример 3.5.3 (Изометрическое вложение, являющееся изометрией на образ). Пусть X — компактное пространство с внутренней метрикой. Рассмотрим множество $C(X)$ всех непрерывных функций $X \rightarrow \mathbb{R}$. Это множество превратим в метрическое пространство, введя на нем *равномерное* расстояние между функциями: $d_\infty(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$. Отображение $E: X \rightarrow C(X)$, определенное равенством $E(x) = d(x, \cdot)$ (другими словами, значение $E(x)$ в точке y равно $d(x, y)$), оказывается вложением и изометрией на образ.

Упражнение 3.5.4. Проверьте, что

(i) $(C(X), d_\infty)$ — действительно метрическое пространство. (Кроме того, это также нормированное векторное пространство; мы используем обозначение d_∞ , так как на самом деле это L^∞ -норма на векторном пространстве.)

(ii) $d_\infty(d(x, \cdot), d(y, \cdot)) = d(x, y)$, то есть

$$\sup_z (|d(x, z) - d(y, z)|) = d(x, y).$$

3.5.2. Сюръективные отображения, сохраняющие длины. В то время, как биективные отображения, сохраняющие длины, — это просто изометрии, сохраняющие длины сюръективные отображения могут оказаться крайне “дикими” даже для очень хороших пространств. Одна из причин состоит в том, что образ может многократно наслаиваться. Простейший пример появления складок возможен уже для отображения $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, сохраняющего длины. Например, рассмотрите отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное равенствами $f(t) = t$, если $t \leq 0$, $f(t) = -t$, если $t \in [0, 1]$, и $f(t) = t - 2$, если $t \geq 1$.

На первый взгляд может показаться неожиданным, что каждая двумерная полиэдральная поверхность допускает сохраняющее длины кусочно-линейное отображение в многоугольную область на плоскости. Это утверждение, однако, становится гораздо более ожидаемым после эксперимента: с помощью ножниц, тонкой бумаги и клея сделайте модель многогранника и затем расплющите эту модель, наступив на нее.

Еще более удивительно, что каждая гомеоморфная сфере поверхность допускает сохраняющее длины отображение на стандартную сферу. Конечно, такое отображение совсем не столь просто, как в случае полиэдров: в случае общей поверхности оно будет иметь всюду плотное множество складок и сингулярных точек. Доказательство существования для поверхностей такого отображения, сохраняющего длины, выходит за рамки этого курса, однако мы даем здесь набросок абсолютно элементарного доказательства того, что каждое двумерное полиэдральное пространство может быть уложено на многоугольник.

Предложение 3.5.5. *Каждое конечное двумерное полиэдральное пространство допускает сохраняющее длины кусочно-линейное отображение*

на плоский многоугольник. Другими словами, каждая двумерная полиэдральная метрика может быть индуцирована некоторым отображением в \mathbb{R}^2 .

Доказательство. Пусть P — 2-полиэдр, и пусть $A = \{a_i\}$ — конечный набор его точек, включающий все вершины полиэдра. Определим $Q_i = \{x \in P: |xa_i| \leq |xa_j| \text{ для всех } j \neq i\}$. Множества Q_i называются областями Дирихле–Вороного. Легко видеть, что каждое множество Q_i ограничено графом L_i , ребра которого являются геодезическими.

Множество A можно выбрать так, что каждая область Q_i допускает триангуляцию с единственной вершиной a_i внутри Q_i . Чтобы добиться этого, начнем с достаточно густой сети A , содержащей не только все вершины P , но и густую сеть точек на каждом ребре графа. Может случиться, что некоторые пары точек $a_i \in A$ соединимы более чем одной кратчайшей. В этом случае мы добавим к A новые точки так, что для нового множества A точки $a_i, a_j \in A$ соединимы единственной кратчайшей, если только L_i и L_j имеют общие точки.

Добавляя к графу $L = \bigcup L_i$ новые ребра $[a_i x_j]$, где x_j — вершины L_i , мы получим такую триангуляцию P , что каждые два треугольника с различными вершинами a_i или не имеют более одной общей точки (вершины), или имеют общее ребро, принадлежащее L .

Заметим, что все треугольники с общим ребром $[bc] \subset L$ изометричны между собой (по определению Q_i). Возьмем луч l в \mathbb{R}^2 с началом в точке a . Представим себе, что наш полиэдр P сделан из бумаги. Тогда мы можем вырезать каждый треугольник $\Delta a_i bc$ из P и затем перегнуть его по биссектрисе угла a_i так, чтобы направления сторон $a_i b$ и $a_i c$ совпали. Теперь мы можем поместить все перегнутые таким образом треугольники в плоскость \mathbb{R}^2 , по одну сторону от l и так, что все вершины a_i совпадут с a , а все стороны $[a_i b]$, $[a_i c]$ будут направлены вдоль l . Таким образом, все ребра, вдоль которых мы разрезали P , теперь лежат на l и начинаются в a . Значит мы можем снова склеить по всем таким ребрам, и это даст нам искомое отображение. \square

3.6. Произведения и конусы

3.6.1. Прямое произведение. Среди различных математических конструкций для построения новых объектов (таких как произведение или факторпространство в алгебре) имеется несколько естественных способов конструирования новых пространств с внутренней метрикой. Простейшим из них является прямое произведение. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — пространства с внутренней метрикой. Снабдим прямое произведение $Z = X \times Y$ метрикой

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)},$$

где $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$; эта формула мотивирована теоремой Пифагора.

Легко видеть, что d действительно метрика. Эта метрика называется *метрикой прямого произведения*, а метрическое пространство (Z, d) называется прямым метрическим произведением пространств X и Y .

Предложение 3.6.1. *Метрика прямого произведения строго внутренних метрик является строго внутренней. Прямое метрическое произведение двух пространств с внутренней метрикой — снова пространство с внутренней метрикой.*

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая строго внутренних метрик; вторую часть оставляем в качестве упражнения.

Согласно теореме 2.4.16 достаточно проверить что для любых двух точек $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ в Z найдется середина. Рассмотрим середины x_m и y_m между x_1, x_2 и y_1, y_2 , соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} d^2((x_m, y_m), z_1) &= d_X^2(x_m, x_1) + d_Y^2(y_m, y_1) \\ &= \frac{1}{4}(d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)) = \frac{1}{4}d^2(z_1, z_2), \end{aligned}$$

так что $d((x_m, y_m), z_1) = \frac{1}{2}d(z_1, z_2)$. Аналогично, $d((x_m, y_m), z_2) = \frac{1}{2}d(z_1, z_2)$. Из этого следует, что (x_m, y_m) — середина между z_1, z_2 . \square

Упражнение 3.6.2. Чтобы освоиться с понятием метрического произведения, рассмотрите следующие примеры: $\mathbb{R} \times S^1$, $\mathbb{R} \times S^2$, $S^2 \times S^2$. В частности, попытайтесь найти все кратчайшие и все изометрии этих пространств. Последнее прямое произведение содержит целое семейство вложенных поверхностей (торов), локально изометричных евклидовой плоскости. Найдите эти торы: это упражнение очень полезно для понимания последующего.

Построенная указанным способом метрика d на произведении пространств радует нас следующими приятными свойствами: рассмотрим слой $S_y = \{(x, y) : y = \text{const}\}$ с метрикой, являющейся сужением на него метрики d . Тогда отображение проектирования S_y на X — изометрия (в частности, сужение метрики d на слой — внутренняя метрика). Это немедленно следует из определения метрики произведения. Ясно, что то же самое верно для “вертикальных” слоев S^x .

Кроме того, группа изометрий пространства (Z, d) по крайней мере столь же богата, как произведение групп изометрий пространств X и Y .

Точнее, каждая изометрия I_X пространства X распространяется на Z по формуле $I_X \times \text{id}$. Более того, каждой паре изометрий I_X и I_Y можно канонически сопоставить изометрию $I_X \times I_Y : (x, y) \rightarrow (I_X(x), I_Y(y))$ пространства Z и, следовательно, группа изометрий пространства Z

содержит изоморфную копию произведения групп изометрий пространств X и Y . Читатель легко может проверить, что в случае $X = Y = \mathbb{R}$ группа изометрий произведения много богаче произведения их групп изометрии.

Замечание 3.6.3. Не следует думать, что наша формула для метрики произведения — единственная возможность определить на Z метрику произведения со столь хорошими свойствами. Например, полагая $d((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$, мы получаем внутреннюю метрику, которая обладает всеми перечисленными свойствами. Докажите это!

Более общо, каждая норма $\| \cdot \|$ на \mathbb{R}^2 , сужения которой на лучи $\{x_0, y > 0\}$ и $\{x > 0, y_0\}$ монотонны, порождает метрику произведения по формуле $d(z, z') = \|d_X(x, x'), d_Y(y, y')\|$. Более того, если положить перечисленные свойства метрики произведения в качестве аксиом, то все возможные конструкции получаются указанным путем. Причина, почему мы использовали теорему Пифагора и, тем самым, стандартную евклидову норму в качестве $\| \cdot \|$, будет ясна позже (забегая вперед, упомянем, что только при этом определении сохраняется ограниченность кривизны).

Читатель может, в качестве нетрудного упражнения, проверить справедливость следующего описания всех кратчайших прямого произведения (Z, d) .

Лемма 3.6.4. *Параметризованный пропорционально длине путь в Z является кратчайшей (геодезической) тогда и только тогда, когда он является произведением двух кратчайших (геодезических), соответственно, в X и Y , также параметризованных пропорционально длине.*

Отметим, что проекции кратчайшей γ в Z на сомножители X и Y являются кратчайшими независимо от того, параметризована ли γ пропорционально длине или нет. Однако обратное утверждение существенно использует это предположение; например, в произведении $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, каждая кривая $(x(t), y(t))$ с монотонно возрастающими координатными функциями $x(t), y(t)$ является произведением двух кратчайших $x(t)$ и $y(t)$.

Выпуклые подмножества. В связи с последней леммой мы хотим обсудить одно важное понятие. Хотя в нашей простейшей ситуации введение этого понятия может показаться излишним, оно окажется очень полезным в более сложных случаях.

Начнем со следующего важного определения:

Определение 3.6.5. Подмножество A пространства (X, d) называется *выпуклым*, если сужение метрики d на A — строго внутренняя конечная метрика.

Если метрика пространства X — строго внутренняя, то множество A выпукло тогда и только тогда, когда для каждой двух точек $x, y \in A$ найдется кратчайшая между x и y , которая полностью принадлежит A . (Докажите это!) Это замечание объясняет название “выпуклое множество”.

Выпуклость является “глобальным” свойством множества. Определим аналогичное локальное свойство.

Определение 3.6.6. Предположим, что метрика пространства X — строго внутренняя. Множество $A \subset X$ называется *локально выпуклым*, если у каждой точки $x \in A$ имеется такая окрестность $U \subset A$, что каждые две точки $y, z \in U$ соединимы содержащейся в A кратчайшей.

Упражнение 3.6.7. Дайте определение локальной выпуклости для общего метрического пространства.

Замечание 3.6.8. Для читателей, знакомых с дифференциальной геометрией, упомянем, что там имеется специальное название для локально выпуклых подмногообразий (в частности, поверхностей) в римановых и финслеровых многообразиях. Такие подмногообразия называются еще *вполне геодезическими*, и они могут быть определены как подмногообразия, в которых геодезические индуцированной метрики являются в то же время геодезическими объемлющего пространства. Подмногообразие риманова многообразия является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда его вторая основная форма всюду полностью вырождается, то есть все главные кривизны равны нулю.

Следующая лемма немедленно вытекает из определения.

Лемма 3.6.9. Если X — пространство со строго внутренней конечной метрикой и $F: X \rightarrow Y$ — сохраняющее расстояния отображение, то образ $\text{Im } F := F(X)$ является выпуклым в Y .

Упражнение 3.6.10. Докажите эту лемму.

Предложение 3.6.11. Пусть X и Y — пространства с внутренней метрикой, а $\alpha: [a, b] \rightarrow X$, $\beta: [c, d] \rightarrow Y$ — кратчайшие. Тогда произведение их образов $R = \text{Im } \alpha \times \text{Im } \beta$ выпукло в $X \times Y$ и изометрично евклидову прямоугольнику.

Доказательство. Можно считать, что α и β параметризованы длиной дуги. Рассмотрим отображение $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow Z$, заданное формулой $F(t, s) = (\alpha(t), \beta(s))$. Это отображение — изометрия, так как

$$d^2(F(t, s), F(t', s')) = d_X^2(g(t), g(t')) + d_Y^2(h(s), h(s')) = (t - t')^2 + (s - s')^2.$$

Теперь для завершения доказательства достаточно применить лемму 3.6.9. \square

3.6.2. Конус над метрическим пространством. Конус $\text{Con}(X)$ над топологическим пространством X — это результат склеивания в одну точку всех точек слоя $X \times \{0\}$ в прямом произведении $X \times [0, \infty)$. Эта точка называется вершиной конуса.

Как следует снабдить конус метрикой? Идею, как это сделать, подсказывает следующее наводящее соображение. Будем думать о X как подмножестве единичной сферы $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ со стандартной (угловой) метрикой. Чтобы представить себе конус над X , мы мысленно рисуем лучи, идущие из центра сферы в каждую точку $x \in X$. Таким образом, каждая точка a конуса может быть представлена парой (x, r) , где x — точка множества X , через которую проходит луч Oa , а $r = |aO|$ — расстояние от a до центра. Думая об a и x как о векторах, мы будем писать $a = rx$. Можете ли вы теперь выразить евклидово расстояние между точками $a = (x, t)$ и $b = (y, s)$ в терминах x, y, t, s ? Рассмотрим треугольник $\triangle Oab$. Имеем: $|Oa| = t$, $|Ob| = s$, а угол $\angle aOb$ между этими сторонами — это (угловое) расстояние $d(x, y)$ в X . Следовательно, по теореме косинусов,

$$|ab| = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(d(x, y))}.$$

Именно этой формулой мы и воспользуемся, чтобы определить метрику конуса в общем случае.

Определение 3.6.12. Пусть X — метрическое пространство, причем $\text{diam } X \leq \pi$. Метрика d_c конуса $\text{Con}(X)$ задается формулой

$$(3.1) \quad d_c(p, q) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(d(x, y))},$$

где $p, q \in \text{Con}(X)$, $p = (x, t)$, $q = (y, s)$.

Предложение 3.6.13. Если X — метрическое пространство, причем $\text{diam } X \leq \pi$, то d_c — метрика.

Доказательство. Положительность и симметричность d_c очевидны. Докажем неравенство треугольника. Рассмотрим три точки $y_1 = (x_1, r_1)$, $y_2 = (x_2, r_2)$ и $y_3 = (x_3, r_3)$ в $\text{Con}(X)$. Обозначим $\alpha = d(x_1, x_2)$ и $\beta = d(x_2, x_3)$. Построим три точки $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ на плоскости \mathbb{R}^2 на расстояниях, соответственно, r_1, r_2 и r_3 от начала O и так, чтобы $\angle \bar{y}_1 O \bar{y}_2 = \alpha$, $\angle \bar{y}_2 O \bar{y}_3 = \beta$, причем лучи $O\bar{y}_1$ и $O\bar{y}_3$ должны лежать в различных полуплоскостях по отношению к $O\bar{y}_2$. Тогда $|\bar{y}_1 \bar{y}_2| = d_c(y_1, y_2)$ и $|\bar{y}_2 \bar{y}_3| = d_c(y_2, y_3)$. Рассмотрим два возможных случая: $\alpha + \beta \leq \pi$ и $\alpha + \beta > \pi$.

Если $\alpha + \beta \leq \pi$, то $\angle \bar{y}_1 O \bar{y}_3 = \alpha + \beta \geq d(x_1, x_3)$; следовательно $|\bar{y}_1 \bar{y}_3| \geq d_c(y_1, y_3)$. Теперь неравенство треугольника для y_1, y_2 и y_3

следует из неравенства треугольника в \mathbb{R}^2 :

$$d_c(y_1, y_2) + d_c(y_2, y_3) = |\bar{y}_1\bar{y}_2| + |\bar{y}_2\bar{y}_3| \geq |\bar{y}_1\bar{y}_3| \geq d_c(y_1, y_3).$$

Если $\alpha + \beta > \pi$, неравенство треугольника на плоскости не помогает, но в этом случае есть лучшая оценка для $|\bar{y}_1\bar{y}_2| + |\bar{y}_2\bar{y}_3|$. Действительно, так как ломаная $\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3$ проходит вне сектора $\bar{y}_1O\bar{y}_3$, то $|\bar{y}_1\bar{y}_2| + |\bar{y}_2\bar{y}_3| \geq |\bar{y}_1O| + |O\bar{y}_3|$. Теперь мы имеем

$$d_c(y_1, y_2) + d_c(y_2, y_3) \geq |\bar{y}_1O| + |O\bar{y}_3| = r_1 + r_3 \geq d_c(y_1, y_3)$$

(последнее неравенство следует из определения d_c). \square

Упражнение 3.6.14. Пусть $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \text{Con}(X)$ — кривая в конусе, $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), r(t))$, где γ — кривая в X . Докажите, что

$$L(\tilde{\gamma}) \geq \sqrt{r(a)^2 + r(b)^2 - 2r(a)r(b)\cos(L(\gamma))},$$

если $L(\gamma) \leq \pi$, и

$$L(\tilde{\gamma}) \geq r(a) + r(b),$$

если $L(\gamma) \geq \pi$.

Подсказка. Повторите доводы, доказывающие неравенство треугольника.

Если пространство X снабжено внутренней метрикой, то метрика d_c — также внутренняя. Для доказательства можно было бы выписать явные выражения для середины и для кратчайшей между двумя точками, как мы уже делали в случае прямого произведения. Однако в случае конуса это — утомительный путь со сложными формулами. Поэтому лучше использовать плоские выпуклые поверхности, сходные с теми, что мы имели в случае прямого произведения.

Чтобы понять, как такие поверхности возникают, вернемся к примеру, в котором X было подмножеством единичной сферы. Предположим для простоты, что X — вся сфера; тогда конус будет всем пространством \mathbb{R}^3 . Так как кратчайшая γ — это просто дуга большого круга, конус над $\gamma: [0, a] \rightarrow S^2$ — это плоский сектор. Точка этого сектора имеет “конические координаты” $(\gamma(\tau), t)$. Если $\gamma(\tau)$ параметризована длиной дуги, то τ и t — это просто полярные координаты в плоском секторе, причем угол отсчитывается от направления луча с началом O , проходящего через $\gamma(0)$.

Посмотрим, как такой подход работает в общем случае. Пусть γ — кратчайшая в X , естественно параметризованная интервалом $[0, L]$. Введем полярные координаты (r, φ) на евклидовой плоскости и обозначим через Q множество точек плоскости с φ -координатами между 0 и L . Рассмотрим отображение $F: Q \rightarrow \text{Con}(X)$, заданное (в полярных координатах) формулой $F(r, \varphi) = (\gamma(\varphi), r)$. Образ плоского сектора при этом отображении является конусом над γ .

Простые вычисления показывают, что отображение F сохраняет расстояния. Действительно,

$$\begin{aligned} d_c^2(F(r, \varphi), F(r', \varphi')) &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos d_X(\gamma(\varphi), \gamma(\varphi')) \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') = d_{\mathbb{R}^2}((r, \varphi), (r', \varphi')). \end{aligned}$$

Из этого немедленно следует, что множество $F(Q)$ — плоское и выпуклое (лемма 3.6.9). В частности, образ каждого отрезка, содержащегося в Q , является кратчайшей в $\text{Con}(X)$ и, следовательно, метрика d_c — внутренняя.

Заметим, что фактически мы доказали следующую полезную лемму.

Лемма 3.6.15. *Если X — пространство с внутренней метрикой, причем $\text{diam } X \leq \pi$, и γ — кратчайшая в X , то конус над образом кратчайшей γ является выпуклой плоской поверхностью в конусе $\Sigma(X)$ над X .*

Обратно, рассмотрим кратчайшую $\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow \text{Con}(X)$ в конусе, не проходящую через вершину. По определению конуса $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), r(t))$, где $r(t) \in \mathbb{R}$ и γ — путь в X (путь γ называется *проекцией* пути $\bar{\gamma}$ на X). Проанализировав доказательство неравенства треугольника для конуса (предложение 3.6.13), можно заметить, что неравенство треугольника должно обращаться в равенство для любых троек точек $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$, $\gamma(t_3)$, для которых $t_1 < t_2 < t_3$. Отсюда следует, что $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ и, следовательно, γ — кратчайшая в X .

Таким образом, мы имеем взаимно-однозначное соответствие между теми кратчайшими в X , длины которых строго меньше π , и кратчайшими в $\text{Con}(X)$, не проходящими через вершину. Что касается кратчайших, проходящих через вершину, то легко видеть, что каждая точка $(x, r) \in \text{Con}(X)$ соединима с вершиной конуса единственной кратчайшей. Именно, это — “отрезок” $\{(x, t)\}_{t \in [0, r]}$. Два таких отрезка вместе составляют кратчайшую тогда и только тогда, когда угол между ними в вершине конуса равен π .²

Конус над большим пространством. Теперь отбросим предположение, что $\text{diam } X \leq \pi$. Формула (3.1) не годится в качестве определения метрики конуса $\text{Con}(X)$, если $\text{diam } X > \pi$; например, неравенство треугольника для метрики d_c в этом случае может не выполняться. Как же определить метрику конуса в общем случае? Руководящая идея: мы

²Обратите внимание: угол, по его определению, не может превышать π . Однако пример конуса над окружностью длины 4π показывает, что это может не соответствовать наглядному представлению об угле. Поэтому в двумерном случае вводятся дополнительные понятия *угла сектора* и *полного угла вокруг точки*. В упомянутом примере полный угол вокруг вершины конуса равен 4π , его можно разбить на секторы с углами α и $4\pi - \alpha$. Попробуйте сами дать определение угла сектора.

хотим, чтобы формула (3.1) выполнялась для “малых” расстояний в X , и мы хотим, чтобы конус над пространством с внутренней метрикой был пространством с внутренней метрикой.

Если X — пространство с внутренней метрикой, существование и единственность такой метрики в $\text{Con}(X)$ гарантируется леммой 3.1.2. На самом деле такая метрика допускает простое явное описание.

Определение 3.6.16. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Расстояние $d_c(a, b)$ между точками $a = (x, t)$ и $b = (y, s)$ на конусе $\text{Con}(X)$ задается формулой:

$$d_c(a, b) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(d(x, y))}, & d(x, y) \leq \pi, \\ t + s, & d(x, y) \geq \pi. \end{cases}$$

Иными словами, введем новую метрику \bar{d} в X равенством

$$\bar{d}(a, b) = \min\{d(a, b), \pi\}$$

и положим $\text{Con}(X, d_c) = \text{Con}(X, \bar{d})$, где метрика на конусе $\text{Con}(X, \bar{d})$ задана согласно определению 3.6.12. Так как \bar{d} — метрика, то из предложения 3.6.13 следует, что d_c — также метрика. Следующая теорема подводит итог этих наблюдений, касающихся внутренних метрик.

Теорема 3.6.17. *Метрика d_c на $\text{Con}(X, d)$ — внутренняя (соответственно, строго внутренняя) тогда и только тогда, когда метрика d — внутренняя (соответственно, строго внутренняя) на расстояниях меньших, чем π . Последнее значит, что для любых $x, y \in X$, таких что $d(x, y) < \pi$, существует кривая в X , соединяющая x и y и такая, что ее длина сколь угодно близка к (соответственно, равна) $d(x, y)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что d — строго внутренняя на расстояниях меньше, чем π . Пусть $x, y \in X$, $a, b \in \text{Con}(X)$, $a = (x, t)$, $b = (y, s)$. Если $d(x, y) < \pi$, применим лемму 3.6.15 к кратчайшей γ , соединяющей x и y . Из леммы следует, что существует кривая длины $d_c(a, b)$, соединяющая a и b . Если $d(x, y) \geq \pi$, то $d_c(a, b) = t + s$ и тогда найдется кривая длины $t + s$, соединяющая a и b . Именно, это — объединение двух отрезков, соединяющих a и b с вершиной. Таким образом, d_c — строго внутренняя.

Обратно, предположим, что метрика d_c — строго внутренняя. Рассмотрим любые две такие точки $x, y \in X$, что $d(x, y) < \pi$. Применим результат упражнения 3.6.14 к кратчайшей $\tilde{\gamma}$, соединяющей точки $a = (x, 1)$ и $b = (y, 1)$ на конусе. Так как $L(\tilde{\gamma}) = d_c(a, b) < 2$, то путь $\tilde{\gamma}$ не проходит через вершину и, следовательно, его проекция γ на X корректно определена (непрерывна). Неравенство из упражнения 3.6.14 показывает, что $L(\tilde{\gamma}) = d(x, y)$.

Доказательство для не строго внутренней метрики аналогично. Мы оставляем его читателю в качестве упражнения. \square

Упражнение 3.6.18. Пусть X — метрическое пространство, причем $\text{diam } X = \pi$. Предположим, что метрика конуса $\text{Con}(X)$ — внутренняя, а метрика X — нет. Докажите, что тогда найдутся три (различные) точки $x, y, z \in X$ такие, что $|xy| = |xz| = \pi$.

Упражнение 3.6.19. Пусть X — отрезок длины α , $0 < \alpha < 2\pi$. Докажите, что $\text{Con}(X)$ изометричен плоскому сектору с углом α при вершине с его внутренней (индуцированной) метрикой.

Это упражнение — частный случай следующего предложения, утверждающего, что каждое полиэдральное пространство локально выглядит как конус. Для простоты мы ограничимся 2-мерными полиэдральными пространствами. Чтобы обобщить это утверждение на большие размерности, надо рассмотреть конусы над *сферическими* полиэдральными пространствами.

Предложение 3.6.20. Пусть $p \in P$ — точка в двумерном полиэдральном пространстве P . Тогда для всех достаточно малых $r > 0$ шар $B_r(p)$ изометричен шару радиуса r с центром в вершине конуса $\text{Con}(G)$ над некоторым графом G .

Упражнение 3.6.21. Докажите это утверждение

Подсказка. Сначала докажите, что построение конуса “коммутирует” со склеиванием; то есть если пространство X получено склеиванием из пространства Y , то конус $\text{Con}(X)$ может быть получен склеиванием соответствующих лучей в конусе $\text{Con}(Y)$.

Граф G , упомянутый в предложении 3.6.20, называется *линком* пространства P в точке p . Если p принадлежит внутренности грани, соответствующий линк — окружность длины 2π . Во внутренней точке ребра линк представляет собой граф, имеющий две вершины, соединенные несколькими ребрами длины π (каждое ребро соответствует грани P , примыкающей к ребру, содержащему p). В случае, когда p — вершина, линк может быть любым графом.

3.6.3. Сферические надстройки. Упомянем еще одну конструкцию, хорошо известную в евклидовом случае. Она обобщает процедуру построения сферы S^n на базе ее экватора S^{n-1} путем добавления двух полюсов и проведения между полюсами полуокружностей (меридианов), проходящих через все точки экватора S^{n-1} . Более формально: рассмотрим прямое произведение $X \times I$ топологического пространства X и отрезка $I = [0, a]$ и стянем слои $X \times 0$ и $X \times a$ — каждый в одну точку. Полученное пространство $\Sigma(X)$ называется *сферическим конусом* или *надстройкой* над X .

Если (X, d) — пространство с внутренней метрикой, причем $\text{diam } X \leq \pi$, мы полагаем $a = \pi$ и задаем метрику d_Σ формулой

$$\cos d_\Sigma(p, q) = \cos t \cos s + \sin t \sin s \cos d(x, y)$$

для любых точек $p = (x, t)$, $q = (y, s)$ в $\Sigma(X)$. Эта формула, конечно, подсказана теоремой косинусов *сферической* геометрии.³

Упражнение 3.6.22. 1. Докажите, что надстройка $\Sigma(S^n)$ над стандартной сферой S^n изометрична стандартной сфере S^{n+1} .

2. Как и в случаях конуса и произведения, надстройка над геодезической в X является выпуклой (вполне геодезической) поверхностью в $\Sigma(X)$. Однако в нашем случае она уже не плоская. Эта поверхность локально изометрична стандартной единичной сфере. Докажите это.

3. Рассуждая как в случае конуса, докажите, что d_Σ — внутренняя метрика.

Замечание. Это упражнение предполагает некоторое знание сферической геометрии, в основном — теоремы косинусов для сферического треугольника.

3.6.4. Скрученные произведения. Упомянем еще одну конструкцию, которая обобщает прямые (метрические) произведения, конусы и надстройки.

Пусть X и Y — два (полных) пространства с внутренней метрикой, а $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная непрерывная функция. Рассмотрим липшицеву кривую γ в $X \times Y$. Обозначим через $\gamma_1: [a, b] \rightarrow X$ и $\gamma_2: [a, b] \rightarrow Y$ ее проекции на X и Y . Чтобы снабдить $X \times Y$ метрикой скрученного произведения, определим длину кривой γ по формуле

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|\gamma_1'|^2(t) + f^2(\gamma_1(t))|\gamma_2'|^2(t)} dt,$$

где $|\gamma_1'|$, $|\gamma_2'|$ определены почти всюду (см. 2.7.6). Метрика на $X \times Y$, индуцированная этим функционалом длины, называется метрикой *скрученного произведения*. Обозначим через $X \times_f Y$ пространство $X \times Y$, снабженное этой метрикой.

Ясно, что прямое метрическое произведение является частным случаем скрученного произведения (при $f \equiv 1$).

Иногда более естественно кроме положительных функций f рассматривать функции, обращающиеся в ноль в некоторых точках. В этом случае мы получим скрученное произведение $X \times Y$ с полуметрикой. Эта полуметрика, как обычно, порождает метрику путем отождествления точек, лежащих на нулевом расстоянии друг от друга. Новое пространство с полученной так метрикой также называется скрученным произведением.

³Часто надстройкой называют чисто топологическую конструкцию, а сферическим конусом — ее же, но с введенной здесь метрикой.

Упражнение 3.6.23. Пусть $\text{Con}(X)$ — конус над пространством X с внутренней метрикой, причем $\text{diam } X < \pi$. Докажите, что $\text{Con}(X) = [0, \infty) \times_f X$, где $f(t) = t$.

Упражнение 3.6.24. Пусть $\Sigma(X)$ — сферическая надстройка над пространством X с внутренней метрикой. Покажите, что $\Sigma(X) = [0, \pi] \times_f X$, где $f(t) = \sin t$.

3.6.5. Угол. Так как понятие угла принадлежит к основным понятиям евклидовой геометрии, хотелось бы иметь его обобщение и в случае метрического пространства. Чтобы понять, как можно измерять углы в чисто метрических терминах, рассмотрим два луча $\alpha: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\beta: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, выходящих из одной точки $a = \alpha(0) = \beta(0)$. Зафиксировав два положительных числа t, s и применив теорему косинусов к треугольнику $a\alpha(t)\beta(s)$, мы получим такое выражение для угла между лучами:

$$\arccos \frac{|a\alpha(t)|^2 + |a\beta(s)|^2 - |\alpha(t)\beta(s)|^2}{2|a\alpha(t)||a\beta(s)|}.$$

То, что это выражение не зависит от выбора t и s , счастливая случайность: стоило нам взять вместо лучей две другие гладкие кривые, и мы получили бы выражение, существенно зависящее от t и s . Поскольку угол между кривыми представляет собой инфинитезимальное понятие, естественно перейти к пределу при $t, s \rightarrow 0$.

Определение 3.6.25. Пусть x, y, z — три различные точки в метрическом пространстве (X, d) . Определим *угол сравнения* $\tilde{\angle}xyz$ (или $\tilde{\angle}(x, y, z)$) равенством

$$\tilde{\angle}xyz = \arccos \frac{d(x, y)^2 + d(y, z)^2 - d(x, z)^2}{2d(x, y)d(y, z)}.$$

Геометрический смысл этого определения состоит в следующем. Пусть $\Delta \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ — треугольник в \mathbb{R}^2 со сторонами $|\bar{x}\bar{y}|$, $|\bar{y}\bar{z}|$ и $|\bar{x}\bar{z}|$, равными расстояниям $d(x, y)$, $d(y, z)$ и $d(x, z)$, соответственно. (Такой треугольник единственен с точностью до движения.) Тогда $\tilde{\angle}xyz = \angle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Определение 3.6.26. Пусть $\alpha: [0, \varepsilon) \rightarrow X$ и $\beta: [0, \varepsilon) \rightarrow X$ — пути в пространстве X с внутренней метрикой, исходящие из точки $p = \alpha(0) = \beta(0)$. Определим угол $\angle(\alpha, \beta)$ между α и β равенством

$$\angle(\alpha, \beta) = \lim_{s, t \rightarrow 0} \tilde{\angle}(\alpha(s), p, \beta(t)),$$

если только этот предел существует.

Введем некоторые обозначения. Для фиксированных кривых α и β положим

$$\theta(s, t) = \tilde{\angle}(\alpha(s), p, \beta(t)).$$

Тогда

$$\angle(\alpha, \beta) = \lim_{s, t \rightarrow 0} \theta(s, t).$$

Если α и β — кратчайшие, параметризованные длиной, то $d(p, \alpha(s)) = s$, $d(p, \beta(t)) = t$, так что $\theta(s, t)$ определяется расстоянием $d(\alpha(s), \beta(t))$:

$$\theta(s, t) = \arccos \frac{s^2 + t^2 - d(\alpha(s), \beta(t))^2}{2st}.$$

Теперь определение угла (для натурально параметризованных кривых) можно переформулировать следующим образом: угол $\angle(\alpha, \beta)$ существует и равен $\theta_0 \in [0, \pi]$ тогда и только тогда, когда

$$d(\alpha(s), \beta(t))^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos \theta_0 + o(st), \quad s, t \rightarrow 0.$$

В основном мы будем иметь дело с углами между кратчайшими. Тем не менее полезно посмотреть, как может вести себя угол между другими кривыми в обычном евклидовом пространстве. Оказывается, что существование угла тесно связано с дифференцируемостью.

Предложение 3.6.27. Пусть $\alpha: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\beta: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованные пути, исходящие из одной и той же точки $a = \alpha(0) = \beta(0)$. Тогда,

1) если оба пути дифференцируемы в точке $t = 0$, то угол $\angle(\alpha, \beta)$ существует и равен углу между векторами скорости этих путей.

2) Если по крайней мере один из путей α, β не дифференцируем в точке $t = 0$, то угол $\angle(\alpha, \beta)$ не существует.

Упражнение 3.6.28. Докажите это предложение.

Есть много примеров пространств с внутренней метрикой, в которых угол $\angle(\alpha, \beta)$ может не существовать даже для двух кратчайших α, β . Вероятно, простейший пример такого рода можно получить, склеив два экземпляра прямой \mathbb{R} в нуле и во всех точках вида 2^{-n} , где n — целое.

Наше определение угла основывается на сравнении с евклидовой плоскостью. Поэтому в пространствах, которые даже инфинитезимально сильно отличаются от евклидова, так определенные углы могут не существовать. Следующее упражнение предоставляет целый класс примеров.

Упражнение 3.6.29. Пусть $(V, |\cdot|)$ — двумерное нормированное пространство. Докажите, что либо пространство $(V, |\cdot|)$ евклидово, либо оно содержит два луча, между которыми угол не существует.

Подсказка. Нормированное пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда

$$|w + v|^2 + |v - w|^2 = 2(|v|^2 + |w|^2)$$

для всех векторов v, w .

Следующие естественные свойства угла сразу следуют из определения; мы оставляем доказательства в качестве нетрудных упражнений.

Предложение 3.6.30. 1. Каждая кратчайшая образует нулевой угол с самой собой.

2. Если две кратчайшие $[a, b]$ и $[b, c]$ таковы, что их “объединение” (произведение) $[abc]$ — кратчайшая между a и c , то угол между $[b, a]$ и $[b, c]$ равен π .

Замечание 3.6.31. В этом курсе мы в основном будем иметь дело с пространствами (с внутренней метрикой), кривизны которых в некотором смысле ограничены. Для таких пространств угол между кратчайшими всегда корректно определен. В случае более общих пространств полезно ввести *верхний* угол, который всегда существует. Именно,

Определение 3.6.32. *Верхний угол* $\angle_{upper}(\alpha, \beta)$ определяется равенством

$$\angle_{upper}(\alpha, \beta) = \limsup_{s, t \rightarrow 0} \tilde{\angle}(\alpha(s), p, \beta(t)).$$

Замечание 3.6.33. Исторически понятие угла играло очень важную роль при создании метрической геометрии. Сейчас уже понятно, что, имея дело с сингулярными (не-римановыми) пространствами, в принципе можно избежать использования угла в большинстве рассуждений (без существенных усложнений). С другой стороны, понятие угла часто помогает сделать рассуждения более наглядными и краткими и использовать аналогию с римановыми пространствами.

3.6.6. Пространство направлений. Здесь мы используем понятие угла, чтобы определить фундаментальное понятие пространства направлений. Это понятие является для метрической геометрии таким же краеугольным камнем, как понятие касательного пространства в теории гладких многообразий, и продвинутая часть теории пространств Александрова начинается с этого понятия, которое заменяет там, в некотором смысле, понятие касательного пространства.

Зафиксируем в метрическом пространстве точку p и рассмотрим множество всех кривых с началом в p . Мы хотим выделить подмножество, состоящее из “хорошо ведущих себя кривых”, и ввести на нем угловую полуметрику.

Для этого нам потребуется неравенство треугольника для углов.

Важное замечание. Очень внимательно изучите доказательство следующей теоремы: в этом курсе оно — первый пример доказательства, основывающегося на сравнении некоторой конфигурации в пространстве с внутренней метрикой с аналогичной (в некотором смысле) конфигурацией на евклидовой плоскости. Доказательства такого типа используются в

метрической геометрии так же часто и носят столь же фундаментальный характер, как (ε, δ) -рассуждения в анализе.

Теорема 3.6.34. *Рассмотрим три кривые γ_1, γ_2 и γ_3 , исходящие из одной точки p . Если существуют углы $\alpha_1 = \angle(\gamma_2, \gamma_3)$, $\alpha_2 = \angle(\gamma_1, \gamma_3)$, $\alpha_3 = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$, то они удовлетворяют следующему неравенству треугольника:*

$$\alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2.$$

Замечание 3.6.35. В этой теореме мы предполагали существование углов. На самом деле такое же неравенство справедливо для верхних углов, которые существуют всегда.

Доказательство. Теорема тривиальна, если $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi$. Поэтому предположим, что $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$.

Каждый из углов является пределом соответствующей функции θ . Значит, для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно малых (положительных) s, t, r справедливы неравенства

$$|\alpha_1 - \theta(b, c)| \leq \varepsilon, \quad |\alpha_2 - \theta(a, c)| \leq \varepsilon, \quad |\alpha_3 - \theta(a, b)| \leq \varepsilon,$$

где $a = a(s) = \gamma_1(s)$, $b = b(t) = \gamma_2(t)$ и $c = c(r) = \gamma_3(r)$.

Именно здесь начинается *сравнение* с плоскостью! Выложим треугольники Δpac и Δpbc на евклидову плоскость. Это значит, что мы выбираем на евклидовой плоскости четыре точки \bar{p} , \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} так, чтобы

$$|\bar{p}\bar{a}| = d(p, a), \quad |\bar{p}\bar{b}| = d(p, b), \quad |\bar{p}\bar{c}| = d(p, c), \quad |\bar{c}\bar{a}| = d(c, a), \quad |\bar{c}\bar{b}| = d(c, b),$$

причем мы выбираем точки \bar{a} и \bar{b} по разные стороны от прямой $(\bar{p}\bar{c})$. Треугольники $\Delta \bar{p}\bar{a}\bar{c}$, $\Delta \bar{p}\bar{b}\bar{c}$ называются *треугольниками сравнения* для треугольников Δpac , Δpbc , соответственно.

Зафиксируем точки a, b и будем перемещать c по направлению к p . Формально это означает, что мы уменьшаем r при фиксированных s и t . Легко видеть, что если c достаточно приблизить к p (в то время, как a и b фиксированы), то \bar{p} и \bar{c} окажутся расположенными по одну сторону от прямой $\bar{a}\bar{b}$. (Обязательно нарисуйте картинку!)

С другой стороны, зафиксировав r и достаточно уменьшив s и t , мы можем достичь конфигурации, в которой \bar{p} и \bar{c} расположены по разные стороны от прямой $\bar{a}\bar{b}$.

По непрерывности, найдутся такие значения параметров s, t, r , что \bar{c} будет принадлежать отрезку $[\bar{a}, \bar{b}]$. Более формально: мы можем зафиксировать \bar{p} (например, выбрав $\bar{p} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$) и затем поместить \bar{c} на фиксированном луче, скажем, $\bar{c} = (d(p, c), 0)$. Теперь точки \bar{a} и \bar{b} определяются единственным образом и зависят непрерывно от расстояний $d(p, a)$, $d(p, b)$, $d(c, a)$, $d(c, b)$ и $d(p, c)$. Таким образом, когда

мы меняем s, t, r , все четыре точки перемещаются непрерывно (причем \bar{p} вообще не сдвигается). Если $\bar{c} \in [\bar{a}, \bar{b}]$, то мы очевидно имеем $|\bar{a}\bar{c}| + |\bar{c}\bar{b}| = |\bar{a}\bar{b}|$ и, следовательно,

$$|\bar{a}\bar{b}| = |\bar{a}\bar{c}| + |\bar{c}\bar{b}| = d(a, c) + d(c, b) \geq d(a, b).$$

Добавим к нашей конфигурации на плоскости такую точку \tilde{b} , что

$$|\bar{p}\tilde{b}| = |\bar{p}\bar{b}| = d(p, b), \quad |\bar{a}\tilde{b}| = d(a, b),$$

причем выбираем \tilde{b} по ту же сторону от прямой $(\bar{p}\bar{a})$, что и \bar{b} .

Напомним, что угол $\theta(a, b)$ по определению равен углу $\angle \bar{a}\bar{p}\bar{b}$ треугольника сравнения $\Delta \tilde{b}\bar{p}\bar{a}$ и, аналогично, $\theta(a, c) = \angle \bar{a}\bar{p}\bar{c}$, $\theta(b, c) = \angle \bar{b}\bar{p}\bar{c}$. Следовательно,

$$\theta(a, c) + \theta(b, c) = \angle \bar{a}\bar{p}\bar{b}.$$

Сравнивая треугольники $\Delta \tilde{b}\bar{p}\bar{a}$ и $\Delta \tilde{b}\bar{p}\bar{a}$, мы видим, что они имеют по две равные стороны и $|\bar{a}\tilde{b}| \geq |\bar{a}\bar{b}|$. Следовательно, их углы также удовлетворяют неравенству $\angle \bar{a}\bar{p}\tilde{b} \geq \angle \bar{a}\bar{p}\bar{b}$. Таким образом, мы доказали, что

$$\theta(a, c) + \theta(b, c) \geq \theta(a, b).$$

Комбинируя это с неравенствами

$$|\alpha_1 - \theta(b, c)| \leq \varepsilon, |\alpha_2 - \theta(a, c)| \leq \varepsilon, |\alpha_3 - \theta(a, b)| \leq \varepsilon,$$

мы видим, что $\alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + 3\varepsilon$ для всех положительных ε . Этим доказательство теоремы завершено. \square

Упражнение 3.6.36. Докажите следующие утверждения, усиливающие нашу теорему.

Предложение 3.6.37. 1. Теорема 3.6.34 верна и для верхних углов.

2. Если в условиях теоремы 3.6.34 хотя бы один из углов α_1 и α_2 равен нулю, то требование существования угла α_3 можно опустить: он существует в силу остальных предположений.

Упражнение 3.6.38. Докажите, что сумма смежных углов всегда не меньше π . Точнее, если b — внутренняя точка кратчайшей $[a, c]$ и углы $\angle dba$ и $\angle dbc$ существуют, то их сумма не меньше, чем π .

Определение 3.6.39. Говорят, что кривая γ (с началом в p) имеет направление в точке p , если угол $\angle(\gamma, \gamma)$ существует. Две кривые α, β имеют одинаковое направление в точке p , если угол $\angle(\alpha, \beta)$ существует и равен 0.

Упражнение 3.6.40. (i) Приведите пример такой кривой $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, что в точке $\gamma(0)$ угол $\angle(\gamma, \gamma)$ не существует.

(ii) Докажите, что если существует угол $\angle(\gamma, \gamma)$, то он равен нулю.

(iii) Докажите, что если γ — геодезическая, то угол $\angle(\gamma, \gamma)$ всегда существует.

(iv) Приведите пример двух кривых, имеющих направления и таких, что угол между ними не существует.

Будем рассматривать только кривые, имеющие направление. Заметим, что свойство кривых иметь одно и то же направление является эквивалентностью. Класс эквивалентных кривых называется *направлением*. Угол (или верхний угол) между кривыми не изменится, если заменить эти кривые другими, им эквивалентными. Поэтому можно говорить о угле (или верхнем угле) между направлениями. Ясно, что множество направлений (в данной точке) является метрическим пространством; расстоянием служит верхний угол между направлениями (угловая метрика).

К сожалению, это понятие, кажущееся очень общим, не слишком полезно (вероятно, именно потому, что оно *слишком* общее). Забегая вперед, объясним неформально, что мы будем использовать вместо этого пространства. В основном, мы будем изучать такие пространства, в которых угол между кратчайшими всегда существует. И мы будем иметь дело только с кривыми, которые эквивалентны кратчайшим. Другими словами, мы ограничимся только направлениями, порожденными кратчайшими. Пространство таких направлений будет метрическим пространством по отношению к углу (вместо верхнего угла, необходимого в общем случае). Построенное так пространство может быть неполным, мы его пополним и только его (метрическое) пополнение будем называть *пространством направлений*.

Пространства ограниченной кривизны

4.1. Определения

4.1.1. Введение. Общие пространства с внутренними метриками могут быть крайне скверными, и практически все нетривиальные результаты о них справедливы только при дополнительных предположениях. Среди таких геометрических предположений, работающих в качестве “условий регулярности”, основную роль играют *ограничения на кривизну*. Грубо говоря, ограниченность кривизны гарантирует определенную степень выпуклости или вогнутости дистанционной функции. Мы начнем с двух наиболее важных классов пространств: неположительной и неотрицательной кривизны. Эти два класса обладают совершенно разными свойствами, однако для их исследования используются сходные методы. Хотя другие ограничения на кривизну тоже важны, основные свойства соответствующих типов пространств прослеживается в двух базовых классах. Различные пространства ограниченной (сверху или снизу) кривизны мы будем называть *пространствами Александрова*.

Пространства ограниченной кривизны могут на первый взгляд не иметь ничего общего с евклидовыми пространствами ни метрически, ни топологически. Тем не менее, их определения основаны на сравнении с евклидовым миром, и в некоторых отношениях эти пространства менее “чудовищны”, чем, например, нормированные. Так, понятие угла вполне осмысленно в пространствах ограниченной кривизны; в то же время есть веские причины, по которым это понятие не имеет полноценного обобщения на случай нормированных пространств.

Мы дадим несколько равносильных определений пространств неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны. Неформальный смысл этих определений таков:

- Дистанционные функции таких пространств не менее выпуклы (соотв., не менее вогнуты), чем для евклидовой плоскости;
- геодезические, исходящие из одной точки, расходятся не медленнее (соотв., не быстрее), чем на евклидовой плоскости;
- треугольники не толще (соотв., не тоньше), чем евклидовы треугольники с такими же длинами сторон.

Говоря очень нестрого, эти пространства не мельче (соотв., не крупнее), чем евклидово пространство; например, они допускают больше нерастягивающих (соотв., несжимающих) отображений.

Сфера служит таким примером пространства положительной кривизны, в котором перечисленные свойства легко проследить. Так, сферический треугольник выглядит “толще” соответствующего треугольника на плоскости (например, углы сферического треугольника больше углов соответствующего плоского треугольника). Геодезические на сфере как бы “притягиваются” друг к другу, а не расходятся с линейной скоростью (точнее, расстояние между двумя геодезическими на сфере, выходящими из одной точки, является вогнутой функцией). Все это — характерные свойства пространств положительной кривизны.

Более общо, каждая выпуклая поверхность (то есть граница выпуклого тела) в \mathbb{R}^3 является пространством неотрицательной кривизны, а каждая гладкая седловая поверхность (локально выглядящая как гиперболический параболоид) является пространством неположительной кривизны.

Для читателя, знакомого с римановой геометрией, упомянем, забегая вперед, что риманово многообразие является пространством с внутренней метрикой неотрицательной (соотв. неположительной) кривизны тогда и только тогда, когда все его секционные кривизны неотрицательны (соотв., неположительны).

Соглашение. В этой главе всюду, где не оговорено противное, все пространства с внутренней метрикой считаются связными (или, что эквивалентно, с конечными расстояниями), а метрики предполагаются строго внутренними, то есть такими, что любые две точки можно соединить кратчайшей.

Тем самым мы жертвуем общностью для упрощения изложения; далее (в главах 9 и 10) мы рассмотрим и более общие случаи.

4.1.2. Сравнение дистанционных функций. Зафиксируем точку $p \in X$; будем называть ее точкой отсчета. Рассмотрим расстояние до p как вещественную функцию, заданную на X : $d_p(x) = d(x, p)$. Удобнее

иметь дело с функцией одной переменной, рассматривая сужения функции d_p на “отрезки” в X . Это значит, что для каждой натурально параметризованной кратчайшей $[ab] = \gamma: [0, T] \rightarrow X$ мы определяем функцию $g(t) = d(p, \gamma(t)) = d_p \circ \gamma(t)$, которая представляет собой сужение дистанционной функции d_p на γ . Будем называть такую функцию *одномерной дистанционной функцией*.

Мы хотим сравнить g с подходящей одномерной евклидовой дистанционной функцией. Для этого рассмотрим в евклидовой плоскости отрезок такой же длины и точку отсчета, “расположенную по отношению к отрезку так же, как p расположена относительно γ ”. Говоря формально, мы выбираем евклидов отрезок $[\bar{a}\bar{b}]$ той же длины $T = |ab|$, и такую точку отсчета \bar{p} , что $|\bar{a}\bar{p}| = d_p(a) = d(a, p)$ и $|\bar{b}\bar{p}| = d_p(b) = d(b, p)$. Ясно, что полученная фигура *сравнения* единственна с точностью до движения. Выбранный отрезок будем рассматривать как путь $\gamma_0(t)$, параметризованный длиной дуги так, что $\gamma_0(0) = \bar{a}$, $\gamma_0(T) = \bar{b}$.

Определение 4.1.1. Евклидова дистанционная функция (расстояния до точки \bar{p}), суженная на отрезок $[\bar{a}\bar{b}]$ (то есть функция $g_0(t) = |\bar{p}\gamma_0(t)|$) называется *функцией сравнения* для g .

Следуя идее, что дистанционная функция для пространства неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны должна быть более выпуклой (соотв., более вогнутой), чем для евклидовой плоскости, мы можем определить эти пространства неравенством $g_0(t) \geq g(t)$ (соотв. $g_0(t) \leq g(t)$). Чтобы сделать наше определение локальным, мы требуем выполнения этого неравенства не для всех пар (p, γ) , а только для таких, которые расположены в достаточно малой окрестности каждой точки.

Определение 4.1.2 (“Условие сравнения дистанционных функций”). Будем говорить, что (X, d) — пространство *неположительной* (соотв. *неотрицательной*) *кривизны*, если каждая точка из X имеет такую окрестность, что для точки p и отрезка γ , лежащих в этой окрестности, одномерная дистанционная функция $g(t) = d(p, \gamma(t))$ и соответствующая функция сравнения g_0 удовлетворяют неравенству $g_0(t) \geq g(t)$ (соотв. $g_0(t) \leq g(t)$) для всех $t \in [0, T]$.

Мы будем использовать название *пространство Александрова* для всех пространств с ограничением на кривизну, в частности для пространств неположительной и неотрицательной кривизны.

4.1.3. Первые примеры. Хотя мы выбрали для начала очень простые примеры, доказательства их свойств довольно длинные (особенно для второго). Поэтому, если интуиция подсказывает вам, что эти примеры верны, можно на время отложить разбор доказательств. Дело в том, что

мы проводим эти доказательства “вручную”, опираясь только непосредственно на определения, не имея пока никакой техники для сокращения работы.

Пример 4.1.3. Склеим три экземпляра луча $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$, отождествив их начальные точки. Полученное пространство $R_{(3)}$ имеет неположительную кривизну.

Пример 4.1.4. Пусть K — конус над окружностью длины L (см. 3.6.2). Тогда K является пространством неотрицательной кривизны при $L \leq 2\pi$ и пространством неположительной кривизны при $L \geq 2\pi$.

Пример 4.1.5. Рассмотрим \mathbb{R}^2 с нормой $\|v\| = |x| + |y|$, где x и y — декартовы координаты вектора v . Это нормированное пространство X не является пространством ни отрицательной, ни положительно кривизны.

Приступим к доказательству этих утверждений.

Доказательство для примера 4.1.3. Обозначим через O общую точку наших трех лучей. Каждая кратчайшая в $R_{(3)}$ — это или отрезок в одном из лучей, или объединение двух отрезков на двух разных лучах. Пусть $\gamma: [0, T] \rightarrow R_{(3)}$ — кратчайшая, $p \in R_{(3)}$. Если две точки из набора $\{\gamma(0), \gamma(T), p\}$ принадлежат одному и тому же лучу, наше утверждение тривиально, так как тогда γ и p содержатся в объединении двух лучей, и это объединение изометрично \mathbb{R} . Таким образом, достаточно рассмотреть только случай когда все три точки p , $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(T)$ принадлежат различным лучам. Для любой точки $x \in [Oa]$ справедливо равенство $|px| = |pa| - |ax|$. Это означает, что функция g из определения 4.1.2 при $\gamma(t) \in [Oa]$ имеет вид $g(t) = g(0) - t$. Для функции g_0 по неравенству треугольника мы имеем $g_0(t) \geq g_0(0) - t$. Так как $g_0(0) = g(0)$, требуемое неравенство $g(t) \leq g_0(t)$ справедливо при $\gamma(t) \in [Oa]$. Случай $\gamma(t) \in [Ob]$ совершенно аналогичен. \square

Доказательство для примера 4.1.4. Конус над окружностью является плоским всюду кроме вершины; каждый его подконус над отрезком длины $\alpha \leq \max\{L/2, \pi\}$ — выпуклый и изометричен плоскому сектору с углом α при вершине. (Вспомните обсуждение конусов в разделе 3.6.2.) Для кратчайшей $\gamma: [0, T] \rightarrow K$ и точки $p \in K$, рассмотрим треугольник Δ , составленный из трех кратчайших, соединяющих точки p , $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(T)$. Возможны два случая:

- Треугольник Δ ограничивает область, не содержащую O , или одна из точек a , b , p совпадает с O .
- Треугольник Δ ограничивает область, содержащую O , или одна из его сторон проходит через O .

В первом случае ограниченная треугольником область изометрична области, ограниченной плоским треугольником, и функции g и g_0 (из определения 4.1.2) просто совпадают.

Второй случай рассмотрим отдельно для $L < 2\pi$ и $L > 2\pi$. (Случай $L = 2\pi$ тривиален, ибо тогда конус изометричен \mathbb{R}^2 .)

1. Предположим, что $L < 2\pi$. Тогда мы можем представить конус K как трехгранный конус над треугольником Δ в \mathbb{R}^3 , с ребрами, проходящими через вершины Δ . (Этот трехгранный конус рассматривается с его внутренней метрикой; “представить” означает, что эти два конуса изометричны.) Чтобы получить такой конус, разрежем K лучами Oa , Ob и Op , на три сектора и расположим эти секторы в \mathbb{R}^3 так, чтобы они образовывали трехгранный угол (это возможно в силу неравенства треугольника для углов).

Стороны треугольника Δ — это прямолинейные отрезки в \mathbb{R}^3 . Этот треугольник содержится в некоторой плоскости $P \subset \mathbb{R}^3$, и мы можем его использовать (рассматривая как подмножество в P), чтобы описать функцию g_0 из определения 4.1.2. Другими словами, $g_0(t)$ равно расстоянию в \mathbb{R}^3 от p до $\gamma(t)$. Так как расстояния во внутренней метрике конуса не меньше, чем расстояния в пространстве \mathbb{R}^3 , отсюда следует, что $g \geq g_0$. Следовательно, конус является пространством неотрицательной кривизны.

2. Предположим, что $L > 2\pi$. Треугольники ΔabO , ΔapO и ΔbpO — плоские, то есть изометричны треугольникам в плоскости. Рассмотрим треугольники ΔabO и ΔbpO , и расположим их изометричные копии $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{O}$ и $\Delta \bar{b}\bar{p}\bar{O}$ в одной плоскости по разные стороны от их общей стороны $\bar{O}\bar{b}$. (если одна из кратчайших $[ab], [bp]$ проходит через O , соответствующая копия вырождается в отрезок.) Заметим, что $\angle \bar{a}\bar{O}\bar{b} + \angle \bar{b}\bar{O}\bar{p} > \pi$ и $\angle \bar{a}\bar{O}\bar{p} \leq \angle aOc$; следовательно $|\bar{a}\bar{p}| \leq |ap|$. Будем поворачивать треугольник $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{O}$ вокруг \bar{b} до тех пор, пока $|\bar{a}\bar{p}|$ станет равным $|ap|$ (см. левый рисунок 4.1). Это показывает, что изометричные копии треугольников ΔabO и ΔbpO лежат в плоском треугольнике $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{p}$ (со сторонами, равными сторонам Δabp) так, что их внутренности не пересекаются. Это рассуждение работает для любой пары треугольников из набора ΔaOb , ΔbOp , ΔpOa ; поэтому их копии лежат в $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{p}$ так, что их внутренности попарно не пересекаются, как показано в правой части рисунка 4.1.

Теперь ясно, что все расстояния между точками на сторонах треугольника Δabp не больше расстояний между соответствующими точками треугольника сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{p}$, то есть $g \leq g_0$. Следовательно, конус есть пространство неположительной кривизны. \square

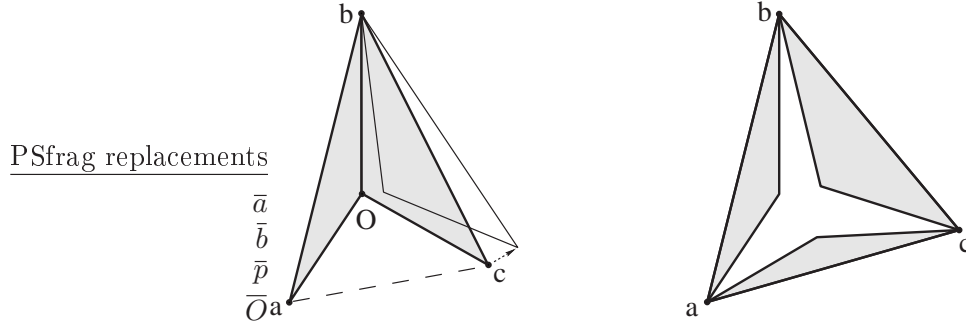


Рис. 4.1: Треугольники сравнения попарно не налегают друг на друга.

Замечание 4.1.6. Из приведенного доказательства ясно, что обратное утверждение также верно: если конус над окружностью является пространством неотрицательной (соотв., неположительной) кривизны, то длина этой окружности не больше (соотв., не меньше) 2π .

Следующее упражнение характеризует кривизну конуса над отрезком (заметим, что конус над достаточно коротким отрезком — это просто плоский сектор). Мы будем использовать результат этого упражнения далее в этой главе

Упражнение 4.1.7. Пусть X — конус над отрезком длины L . Докажите, что

1. X — пространство неположительной кривизны для всех L .
2. X — пространство неотрицательной кривизны тогда и только тогда, когда $L \leq \pi$.

Доказательство для примера 4.1.5. Сначала заметим, что прямолинейные отрезки в нормированном векторном пространстве являются кратчайшими, так как длина отрезка равна расстоянию между его концами. Однако могут существовать и другие кратчайшие.

Единичной сферой в X служит евклидов квадрат с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Обозначим $p = (0, 0)$. Сначала рассмотрим кратчайшую, соединяющую точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и параметризованную интервалом $[-1, 1]$. Для этой кратчайшей $g(t) \equiv 1$; в то же время $g_0(t) = |t|$, так что $g > g_0$ всюду, кроме концов, что противоречит определению неположительной кривизны. Теперь рассмотрим кратчайшую соединяющую точки $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ и параметризованную интервалом $[0, 1]$. В этом случае $g(0) = g_0(0) = 1$ и $g(1) = g_0(1) = 1$. Однако $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, в то время как $g_0(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$. Так что в этом случае $g(\frac{1}{2}) < g_0(\frac{1}{2})$, что противоречит неотрицательности кривизны.

На первый взгляд наше рассуждение не было локальным, в то время как определения пространств неположительной и неотрицательной кривизны — локальные. Однако легко видеть, что такое же рассуждение можно повторить в любой окрестности начала, ибо евклидовы гомотетии являются также гомотетиями по отношению к норме. \square

4.1.4. Сравнение расстояний в треугольниках. Вероятно читатель пока что, то есть только на основе нашего анализа дистанционных функций, не слишком преуспел в геометрии пространств неположительной (неотрицательной) кривизны. Поэтому мы переформулируем определения в более геометрических терминах. По традиции, условия из этих определений называются САТ(0)-условиями, а пространства, им удовлетворяющие, называют САТ(0)-пространствами. Здесь САТ служит сокращением для слов “сравнение по Картану–Александрову–Топоногову”, а (0) означает, что в качестве ограничения на кривизну выбран нуль, то есть что пространство сравнивается с евклидовой плоскостью. Сравнение с другими пространствами (такими, как сфера) определяет САТ(k)-пространства для других $k \in \mathbb{R}$. Это сокращение чаще используется в случае ограничений сверху, а в случае ограничений снизу обычно говорят о пространствах Александра кривизны, ограниченной снизу числом k . Отметим, что термин “пространство Александра” может привести к путанице, так как он используется для обоих видов ограничений, поэтому следует уточнять, является k ограничением сверху или снизу.

Под треугольником в X мы понимаем набор из трех точек, a , b и c (вершин), соединенных тремя кратчайшими (сторонами). Для краткости мы будем обозначать эти кратчайшие через $[ab]$, $[bc]$, $[ca]$, а их длины — $|ab|$, $|bc|$, $|ca|$, соответственно. Напомним, что одни только вершины могут не определять треугольник однозначно, так как может существовать несколько разных кратчайших, соединяющих одну пару вершин. Через $\angle abc$ будем обозначать угол между кратчайшими $[ba]$ и $[bc]$ в точке b (если этот угол существует).

По каждому треугольнику $\triangle abc$ в X мы строим в евклидовой плоскости треугольник $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ с теми же длинами сторон, то есть

$$|ab| = |\bar{a}\bar{b}|, \quad |bc| = |\bar{b}\bar{c}|, \quad |ac| = |\bar{a}\bar{c}|.$$

Определение 4.1.8. Описанный выше треугольник $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ называется треугольником *сравнения* для треугольника $\triangle abc$.

Ясно, что треугольник сравнения определен однозначно с точностью до движения евклидовой плоскости. Теперь мы можем переформулировать условие сравнения дистанционных функций из определения 4.1.2 следующим образом.

Определение 4.1.9 (“Условие сравнения треугольников”). Пространство X с внутренней метрикой называется пространством неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны, если в некоторой окрестности каждой точки выполняется следующее условие:

для каждого треугольника $\triangle abc$ и каждой точки $d \in [ac]$ справедливо неравенство $|db| \leq |\bar{d}b|$ (соотв., $|db| \geq |\bar{d}b|$), где \bar{d} — такая точка на стороне $[\bar{a}\bar{c}]$ треугольника сравнения $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$, что $|\bar{a}\bar{d}| = |ad|$.

Такая окрестность называется *нормальной областью*. Всегда можно выбрать нормальную область G столь малой, что все кратчайшие с концами в G будут содержаться в некоторой (возможно большей) нормальной области.

Упражнение 4.1.10. Проверьте, что определение 4.1.9 действительно является просто переформулировкой определения 4.1.2 в других обозначениях.

Упражнение 4.1.11. Покажите, что достаточно потребовать выполнения условия на треугольники только для точки d , являющейся серединой стороны $[ab]$; то есть такое ослабленное определение равносильно исходному.

Упражнение 4.1.12. Покажите, что следующее свойство следует из условия 4.1.9, но не равносильно ему:

для любого треугольника $\triangle abc$ и середин d и e его сторон $[ab]$ и $[bc]$ справедливо неравенство $2|de| \leq |ac|$.

Подсказка. Рассмотрите нормированное векторное пространство.

Пример 4.1.13. Прямое метрическое произведение (см. 3.6.1) пространств неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны — снова пространство неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны.

Упражнение 4.1.14. Докажите это утверждение.

Подсказка. Пусть \triangle_X — треугольник в пространстве $X = X_1 \times X_2$, а \triangle_1, \triangle_2 — его проекции в X_1 и X_2 . Обозначим через $\triangle_{a_1b_1c_1}$ и $\triangle_{a_2b_2c_2}$ треугольники сравнения для треугольников \triangle_X и \triangle_Y , соответственно. Будем считать, что эти треугольники лежат в (x, y) - и (z, t) -плоскостях евклидова пространства \mathbb{R}^4 с декартовыми координатами (x, y, z, t) . Заметим, что треугольник в $\mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}_2^2$ с вершинами (a_1, a_2) , (b_1, b_2) и (c_1, c_2) является треугольником сравнения для \triangle_X . Теперь доказательство можно закончить путем небольшого прямого вычисления.

Образно говоря, все достаточно малые треугольники в пространстве неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны не толще (соотв. не тоньше) соответствующих треугольников в евклидовом пространстве; можно представлять треугольник в пространстве неотрицательной кривизны “раздутым” как на рисунке 4.2 слева, в то время как треугольник в

пространстве неположительной кривизны выглядит “тощим” (его стороны “вдавлены внутрь”).

PSfrag replacements

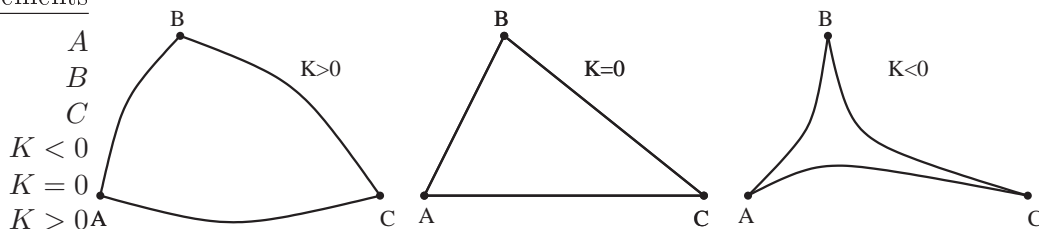


Рис. 4.2: Треугольники сравнения.

Хотя определения пространств неположительной и неотрицательной кривизны очень похожи, мы увидим позднее, что свойства этих пространств совершенно различны.

Обратите внимание, что хотя мы иногда говорим “пространство имеет неположительную (соотв., неотрицательную) кривизну”, кривизна как отдельное понятие не определена, и бессмысленно говорить о ее численном значении.

4.1.5. Сравнение углов треугольников. Когда мы смотрим на рисунки “толстых” и “тощих” треугольников, естественно возникает предположение, что “толстые” треугольники должны иметь большие углы, а углы “тощих” треугольников должны быть маленькими. Это наблюдение наводит на мысль определить пространства неположительной кривизны путем сравнения углов. А именно, X называется пространством неположительной кривизны, если углы каждого достаточно малого треугольника существуют и они не больше соответствующих углов треугольника сравнения в евклидовом пространстве.

Для определения пространств неотрицательной кривизны достаточно заменить слова “не больше” на “не меньше” и, кроме того, *предположить*, что сумма смежных углов равна π .¹ На более формальном языке это определение звучит следующим образом.

Определение 4.1.15 (“Условие сравнения углов”). Пространство X с внутренней метрикой называется пространством неположительной кривизны, если каждая точка из X имеет такую окрестность, что углы $\angle bac$, $\angle cba$ и $\angle abc$ каждого треугольника $\triangle abc$, лежащего в этой окрестности, существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\angle bac \leq \tilde{\angle bac} \quad \angle abc \leq \tilde{\angle abc} \quad \angle bca \leq \tilde{\angle bca}$$

¹По-видимому до сих пор неизвестно, необходимо ли последнее предположение в действительности или нет.

(напомним, что через $\tilde{\angle}abc$ обозначен угол треугольника сравнения, то есть $\tilde{\angle}abc = \angle\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, где $\Delta\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — треугольник сравнения, сравните с определением 3.6.25).

Аналогично, X называется пространством неотрицательной кривизны, если каждая его точка имеет такую окрестность, что углы $\angle bac$, $\angle cba$ и $\angle abc$ каждого треугольника Δabc , содержащегося в этой окрестности, существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\angle bac \geq \tilde{\angle}bac \quad \angle abc \geq \tilde{\angle}abc \quad \angle cba \geq \tilde{\angle}cba,$$

и, кроме того, для любых двух кратчайших $[pq]$ и $[rs]$, где r — внутренняя точка кратчайшей $[pq]$, справедливо равенство $\angle prs + \angle srq = \pi$.

В то время как определение через треугольники 4.1.9 есть просто переформулировка определения через дистанционные функции 4.1.2, доказательство того, что они равносильны определению через углы 4.1.15, требует некоторой работы. Мы докажем последнюю равносильность позднее, в пункте 4.3.2.

4.2. Примеры

Теперь, имея три определения, мы можем рассмотреть новые примеры пространств Александрова. Видимо, исторически возникновение понятия пространств ограниченной кривизны было мотивировано примерами выпуклых и седловых поверхностей. К сожалению, чтобы доказать, что эти примеры удовлетворяют нашим определениям, нужен некоторый аппарат, который еще нами не изложен. Однако мы советуем читателю держать эти два примера в уме.

Здесь мы рассмотрим те примеры пространств Александрова, для которых проверка наших условий не требует никакой техники, а именно, несколько тривиальных примеров и полиэдральные пространства малых размерностей (1 и 2).

Пример 4.2.1. Евклидово пространство очевидно является пространством Александрова (и неположительной, и неотрицательной кривизны одновременно).

Пример 4.2.2. Выпуклое множество в пространстве Александрова очевидно является пространством Александрова (с тем же знаком кривизны).

Пример 4.2.3. Открытое множество в пространстве Александрова, рассматриваемое с индуцированной в нем внутренней метрикой, является пространством Александрова (с тем же знаком кривизны). Это сразу следует из локальности определений и того факта, что на открытом множестве индуцированная метрика локально совпадает с сужением внутренней метрики объемлющего пространства.

Пример 4.2.4. “Веер”, сделанный из нескольких отрезков, начала которых склеены вместе, также является пространством неположительной кривизны. Это можно доказать так же, как в примере 4.1.3. Однако теперь, с помощью определения 4.1.15, мы можем доказать это в нескольких словах: в каждом треугольнике нашего пространства либо все углы нулевые (и тем самым определение через углы очевидно выполнено), либо сам треугольник вырождается (то есть содержится в одной из своих сторон). В последнем случае его треугольник сравнения также вырожден.

Так как каждая точка в локально конечном графе имеет окрестность, представляющую собой либо отрезок, либо пучок отрезков, склеенных в одной точке, то все локально конечные связные графы являются пространствами неположительной кривизны.

Предостережение: в отличие от графов, не все двумерные локально конечные полиэдры являются пространствами Александрова.

Пример 4.2.5. Объединение координатной xy -плоскости и оси z в \mathbb{R}^3 (с индуцированной внутренней метрикой) служит еще одним примером пространства неположительной кривизны. Этот пример можно получить (и это — лучшее, “внутреннее” описание) склеив вместе плоскость и прямую, путем отождествления между собой по одной их точке, то есть создав метрический букет (см. определение 4.2.7 ниже).

Доказательство. Покажем, что каждый треугольник в нашем пространстве удовлетворяет определению через углы. Заметим, что каждая кратчайшая с концами в xy -плоскости сама полностью в ней содержится. А каждая кратчайшая с началом на оси z может покинуть эту ось только в начале координат O . Теперь понятно, что выполнение условия на углы треугольника очевидно, если все его вершины лежат в плоскости или если две вершины лежат на оси, а одна — в плоскости. Остается случай, когда вершины a, b лежат в плоскости, а c — на прямой. Тогда наш треугольник состоит из плоского треугольника $\triangle abO$ и “хвоста” Oc . Проверка того, что углы этого треугольника меньше, чем соответствующие углы треугольника сравнения, — элементарное упражнение. \square

Пример 4.2.6. Рассмотрим несколько копий плоскости \mathbb{R}^2 с отмеченной точкой и отождествим между собой эти точки. Получим пространство неположительной кривизны. В случае двух копий \mathbb{R}^2 это пространство топологически устроено как конус $x^2 + y^2 = z^2$.

Предостережение: сам этот конус с его внутренней метрикой, индуцированной из \mathbb{R}^3 , не является пространством Александрова!

Доказательство в основном такое же, как в предыдущем примере.

Все эти примеры являются частными случаями следующей общей конструкции.

Определение 4.2.7. Пусть $\{X_i\}$ — семейство пространств с внутренней метрикой, и в каждом пространстве X_i выбрана точка x_i . *Метрическим букетом* пространств X_i (с отмеченными точками x_i) называется пространство с внутренней метрикой, полученное из объединения $\bigcup X_i$ (где пространства X_i считаются попарно не пересекающимися) путем отождествления всех точек x_i .

Упражнение 4.2.8. Докажите, что склеивание пространств в букет не изменяет их метрик. Другими словами, каждое пространство X_i изометрически проектируется на его образ в букете.

Все три примера, приведенные выше, — частные случаи следующего утверждения.

Предложение 4.2.9. *Метрический букет пространств неположительной кривизны — тоже пространство неположительной кривизны.*

Упражнение 4.2.10. Докажите это утверждение.

Пример 4.2.11. “Блокнот” из примера 2.2.7 параграфа 2.2 (несколько полуплоскостей, склеенных вместе вдоль ограничивающих их прямых) является пространством неположительной кривизны.

Доказательство. Рассмотрим треугольник Δabc в “блокноте”. Среди возможных случаев нетривиальным является только тот, где вершины a, b, c треугольника лежат в трех различных полуплоскостях A, B, C , соответственно. Пусть L — общее ребро полуплоскостей. Объединение полуплоскостей $A \cup B$ — это евклидова плоскость, а кратчайшая $[ab]$ — отрезок в этой плоскости (эта кратчайшая не может заходить во внутренность C : это сделало бы путь длиннее, так как в этом случае он пересекал бы L по крайней мере дважды, и участок пути, лежащий в C , был бы длиннее, чем соответствующий отрезок ребра L). Кратчайшие $[bc]$ и $[ac]$ имеют аналогичные свойства. Теперь рассмотрим изометрию $f: B \rightarrow C$, оставляющую L неподвижной. (Представьте, что B поворачивается вокруг L до тех пор, пока не совпадет с C .) Обозначим через d пересечение $[bc]$ с L . Теперь углы четырехугольника $(a, b, d, f(c))$ в точках $a, b, f(c)$ равны углам треугольника Δabc в соответствующих точках. Легко проверить (это уже элементарная евклидова геометрия), что углы треугольника сравнения для Δabc больше, чем соответствующие углы нашего четырехугольника. \square

Замечание 4.2.12. В главе 9, мы докажем принадлежащую Ю. Г. Решетняку общую теорему 9.1.21, которая охватывает как разобранные выше, так

и многие другие примеры пространств неположительной кривизны, полученных склеиванием.

Оказывается, что ограниченность кривизны сверху в некотором смысле менее жесткое условие, чем ограниченность снизу; так, имеется не так уж много принципиально различных типов примеров пространств неотрицательной кривизны. Например, все двумерные пространства неотрицательной кривизны являются топологическими многообразиями (возможно, с границей).

Мы увидим в дальнейшем, что все выпуклые поверхности являются пространствами неотрицательной кривизны. Здесь мы докажем это только для полиэдральных поверхностей. Более того, мы выясним здесь полностью, какие двумерные полиэдральные пространства являются пространствами Александра. Советуем читателю перед этим вспомнить или перечитать основные сведения о полиэдральных метриках, приведенные в разделе 3.2. Нам понадобится следующая важная лемма, которая уже доказана в примере 4.1.4.

Лемма 4.2.13. *Конус над окружностью является пространством неположительной кривизны тогда и только тогда, когда длина этой окружности не меньше 2π . Конус над окружностью является пространством неотрицательной кривизны тогда и только тогда, когда длина этой окружности не больше 2π .*

Используя эту лемму, мы легко можем охарактеризовать все двумерные полиэдральные пространства Александра. Напомним еще раз, что полиэдральные пространства с внутренней метрикой были определены в параграфе 3.2. У каждой точки двумерного полиэдрального пространства есть окрестность, изометричная окрестности вершины конуса над графом. Этот граф называется *линком* точки.

Теорема 4.2.14. *1. Двумерное полиэдральное пространство является пространством неотрицательной кривизны тогда и только тогда, когда оно является топологическим многообразием (возможно, с краем), и сумма углов вокруг каждой его вершины не больше 2π , а если вершина принадлежит краю, то даже не больше π . Эти условия означают, что линк каждой вершины — либо окружность длины не более 2π , либо отрезок длины не более π .*

2. Двумерное полиэдральное пространство является пространством неположительной кривизны тогда и только тогда, когда линк каждой вершины не содержит подпространства, изометричного окружности длины меньше, чем 2π .

Доказательство. Так как неотрицательность (соотв., неположительность) кривизны — локальное свойство, достаточно рассмотреть только малую

окрестность каждой точки. Если окрестность достаточно мала, то в ней полиэдр не отличается от конуса над линком. Другими словами, полиэдральное пространство X имеет неотрицательную (соотв., неположительную) кривизну тогда и только тогда, когда конус над линком любой точки $x \in X$ имеет неотрицательную (соотв., неположительную) кривизну.

1. По лемме 4.2.13 конус над окружностью длиннее π имеет неотрицательную кривизну. Конус над отрезком длины $\alpha \leq \pi$ изометричен плоскому сектору с углом α при вершине; такой сектор имеет неотрицательную кривизну как выпуклое подмножество плоскости. Таким образом, если линк каждой точки — окружность длины не более 2π или отрезок длины не более π , то пространство имеет неотрицательную кривизну.

Теперь предположим, что пространство имеет неположительную кривизну. Сначала исключим из рассмотрения все линки, кроме двух типов.

(а) Предположим, что линк некоторой точки несвязен. Тогда после удаления этой точки X перестает быть локально связным. Рассмотрим треугольник Δabc , где a принадлежит одной компоненте локальной связности, а b, c — другой. Легко проверить (совершенно аналогично примеру 4.2.6), что X не может иметь неотрицательную кривизну.

(б) Предположим, что к некоторому ребру примыкают более двух граней. Тогда окрестность любой точки этого ребра выглядит как “блокнот” из примера 4.2.11, который заведомо не является пространством неотрицательной кривизны.

(с) Теперь мы знаем, что линк любой вершины связан, и каждая его точка имеет порядок не более 2 (иначе в X к соответствующему ребру примыкало бы более двух граней). Следовательно линк должен быть окружностью или отрезком. Если он — окружность, то ее длина не более 2π по лемме 4.2.13. Если же линк — отрезок, то его длина не превышает π в силу упражнения 4.1.7.

2. Перейдем к случаю неположительной кривизны. Нам достаточно доказать следующее:

Конус K над графом Γ является пространством неположительной кривизны тогда и только тогда, когда в Γ длина каждой нетривиальной петли не меньше 2π .

Сначала предположим, что кривизна K неположительна и покажем, что Γ не содержит нетривиальных петель длины меньше 2π . Пусть γ — кратчайшая нетривиальная петля в Γ . Тогда для любых точек $x, y \in \gamma$ один из двух участков γ между x и y является кратчайшей в Γ . Отсюда следует, что γ — выпуклое подмножество Γ ; следовательно подконус над γ — выпуклое множество в K (по лемме 3.6.15). Следовательно, этот подконус наследует из K неположительную кривизну. Тогда по

лемме 4.2.13, $L(\gamma) \geq 2\pi$. Так как γ — кратчайшая петля, то все петли не короче 2π .

Теперь предположим что все нетривиальные петли в Γ не короче 2π , и докажем, что K имеет неположительную кривизну. Рассмотрим треугольник Δabc в K . Сначала предположим, что стороны треугольника не проходят через O . Рассмотрим проекцию треугольника Δabc в Γ . Эта проекция — треугольник $\Delta a'b'c'$, стороны которого являются кратчайшими в Γ (вспомните обсуждение кратчайших в конусе в параграфе 3.6.2). Рассмотрим два случая.

(а) Предположим, что $\Delta a'b'c'$ (как подмножество Γ) не содержит простых петель (простая петля — это множество, гомеоморфное окружности). Тогда легко видеть, что все три стороны треугольника $\Delta a'b'c'$ имеют общую точку $d \in \Gamma$; точнее, найдутся такие кратчайшие $[a'd]$, $[b'd]$, $[c'd]$, что треугольник $\Delta a'b'c'$, как подмножество Γ , совпадает с “веером” $[a'd] \cup [b'd] \cup [c'd]$. Этот веер является выпуклым подмножеством Γ (потому что каждая пара его точек принадлежит кратчайшей, содержащейся в веере). Следовательно, исходный треугольник Δabc содержится в конусе над этим веером; и этот конус является выпуклым множеством в K , состоящим из трех секторов, склеенных вместе вдоль луча. Теперь абсолютно то же самое рассуждение, что и в примере 4.2.11 (“блокнот”) завершает доказательство.

(б) Теперь предположим, что $\Delta a'b'c'$ содержит простую петлю. Тогда периметр $L = |a'b'| + |b'c'| + |a'c'|$ не меньше, чем 2π . Рассмотрим конус K_1 над окружностью S длины L . Выберем сохраняющее длины отображение g из S на треугольник $\Delta a'b'c'$; именно, разобьем S на три дуги с длинами $|a'b'|$, $|b'c'|$ и $|a'c'|$. Пусть g отображает эти три дуги на соответствующие стороны нашего треугольника. Это отображение g индуцирует отображение $\bar{g}: K_1 \rightarrow K$, переводящее точку $(x, t) \in K_1$ в точку $(g(x), t) \in K$. отображение \bar{g} сохраняет длины дуг (следовательно, нестягивающее); треугольник Δabc является образом некоторого треугольника $\Delta a''b''c''$ в K_1 (опять же, вспомните обсуждение кратчайших в конусе из параграфа 3.6.2).

Так как длина S не меньше 2π , то K_1 — пространство неположительной кривизны. А поскольку длины сторон треугольников Δabc и $\Delta a''b''c''$ равны, то эти треугольники имеют общий треугольник сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ в R^2 . Теперь для каждой точки $d \in [bc]$ и соответствующих точек $d'' \in [b''c'']$ и $\bar{d} \in [\bar{b}\bar{c}]$ мы имеем: $|ad| \leq |a''d''| \leq |\bar{a}\bar{d}|$.

Здесь неравенство $|ad| \leq |a''d''|$ следует из того, что \bar{g} — нестягивающее отображение, а неравенство $|a''d''| \leq |\bar{a}\bar{d}|$ — из того, что K_1 имеет неположительную кривизну. Этим доказательство в случае (б) завершено.

Остается рассмотреть случай, когда по крайней мере одна сторона треугольника Δabc проходит через вершину O конуса. Предположим,

что через O проходит сторона $[ab]$. Заметим, что в этом случае расстояние в Γ между проекциями a и b не меньше, чем π .

Если одна или обе стороны $[bc]$, $[ac]$ также проходят через O , доказательство завершается аналогично примерам 4.2.5, 4.2.4. Мы оставляем это читателю как упражнение. Так что рассмотрим только “наиболее общий случай”, когда ни $[ac]$, ни $[bc]$ не проходят через O . Аналогично предыдущему, проекциями кратчайших $[ac]$ и $[bc]$ на Γ являются кратчайшие $[a'c']$ и $[b'c']$ в Γ , и треугольник Δabc содержится в подконусе над объединением $[a'c'] \cup [b'c']$. Теперь, аналогично предыдущему случаю (b), условие на дистанционные функции 4.1.2 для треугольника Δabc сводится к нему же, но для треугольника в конусе K_1 над отрезком длины $|a'c'| + |b'c'|$. Теперь оставшаяся часть теоремы следует из того, что конус над отрезком имеет неположительную кривизну (см. упражнение 4.1.7). \square

4.3. Углы в пространствах Александрова и эквивалентность определений

4.3.1. Монотонность углов. Здесь мы сформулируем еще одно определение пространств Александрова, а затем докажем, что все наши определения эквивалентны.

Пусть α и β — две кратчайшие (параметризованные длиной дуги), исходящие из одной и той же точки p . Такую конфигурацию мы будем называть “шарниром” (α, β) . Как и в параграфе 3.6.5, введем обозначение $\theta(x, y) = \angle \alpha(x)p\beta(y)$; то есть $\theta(x, y)$ — это угол в точке \bar{p} в треугольнике сравнения для треугольника $\Delta \alpha(x)p\beta(y)$.

Определение 4.3.1 (“Условие монотонности углов”). Пространство X называется пространством неотрицательной (соотв., неположительной) кривизны, если каждая его точка имеет такую окрестность, что для любых двух кратчайших α и β , исходящих из одной точки p и содержащихся в этой окрестности и, соответствующая функция $\theta(x, y)$ является невозрастающей (соотв., убывающей) по каждой из переменных x и y .

Из этого определения немедленно следует:

Предложение 4.3.2. *Если X — пространство Александрова в смысле определения 4.3.1, то между любыми двумя кратчайшими в X (с общим началом) существует корректно определенный угол.*

4.3.2. Эквивалентность определений. Нам понадобится один факт из элементарной евклидовой геометрии, так называемая лемма Александрова (эта лемма впервые появилась в аналогичном контексте в книге А.Д.Александрова

[A1]). Прежде чем ее сформулировать, объясним ее смысл с инженерной точки зрения. Подобные ассоциации бывают очень полезны для понимания геометрических теорем.

Рассмотрим плоский четырехугольник, сделанный из четырех шарнирно соединенных стержней. Обозначим два противоположных (по диагонали) соединения (углы четырехугольника) через b и d и предположим, что все углы четырехугольника, за исключением, быть может, d , меньше, чем π . Рассматривая две стороны, примыкающие к d , как шарнир, начнем “раскрывать” этот шарнир до тех пор, пока он полностью распрямится, то есть пока стороны, примыкающие к d , станут продолжениями друг друга (если такое возможно). Тогда, если угол в точке d был меньше π (то есть, если четырехугольник был выпуклым), то d при таком распрямлении приблизится к b , а в противном случае — отдалятся.

Вероятно, хороший рисунок происходящего может заменить доказательство и убедить большинство читателей.

Формально лемма может быть сформулирована следующим образом:

Лемма 4.3.3 (Лемма Александрова). Пусть a, b, c, d — четыре точки на плоскости, причем a и c лежат в различных полуплоскостях по отношению к прямой bd . Рассмотрим такой треугольник $\Delta a'b'c'$ на плоскости, что

$$|ab| = |a'b'|, \quad |bc| = |b'c'|, \quad |ad| + |dc| = |a'c'|,$$

и пусть d' — точка на стороне $[a'c']$ такая, что $|ad| = |a'd'|$.

Тогда неравенство $\angle adb + \angle bdc < \pi$ верно тогда и только тогда, когда $|b'd'| < |bd|$. Кроме того, в этом случае также $\angle b'a'd' < \angle bad$ и $\angle b'c'd' < \angle bcd$; см. рис. 4.3.2 слева.

Аналогично, $\angle adb + \angle bdc > \pi$ тогда и только тогда, когда $|b'd'| > |bd|$, и в этом случае $\angle b'a'd' > \angle bad$ и $\angle b'c'd' > \angle bcd$; см. рис. 4.3.2 справа.

PSfrag replace ~~список~~.

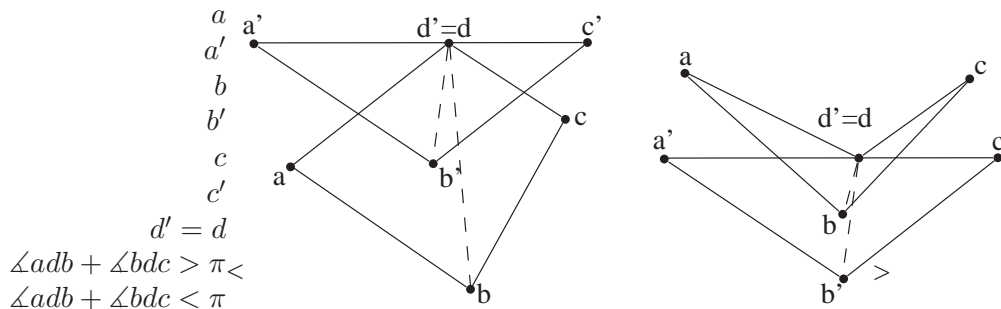


Рис. 4.3: Расстояние bd убывает или растет в зависимости от $\angle adb + \angle bdc$.

Доказательство. Мы используем только следующее свойство треугольников: если длины двух сторон плоского треугольника зафиксированы, то угол между ними является монотонно возрастающей функцией длины третьей стороны. Другими словами, если $|xy| = |x'y'|$ и $|yz| = |y'z'|$ для двух плоских треугольников $\triangle xyz$ и $\triangle x'y'z'$, то $\angle xyz > \angle x'y'z'$ тогда и только тогда, когда $|xz| > |x'z'|$, и наоборот.

Возьмем точку c_1 на луче ad так, чтобы d лежала между a и c_1 , и $|dc| = |dc_1|$. Предположим, что $\angle adb + \angle bdc > \pi$; тогда $\angle bdc_1 < \angle bdc$. Сравнивая треугольники $\triangle bdc$ и $\triangle bdc_1$ видим, что $|bc_1| < |bc| = |b'c'|$

Сравнивая теперь треугольники $\triangle abc_1$ и $\triangle a'b'c'$ (где $|ab| = |a'b'|$ и $|ac_1| = |a'c'|$), мы получаем $\angle bac_1 < \angle b'a'c'$. Следовательно, $|bd| < |b'd'|$ (из треугольников $\triangle bad$ и $\triangle b'ad'$).

Случай $\angle adb + \angle bdc < \pi$ аналогичен с точностью до замены неравенств на противоположные. \square

Замечание 4.3.4. Эта лемма остается справедливой (и доказывается точно так же) и в случае, если треугольники лежат на сфере или гиперболической плоскости (последняя будет определена в главе 5) вместо евклидовой плоскости. Мы воспользуемся этим замечанием позднее, когда мы будем рассматривать другие ограничения на кривизну.

Теорема 4.3.5. *Все определения, (4.1.2 — сравнение дистанционных функций, 4.1.9 — сравнение треугольников, 4.1.15 — сравнение углов, и 4.3.1 — монотонность углов), равносильны между собой.*

Замечание 4.3.6. Наши определения локальны. Их эквивалентность означает, что если одно из определений выполнено в окрестности U некоторой точки, то другие выполняются в некоторой другой окрестности V , возможно, меньшей, чем U . Все такие окрестности мы будем называть нормальными областями.

Доказательство теоремы 4.3.5. Доказательства для неположительной и неотрицательной кривизны аналогичны (с точностью до замены неравенств на противоположные). Чтобы избежать повторов, мы рассмотрим детально только случай неположительной кривизны, а затем укажем те изменения, которые надо сделать во втором случае.

- (1) Условия сравнения дистанционных функций и сравнения треугольников, очевидно, эквивалентны.
- (2) Предположим, что выполнено условие сравнения треугольников. Покажем, что тогда имеет место монотонность углов.

Рассмотрим шарнир из двух кратчайших $\alpha = [p, a]$, $[p, b]$ и возьмем точку a_1 на кратчайшей α . Рассмотрим теперь треугольники сравнения $\triangle \bar{p}\bar{a}\bar{b}$ и $\triangle \bar{p}\bar{a}_1\bar{b}$ для треугольников $\triangle rab$

и Δpa_1b . Пусть \tilde{a} — такая точка на стороне $\bar{p}\bar{a}_1$, что $|\bar{p}\tilde{a}| = |pa|$. Тогда условие на треугольники дает: $|\bar{a}\tilde{b}| \geq |ab| = |\bar{a}\bar{b}|$. Это означает, что $\angle \bar{a}_1\bar{p}\bar{b} \geq \angle \bar{a}\bar{p}\bar{b}$, то есть имеет место монотонность углов.

- (3) Докажем, что из монотонности углов 4.3.1 следует условие сравнения углов 4.1.15. Для этого рассмотрим треугольник Δabc . Пусть кратчайшие α, β — его стороны $[ba], [bc]$, и пусть $\alpha(0) = \beta(0) = b$. Из монотонности углов следует

$$\angle abc \equiv \angle(\alpha, \beta) = \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t, t) \leq \theta(|ab|, |bc|)$$

где θ означает тот же угол, что и в 4.3.1. Теперь из того, что $\theta(|ab|, |bc|) = \angle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$, следует требуемое неравенство для углов.

- (4) Остается доказать, что из условия сравнения углов 4.1.15 следует условие сравнения треугольников 4.1.9. Рассмотрим треугольник Δabc и точку d на стороне $[ac]$. Заметим, что $\angle bda + \angle bdc \geq \angle adc = \pi$ по неравенству треугольника для углов. Поместим треугольники сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{d}$ и $\Delta \bar{c}\bar{b}\bar{d}$ по разные стороны от прямой $\bar{b}\bar{d}$ in \mathbb{R}^2 . Тогда неравенство для углов дает $\angle \bar{a}\bar{d}\bar{b} + \angle \bar{c}\bar{d}\bar{b} \geq \pi$. Теперь из леммы Александра 4.3.3 следует, что $|bd| = |\bar{b}\bar{d}| \leq |\bar{b}_1\bar{d}_1|$, где $\Delta \bar{a}_1\bar{b}_1\bar{c}_1$ — треугольник сравнения для Δabc , а \bar{d}_1 — такая точка на $[\bar{a}_1\bar{c}_1]$. Последнее неравенство представляет собой условие сравнения треугольников для Δabc и точки d .

Тем самым эквивалентность всех определений в случае неположительной кривизны доказана.

Для доказательства теоремы в случае неотрицательной кривизны нужно заменить все неравенства на противоположные. Однако, кроме неравенств, входящих в определения пространств ограниченной кривизны, мы использовали еще то, что сумма смежных углов не меньше π . Это верно для любого пространства с внутренней метрикой, но противоположное неравенство верно не всегда. Именно поэтому предположение, что сумма смежных углов равна π , было включено в определение через углы 4.1.15 в случае неотрицательной кривизны. Чтобы завершить доказательство теоремы, нам остается показать, что это предположение о сумме смежных углов следует из условия монотонности углов. Мы сформулируем это в виде отдельной леммы (она имеет множество применений).

Лемма 4.3.7. Пусть X — пространство неотрицательной кривизны в смысле определения 4.3.1 (через монотонность углов). Тогда сумма любых смежных углов равна π . Это значит, что если q_0 — внутренняя точка кратчайшей p_0q_0 , и q_0s_0 — тоже кратчайшая, то $\angle p_0q_0s_0 + \angle s_0q_0r_0 = \pi$.

Доказательство. По неравенству треугольника для углов мы имеем $\angle p_0q_0s_0 + \angle s_0q_0r_0 \geq \angle p_0q_0r_0 \geq \pi$

Чтобы доказать противоположное неравенство, рассмотрим произвольные точки p, s, r на кратчайших $[p_0q_0], [s_0q_0], [r_0q_0]$, соответственно. Расположим треугольники сравнения $\Delta \bar{p}\bar{q}\bar{s}$ и $\Delta \bar{s}\bar{q}\bar{r}$ на плоскости \mathbb{R}^2 по разные стороны от прямой $\bar{q}\bar{s}$. Пусть $\Delta \bar{p}_1\bar{s}_1\bar{r}_1$ — треугольник сравнения для треугольника Δpsr . Из условия монотонности углов 4.3.1 следует, что $\angle \bar{s}\bar{p}\bar{q} \geq \angle \bar{s}_1\bar{p}_1\bar{r}_1$. Теперь, по лемме Александра 4.3.3, четырехугольник $\bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{s}$ — выпуклый, то есть $\angle \bar{p}\bar{q}\bar{s} + \angle \bar{r}\bar{q}\bar{s} \leq \pi$. Переходя к пределу при условии, что точки p, r, s стремятся к q , мы получим желаемое неравенство $\angle p_0q_0s_0 + \angle s_0q_0r_0 \leq \angle p_0q_0r_0 \leq \pi$. \square

Доказав лемму, мы тем самым завершили доказательство теоремы 4.3.5. \square

Упражнение 4.3.8. Докажите, что наши определения пространств неположительной (соотв. неотрицательной) кривизны эквивалентны следующему: Пусть Δpqr — (достаточно малый) треугольник в X , а $\Delta \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ — его треугольник сравнения. Выберем произвольно точки p_1, r_1 на сторонах $[pq], [rq]$ треугольника. Обозначим через \bar{p}_1, \bar{r}_1 такие точки на сторонах $[\bar{p}\bar{q}], [\bar{r}\bar{q}]$ треугольника сравнения, что $|qp_1| = |\bar{q}\bar{p}_1|$, $|qr_1| = |\bar{q}\bar{r}_1|$. Тогда справедливо неравенство $|p_1r_1| \leq |\bar{p}_1\bar{r}_1|$ (соотв., $|p_1r_1| \geq |\bar{p}_1\bar{r}_1|$).

4.3.3. Полунепрерывность углов. Углы треугольника на плоскости непрерывно зависят от его вершин. Это, вообще говоря, неверно для пространств с внутренней метрикой. Однако в пространствах Александра углы обладают некоторыми свойствами полунепрерывности.

Предположим, что две последовательности кратчайших $[a_i b_i]$ и $[a_i c_i]$ равномерно сходятся к кратчайшим $[ab]$ и $[ac]$, соответственно. (Все кратчайшие рассматриваются как пути, параметризованные длиной дуги.) Заметим, что равномерная сходимости путей — гораздо более сильное требование, чем предположение, что $a_i \rightarrow a$, $b_i \rightarrow b$ и $c_i \rightarrow c$. Тем не менее, в общем случае нельзя сказать ничего определенного о связи между углом $\angle bac$ и пределом последовательности $\angle b_i a_i c_i$, даже если этот предел существует.

Пример 4.3.9. Пусть $[ab]$ и $[bc]$ — ребра куба (мы рассматриваем поверхность куба, а не его внутренность). Рассмотрим отрезки $[a_i b_i]$ и $[b_i c_i]$, лежащие на разных гранях куба, параллельные ребрам $[ab]$ и $[bc]$, соответственно, и отстоящие от них на расстояния $1/i$; см. рис. 4.4.

Шарниры $([a_i b_i], [b_i c_i])$ сходятся к шарниру $([ab], [bc])$ при $i \rightarrow \infty$. Однако $\angle abc = \pi/2$, в то время как $\angle a_i b_i c_i = \pi$ при всех i .

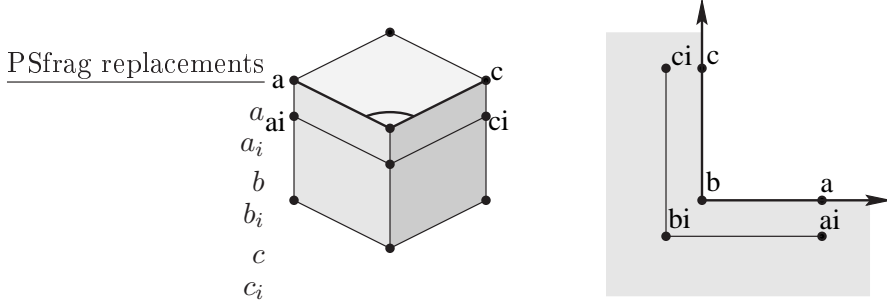


Рис. 4.4: В пределе угол может скачком уменьшиться или увеличиться.

Пример 4.3.10. Рассмотрим координатную плоскость \mathbb{R}^2 , из которой удален координатный квадрант $\{x > 0, y > 0\}$. Пусть $a = (1, 0)$, $a_i = (1, -1/i)$, $b = (0, 0)$, $b_i = (-1/i, -1/i)$, $c = (0, 1)$, $c_i = (-1/i, 1)$. Тогда шарниры $([a_i b_i], [b_i c_i])$ сходятся к шарниру $([ab], [bc])$; но $\angle abc = \pi$, в то время как $\lim_{i \rightarrow \infty} \angle a_i b_i c_i = \pi/2$.

Заметим, что в примере 4.3.9 пространство имеет неотрицательную кривизну, а в примере 4.3.10 — неположительную. Эти примеры иллюстрируют следующее свойство полунепрерывности углов

Теорема 4.3.11. Пусть X — пространство неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны. Предположим, что последовательности кратчайших $\{[a_i b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{[a_i c_i]\}_{i=1}^{\infty}$ сходятся к кратчайшим $[ab]$ и $[ac]$, соответственно. Тогда $\angle bac \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \angle b_i a_i c_i$ (соотв., $\angle bac \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \angle b_i a_i c_i$).

Доказательство. Обозначим через α и α_i углы $\angle bac$ и $\angle b_i a_i c_i$. Рассмотрим точки $b' \in [a, b]$, $c' \in [a, c]$ и $b'_i \in [a_i, b_i]$, $c'_i \in [a_i, c_i]$ на расстоянии x от a и a_i , соответственно, где x — достаточно малое положительное число. Обозначим через $\theta(x)$ и $\theta_i(x)$ углы сравнения $\tilde{\angle} b' a c'$ и $\tilde{\angle} b'_i a_i c'_i$. Заметим, что $|a_i b'_i| = |ab|$, $|a_i c'_i| = |ac|$ и $|b'_i c'_i| \rightarrow |bc|$ при $i \rightarrow \infty$ (для фиксированного числа x), и, следовательно, $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i(x) = \theta(x)$.

По определению угла, $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$ и $\alpha_i = \lim_{x \rightarrow 0} \theta_i(x)$. Если X имеет неположительную кривизну, то θ и θ_i — неубывающие функции (по условию монотонности углов). Следовательно $\theta_i(x) \geq \alpha_i$ при всех $x > 0$, и тем самым

$$\theta(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i(x) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \alpha_i.$$

Отсюда следует, что $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \alpha_i$.

Если X имеет неотрицательную кривизну, доказательство аналогично: θ_i — невозрастающая функция, следовательно $\theta_i(x) \leq \alpha_i$, и тем самым

$\theta(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \alpha_i$ при всех $x > 0$. Следовательно $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \alpha_i$. \square

4.4. Анализ дистанционных функций

Этот параграф — не обязательный, и его материал нигде в дальнейшем не используется.

Мы уже упоминали, что дистанционные функции пространств Александрова ограниченной кривизны либо “более выпуклые”, либо “более вогнутые” (в зависимости от знака кривизны), чем дистанционная функция евклидовой плоскости. Здесь мы формализуем и обоснуем это утверждение. Такой подход к определению пространств Александрова выглядит скорее аналитическим, чем геометрическим, но в некоторых случаях он оказывается очень полезным.

Как и в определении 4.1.2, рассмотрим пространство (X, d) с внутренней метрикой, точку $p \in X$, и кратчайшую $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, параметризованную длиной дуги. Рассмотрим функцию $g(t) = d(\gamma(t), p)$ и соответствующую функцию сравнения g_0 для евклидова отрезка. Заметим, что функция g_0 однозначно определяется функцией g ; нахождение явного выражения для g_0 через $A = d(\gamma(a), p) = g(a)$ и $B = d(\gamma(b), p) = g(b)$ — это простое тригонометрическое упражнение. Следовательно, мы определили пространства ограниченной кривизны, ограничив класс функций, которые могут получаться сужением дистанционных функций на кратчайшие. Уточним это описание.

Отметим, что даже без ограничений на кривизну, не всякая непрерывная функция может быть получена как одномерная дистанционная функция. Во первых, очевидно, что g должна быть неотрицательной; далее, она должна быть нерастягивающей (напомним, что функция g называется *нерастягивающей*, если $|g(t) - g(s)| \leq |t - s|$ для всех s, t . Для гладкой функции g это равносильно тому, что $|g'(t)| \leq 1$ для всех t .)

Упражнение 4.4.1. Докажите, что g — нерастягивающая функция.

Подсказка. Это тривиально следует из неравенства треугольника.

Нам понадобится полный список всех функций g_0 одной переменной, которые могут быть получены как сужение евклидовой дистанционной функции на отрезок (иными словами, список всех функций, с которыми мы будем сравнивать). Если $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ и γ_0 — прямая в \mathbb{R}^2 , параметризованная длиной, то $g_0(t) = |\bar{p} - \gamma_0(t)| = \sqrt{(t+c)^2 + h^2}$, где число c выбрано так, что точка $\gamma_0(-c)$ — ортогональной проекция точки \bar{p} на γ_0 , а h — расстояние от \bar{p} до этой проекции. Таким образом, множество одномерных евклидовых дистанционных функций совпадает с множеством

функций вида $t \mapsto \sqrt{(t+c)^2 + h^2}$, где c и h — любые вещественные числа.

Чтобы иметь удобный язык для выражения условий сравнения, дадим следующее общее определение.

Определение 4.4.2. Пусть F — некоторый класс непрерывных функций. Непрерывная функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется F -выпуклой (соотв., F -вогнутой), если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и любой функции $f \in F$, такой, что $g(x) = f(x)$ и $g(y) = f(y)$, при всех $z \in [x, y]$ выполняется неравенство $f(z) \geq g(z)$ (соотв., $f(z) \leq g(z)$).

Пример 4.4.3. Мы получим обычные выпуклые и вогнутые функции, если выберем класс $F = \{f(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$, состоящий из всех линейных функций.

Пример 4.4.4. Класс $F_\lambda = \{f(t) = \lambda t^2 + at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$ приводит к понятию λ -выпуклости. λ -выпуклость означает, что можно коснуться снизу графика функции g (в любой точке) транслятом параболы $y = \lambda x^2$. Иначе говоря, если гладкая выпуклая функция описывается неравенством $g'' \geq 0$, то для λ -выпуклой функции это неравенство заменяется на неравенство $g'' \geq \lambda$.

Нас будет интересовать класс функций

$$E = \{f(t) = \sqrt{(t+c)^2 + h^2}, c, h \in \mathbb{R}\}.$$

В самом деле, наше определение 4.1.2 через дистанционные функции как раз и состоит в том, что все одномерные дистанционные функции g являются E -выпуклыми (соотв., E -вогнутыми).

Замечание 4.4.5. Точнее говоря, поскольку наши условия ограниченности кривизны были локальными, нам следовало бы накладывать ограничения на одномерную дистанционную функцию g только локально, то есть требовать, чтобы сужение g на интервал было E -выпуклой (или E -вогнутой) функцией, если максимальное значение этого сужения достаточно мало. Однако, для простоты мы будем игнорировать это обстоятельство и рассматривать E -выпуклые функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Следующее упражнение обобщает тот факт, что выпуклая функция допускает “линейную опору” в каждой точке.

Упражнение 4.4.6. Докажите, что неотрицательная нестягивающая функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является E -выпуклой (соотв., E -вогнутой) тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ существует функция $f \in E$ такая, что $f(x_0) = g(x_0)$ и $f \leq g$ (соотв., $f \geq g$) при всех x .

Заметим, что, в частности, все неотрицательные нерастягивающие E -выпуклые функции выпуклы в обычном смысле.

Класс E совпадает с множеством неотрицательных решений дифференциального уравнения $g''(t)g(t) = 1 - (g'(t))^2$. Аналогично случаю выпуклых функций, гладкая неотрицательная нерастягивающая функция g является E -выпуклой (соотв., E -вогнутой) тогда и только тогда, когда

$$g''(t) \geq \frac{1 - (g'(t))^2}{g(t)} \quad (\text{соотв., } g''(t) \leq \frac{1 - (g'(t))^2}{g(t)}).$$

Упражнение 4.4.7. Докажите это.

Выпуклые функции, возможно не гладкие, имеют приятные свойства: они имеют всюду односторонние правые и левые производные; они дифференцируемы всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, и их производные могут иметь только положительные (соотв., отрицательные) скачки в точках нарушения гладкости. То же самое справедливо для E -выпуклых и E -вогнутых функций:

Упражнение 4.4.8. Пусть $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная нерастягивающая E -выпуклая (соотв., E -вогнутая) функция. Докажите, что

1. g непрерывна.
2. g имеет всюду односторонние правые и левые производные, причем левые производные не больше (соотв., не меньше), чем правые.
3. Множество точек, где g не дифференцируема (то есть правая производная не равна левой), конечно или счетно.
4. Производная функции g непрерывна на множестве, где она определена.

Подсказка. Функция $g(t)^2 - t^2$ выпукла (соотв., вогнута).

4.5. Формула первой вариации

Название “формула первой вариации” пришло из дифференциальной геометрии и означает правило дифференцирования длины переменной кривой. В этом параграфе мы получим аналогичную формулу для кратчайшей в пространстве Александрова. Мы ограничимся случаем, когда один из концов кратчайшая зафиксирован, а другой движется вдоль геодезической. (Более общие случаи вынесены в упражнения в конце параграфа.) Так как длина кратчайшей равна расстоянию между ее концами, то эта же формула дает правило дифференцирования дистанционной функции в пространстве Александрова.

Рассмотрим сначала евклидов случай. Пусть $\gamma: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая натурально параметризованная кривая в \mathbb{R}^2 , а $p \in \mathbb{R}^2$ — точка, не

принадлежащая (образу) γ . Рассмотрим дистанционную функцию $l(t) = |p\gamma(t)|$. Тогда

$$\frac{dl}{dt} = -\cos \angle(p - \gamma(t), \gamma'(t)),$$

где γ' — это, конечно, вектор скорости кривой γ .

Упражнение 4.5.1. Докажите эту формулу.

Теперь мы покажем, что аналогичная формула справедлива для пространств неположительной и неотрицательной кривизны.

Введем следующие обозначения. Пусть X — пространство с внутренней метрикой, $\gamma: [0, T] \rightarrow X$ — натурально параметризованная кратчайшая, $a = \gamma(0)$, $d = \gamma(T)$ и $p \in X \setminus \{a\}$. Положим $l(t) = |p\gamma(t)|$ при всех $t \in [0, T]$ и зафиксируем некоторую кратчайшую σ_t , соединяющую $\gamma(t)$ с p .

Следующее предложение имеет общий характер: оно верно для любого пространства с внутренней метрикой и не связано с ограничениями на кривизну.

Предложение 4.5.2. Если угол $\alpha = \angle rad$ между кратчайшими γ и $[ap] = \sigma_0$ существует, то

$$(4.1) \quad \limsup_{t \rightarrow +0} \frac{l(t) - l(0)}{t} \leq -\cos \alpha.$$

Замечание 4.5.3. Читатель, которому больше нравятся традиционные обозначения с бесконечно малыми величинами, вероятно, предпочтет записать неравенство (4.1) в форме:

$$l(t) \leq l(0) - t \cos \alpha + o(t), \quad t \rightarrow +0.$$

Замечание 4.5.4. Так как левая часть неравенства (4.1) не зависит от σ_0 , то можно написать

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{l(t) - l(0)}{t} \leq \inf_{\sigma_0} (-\cos \alpha),$$

или, равносильно,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{l(t) - l(0)}{t} \leq -\cos \alpha_{\min},$$

где α_{\min} — инфимум углов между γ и всевозможными кратчайшими соединяющими a с p . (См также следствие 4.5.7 ниже.)

Нам понадобится следующая элементарная лемма.

Лемма 4.5.5. Пусть $\triangle abc$ — треугольник в \mathbb{R}^2 , $\alpha = \angle bac$, $t = |ac|$. Тогда

$$\left| \cos \alpha - \frac{|ab| - |bc|}{t} \right| \leq \frac{t}{|ab|}.$$

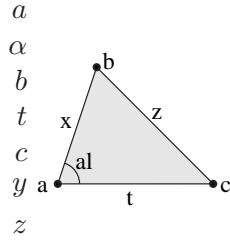


Рис. 4.5: Лемма 4.5.5.

Доказательство. Введем обозначения $|ab| = y$, $|bc| = z$ (см.рисунок 4.5). По теореме косинусов мы имеем

$$\cos \alpha = \frac{t^2 + y^2 - z^2}{2ty} = \frac{y - z}{t} \frac{y + z}{2y} + \frac{t}{2y}.$$

Так как по неравенству треугольника $\left| \frac{y + z}{2y} - 1 \right| \leq \frac{t}{2y}$, и $\left| \frac{y - z}{t} \right| \leq 1$, то теперь

$$\begin{aligned} \left| \cos \alpha - \frac{y - z}{t} \right| &= \left| \frac{y - z}{t} \frac{y + z}{2y} + \frac{t}{2y} - \frac{y - z}{t} \right| \\ &\leq \left| \frac{y - z}{t} \right| \cdot \left| \frac{y + z}{2y} - 1 \right| + \frac{t}{2y} \leq 1 \cdot \frac{t}{2y} + \frac{t}{2y} \leq \frac{t}{y}. \end{aligned}$$

□

Доказательство предложения 4.5.2. Рассмотрим две “переменные” точки: точку b на кратчайшей $[ap] = \sigma_0$ и точку $c = \gamma(t)$. По неравенству треугольника

$$|ab| - |bc| = |ap| - (|bp| + |bc|) \leq l(0) - l(t).$$

Теперь применим лемму 4.5.5к треугольнику сравнения для $\triangle abc$. Это дает

$$\cos \tilde{\angle} abc \leq \frac{|ab| - |bc|}{t} + \frac{t}{|ab|} \leq -\frac{l(t) - l(0)}{t} + \frac{t}{|ab|}.$$

Можно считать, что точки b и c сходятся к a так, что $t/|ab| \rightarrow 0$. Теперь, переходя к пределу в последнем неравенстве, мы получаем требуемое неравенство. □

Далее мы придерживаемся обозначений, введенных перед предложением 4.5.2. Основной результат этого параграфа составляет следующая теорема.

Теорема 4.5.6 (Формула первой вариации). Пусть X — пространство неположительной или неотрицательной кривизны и пусть обозначения γ , σ_t и $l(t)$ — те же, что и выше. Предположим, что последовательность

σ_{t_i} сходится к σ_0 для некоторой последовательности $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $t_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда существует предел

$$(4.2) \quad \lim_{t_i \rightarrow 0} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} = -\cos \alpha,$$

где α — угол между σ_0 и γ в точке a .

Доказательство. Согласно предложению 4.5.2, мы имеем

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} \leq -\cos \alpha.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} \geq -\cos \alpha.$$

Зафиксируем столь малое $r > 0$, что $|ap| > 5r$, и шар $B_{5r}(a)$ является нормальной областью (см. пункт 4.1.4 и замечание 4.3.6); этот шар должен содержать все треугольники, используемые в последующих рассуждениях. Можно считать, что $\gamma(t_i) \in B_r(a)$ при всех i . Для каждого i положим $c_i = \gamma(t_i)$, и пусть b_i — такие точки на кратчайших $[c_i p] = \sigma_{t_i}$, что $|b_i c_i| = r$. Далее мы докажем, что

$$(4.3) \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \tilde{\angle} ac_i b_i \leq \pi - \alpha.$$

Сначала покажем, как теорема следует из неравенства (4.3). Применим лемму 4.5.5 к треугольнику сравнения для $\Delta ac_i b_i$. Это дает:

$$l(0) = |pa| \leq |pb_i| + |b_i a| \leq |pb_i| + |b_i c_i| - t_i \cos \tilde{\angle} ac_i b_i + \frac{t_i^2}{|b_i c_i|}.$$

Так как $|pb_i| + |b_i c_i| = l(t_i)$, то

$$\frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} \geq \cos \tilde{\angle} ac_i b_i - \frac{t_i}{|b_i c_i|} = \cos \tilde{\angle} ac_i b_i - \frac{t_i}{r}.$$

Теперь, согласно неравенству (4.3),

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} (\cos \tilde{\angle} ac_i b_i) \geq \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

что доказывает теорему.

Неравенства (4.3) доказываются по разному в случаях неположительной и неотрицательной кривизны.

1. Пусть X — пространство неотрицательной кривизны. Тогда, согласно определению через сравнение углов 4.1.15

$$\tilde{\angle} ac_i b_i \leq \angle ac_i b_i = \pi - \angle b_i c_i d.$$

Отсюда сразу следует неравенство (4.3), так как по полунепрерывности углов (теорема 4.3.11) мы имеем $\liminf_{i \rightarrow \infty} \angle b_i c_i d \geq \alpha$.

2. Пусть X — пространство неположительной кривизны. Обозначим через b такую точку кратчайшей $[ap] = \sigma_0$, что $|ab| = r$. Тогда $\angle bab_i \leq \tilde{\angle} bab_i$, и $\tilde{\angle} bab_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, так как $|b_i b| \rightarrow 0$, в то время как $|ab|$ и $|ab_i|$ отделены от нуля. Следовательно, $\angle bab_i \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$.

Из неравенства треугольника для углов следует, что $\angle c_i ab_i \rightarrow \alpha$ при $i \rightarrow \infty$. Далее, согласно определению 4.1.15,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \tilde{\angle} c_i ab_i \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \angle c_i ab_i = \alpha.$$

С другой стороны, так как $\tilde{\angle} c_i ab_i + \tilde{\angle} ac_i b_i + \tilde{\angle} ab_i c_i = \pi$ и $\tilde{\angle} ab_i c_i \rightarrow 0$, то $\tilde{\angle} c_i ab_i + \tilde{\angle} ac_i b_i \rightarrow \pi$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \tilde{\angle} ac_i b_i = \pi - \liminf_{i \rightarrow \infty} \tilde{\angle} c_i ab_i \leq \pi - \alpha.$$

Этим неравенство (4.3) доказано и в случае неположительной кривизны. \square

Из теоремы 4.5.6 очевидно следует такое правило дифференцирования длины кратчайших: если $\{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$ — непрерывное семейство кратчайших, соединяющих точку p с точками $\gamma(t)$, то существует правая производная $dl/dt|_{t=0} = -\cos \alpha$. Кроме того, мы получим формулу для дифференцирования расстояния от p до $\gamma(t)$, даже если кратчайшие соединяющие p с $\gamma(t)$ не единственны. Именно, справедливо следующее

Следствие 4.5.7. Пусть X — полное локально компактное пространство неположительной или неотрицательной кривизны, $\gamma : [0, T]$ — геодезическая, параметризованная длиной дуги, $p \in X$ и $p \neq \gamma(0)$. Тогда правая производная функции $t \mapsto l(t) = |p\gamma(t)|$ существует и равна

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{l(t) - l(0)}{t} = -\cos \alpha_{\min}$$

где α_{\min} — это инфимум (на самом деле минимум) углов между γ и кратчайшими, соединяющими $\gamma(0)$ с p .

Доказательство. Согласно предложению 4.5.2

$$\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{l(t) - l(0)}{t} \leq -\cos \alpha_{\min}.$$

Выберем последовательность $\{t_i\}$, сходящуюся к 0 так, чтобы при $i \rightarrow \infty$

$$\frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} \longrightarrow \liminf_{t \rightarrow +0} \frac{l(t) - l(0)}{t}.$$

Зафиксируем некоторые кратчайшие σ_{t_i} , соединяющие p с $\gamma(t_i)$. По теореме Арцела-Асколи 2.5.14, последовательность $\{\sigma_{t_i}\}$ содержит подпоследовательность,

сходящуюся к некоторой кратчайшей σ_0 . Мы можем предполагать, что сама последовательность $\{\sigma_{t_i}\}$ сходится к σ_0 . Теперь, по теореме 4.5.6,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} = -\cos \alpha,$$

где α — угол между γ и σ_0 . Таким образом,

$$\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{l(t) - l(0)}{t} = -\cos \alpha \geq -\cos \alpha_{\min},$$

откуда следует желаемая формула для правой производной. Заметим, что попутно мы получили и равенство $\alpha = \alpha_{\min}$, так что минимум углов на самом деле достигается (на σ_0). \square

Замечание 4.5.8. Теорема 4.5.6 и следствие 4.5.7 накладывают ограничение на кратчайшую σ_0 , которая может быть получена как предел кратчайших $\{\sigma_{t_i}\}$, $t_i \rightarrow 0$. Именно, если σ_0 — предельная кратчайшая, то, согласно следствию 4.5.7, угол $\alpha = \angle(\gamma, \sigma_0)$ равен α_{\min} . Действительно, предел $(l(0) - l(t_i))/t_i$ равен $\cos \alpha$ по теореме, и этот же предел равен $\cos \alpha_{\min}$ по следствию. Следовательно $\alpha = \alpha_{\min}$.

Упражнение 4.5.9. Докажите, что теорема 4.5.6 остается справедливой для любой кривой γ , имеющей определенное направление в точке a (а не только для кратчайшей).

Упражнение 4.5.10. Обобщите теорему 4.5.6 на случай, когда оба конца кратчайшей $\{\sigma_t\}$ движутся вдоль геодезических γ_1 и γ_2 с постоянными скоростями v_1 и v_2 . Именно, докажите, что если кратчайшие σ_t соединяют $\gamma_1(t)$ с $\gamma_2(t)$, и последовательность $\{\sigma(t_i)\}$ сходится к σ_0 , то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} = -v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2,$$

где $l(t) = L(\sigma_t) = |\gamma_1(t)\gamma_2(t)|$ и $\alpha_j = \angle(\sigma_0, \gamma_j)$, $j = 1, 2$.

Упражнение 4.5.11. Обобщите следствие 4.5.7 на случай дистанционных функций множеств. Именно, докажите следующее: если $\gamma: [0, T] \rightarrow X$ — кратчайшая, A — замкнутое множество, не содержащее $\gamma(0)$, и $l(t) = \text{dist}(\gamma(t), A)$, то

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{l(t) - l(0)}{t} = -\cos \alpha_{\min},$$

где α_{\min} — минимум углов между γ и кратчайшими длинами $l(0)$, соединяющими $\gamma(0)$ с A .

Замечание 4.5.12. Теорема 4.5.6 остается справедливой для более общих пространств Александрова кривизны, ограниченной снизу или сверху (не обязательно нулем). Эти пространства будут определены в следующем параграфе 4.6. Доказательства аналогичны и требуют только минимальных изменений.

4.6. Ненулевые ограничения на кривизну и глобализация

4.6.1. Ненулевые ограничения на кривизну. До сих пор мы рассматривали только пространства неположительной или неотрицательной кривизны. Такое упрощение было сделано для того, чтобы помочь читателю понять основные идеи, не отвлекаясь на технические детали. Теперь мы собираемся определить пространства Александрова кривизны не больше или не меньше k для любого $k \in \mathbb{R}$. Такое обобщение не является просто погоней за общностью. Истинная причина состоит в том, что пространства кривизны, скажем, ≥ 1 или ≤ -1 , обладают новыми важными свойствами, и сравнение с нулем недостаточно для их выявления.

На самом деле достаточно рассмотреть, в дополнение к случаю $k = 0$, еще только два случая, $k = 1$ и $k = -1$, потому что все другие случаи можно свести к этим трем за счет изменения масштаба.

Пока что мы продолжаем считать все рассматриваемые метрики строго внутренними (более общие определения можно будет найти в главах 9 и 10).

Исторически понятие кривизны пришло из дифференциальной геометрии, в первую очередь как гауссова кривизна двумерной поверхности или двумерного риманова многообразия, а затем как секционная кривизна в старших размерностях. Здесь пока что несущественно, что эти термины значат; во всяком случае это — классические объекты дифференциальной геометрии. Мы кратко рассмотрим римановы многообразия и их кривизны в главах 5 и 6. Пока что достаточно упомянуть, что гауссова и секционная кривизны — это вещественные функции, введенные с помощью определенных дифференциальных выражений; риманово многообразие является пространством Александрова неположительной (соотв., неотрицательной) кривизны тогда и только тогда, когда его секционные кривизны всюду неположительны (соотв., неотрицательны). Эти два класса римановых многообразий играют важную роль в римановой геометрии, и это служит одним из доводов, почему следует изучать пространства Александрова.

Аналогично, классы пространств Александрова кривизны $\geq k$ или $\leq k$ (которые мы скоро определим) содержат все римановы многообразия, секционные кривизны которых всюду $\geq k$ (соотв., $\leq k$).

Чтобы подчеркнуть связь между нашими прежними классами (пространств неотрицательной и неположительной кривизны) и новыми классами (еще не определенными) мы упомянем следующие факты, которые мы докажем позднее:

1. Если X — пространство неотрицательной кривизны (или, более общо, кривизны, ограниченной снизу), то каждое его пространство направлений является пространством кривизны ≥ 1 .

2. Если X — пространство с внутренней метрикой неположительной кривизны (или, более общо, кривизны, ограниченной сверху), то каждое его пространство направлений является пространством кривизны ≤ 1 .

Определения. Сущность упомянутых обобщений состоит в том, что рассматриваемое пространство сравнивается, вместо евклидовой плоскости, с другими “модельными пространствами”. На самом деле роль этих модельных пространств играют стандартные двумерные пространства постоянной гауссовой кривизны k . Если $k > 0$, то это — евклидова сфера радиуса $1/\sqrt{k}$. При $k < 0$ модельными пространствами служат гиперболические плоскости кривизны k . Гиперболическая плоскость будет определена позднее, в главе 5. Пока же вы можете ограничиться случаем $k \geq 0$, а после знакомства с гиперболической плоскостью еще раз посетить этот параграф.

Чтобы избежать отдельного рассмотрения трех случаев: $k < 0$, $k = 0$ и $k > 0$, мы введем понятие k -плоскости:

Определение 4.6.1. Пусть k — вещественное число. k -Плоскость — это, в зависимости от знака k , одно из следующих пространств:

- \mathbb{R}^2 , если $k = 0$;
- евклидова сфера радиуса $1/\sqrt{k}$ (с ее внутренней метрикой), если $k > 0$;
- гиперболическая плоскость кривизны k (то есть стандартная плоскость Лобачевского с метрикой, умноженной на $1/\sqrt{-k}$), если $k < 0$.

Заметим, что k -плоскость ограничена (имеет конечный диаметр), если $k > 0$, и неограничена, если $k \leq 0$. Обозначим через R_k диаметр k -плоскости, то есть

$$R_k = \begin{cases} \pi/\sqrt{k}, & k > 0, \\ \infty, & k \leq 0. \end{cases}$$

Нам понадобится следующее элементарное свойство k -плоскости: для любых $a, b, c > 0$ таких, что $a + b + c < 2R_k$, существует треугольник на k -плоскости со сторонами длины a, b, c ; кроме того, такой треугольник единственен с точностью до движения (то есть изометрии k -плоскости на себя). Следовательно, для любого достаточно малого треугольника в пространстве с внутренней метрикой существует единственный (с точностью до движения) треугольник сравнения на k -плоскости. (Слова “достаточно малого” можно опустить, если $k \leq 0$.)

Теперь можно определить пространства кривизны $\geq k$ и кривизны $\leq k$ совершенно так же, как мы определяли пространства неотрицательной

и неположительной кривизны, но только с заменой плоскости на k -плоскость.

В качестве иллюстрации приведем общую версию определения 4.1.9.

Определение 4.6.2. Пусть k — вещественное число. Пространство X со строго внутренней метрикой называется пространством кривизны $\geq k$ (соотв., $\leq k$), если каждая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U , что для любого треугольника Δabc , содержащегося в U , и любой точки $d \in [ac]$ выполняется неравенство $|bd| \geq |\bar{bd}|$ (соотв., $|bd| \leq |\bar{bd}|$), где $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — треугольник сравнения в k -плоскости, а точка $\bar{d} \in [\bar{a}\bar{c}]$ выбрана так, что $|\bar{a}\bar{d}| = |ad|$.

Все остальные определения могут быть переформулированы таким же способом. За исключением нескольких несущественных моментов, все утверждения и доказательства, касающиеся равносильности определений и простейших свойств пространств, не отличаются от случая $k = 0$. В дальнейшем мы увидим, что *локальные* свойства пространств кривизны $\leq k$ или кривизны $\geq k$ (конечно, не полностью все, а только те, которые нас интересуют) не зависят от k . Однако ряд важных глобальных свойств (свойств “в целом”) существенно зависят от k . Точнее, пространства кривизны $\geq k$, где $k > 0$, и пространства кривизны $\leq k$, где $k < 0$, безусловно имеют дополнительные интересные нелокальные свойства.

Упражнение 4.6.3. Сформулируйте определения пространств кривизны $\geq k$ (соотв., $\leq k$) для любого k через дистанционную функцию, через углы треугольника и через монотонность углов. Докажите, что все эти определения равносильны.

Упражнение 4.6.4. Докажите, что если $k_1 > k_2$, то каждое пространство кривизны $\geq k_1$ является пространством кривизны $\geq k_2$, и каждое пространство кривизны $\leq k_2$ является пространством кривизны $\leq k_1$.

Следующее определение позволяет рассматривать пространства Александрова с “переменной границей” для кривизны.

Определение 4.6.5. Пространство X с внутренней метрикой называется пространством кривизны ограниченной сверху (соотв., снизу), если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, являющуюся пространством кривизны $\leq k$ (соотв., $\geq k$) для некоторого $k \in \mathbb{R}$. (Здесь окрестность берется с ее индуцированной внутренней метрикой, а число k может зависеть от x .)

4.6.2. Глобализация. Существуют важные классы таких пространств Александрова, для которых условие на треугольники из определения ограниченной кривизны выполняется “в целом”, то есть для всех треугольников, независимо от того, сколь они велики.

Определение 4.6.6. Будем говорить, что пространство X с внутренней метрикой является пространством кривизны $\geq k$ или $\leq k$ глобально, или “в целом”, если условие на треугольники из определения 4.6.2 выполняется для *всех* тех треугольников Δabc из X , для которых треугольники сравнения на k -плоскости корректно определены, то есть существуют и единственны а точностью до движения.

Другими словами, пространство имеет кривизну $\leq k$ или $\geq k$ в целом, если все пространство является нормальной областью.

Возникает вопрос, как применять это определение к несвязным пространствам с внутренней метрикой (в них некоторые расстояния бесконечны). Ответ такой же, как в случае локальных определений: X есть пространство кривизны $\geq k$ или $\leq k$ в целом, если и только если каждая его компонента связности является таким пространством. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые пространства связны.

Требование, чтобы треугольники сравнения были корректно определены, нуждается в некоторых пояснениях. Дело в том, что при $k > 0$ на k -плоскости нет треугольников с периметром большим, чем $2R_k = 2\pi/\sqrt{k}$. Значит, треугольник сравнения не существует, если периметр треугольника Δabc больше, чем $2\pi/\sqrt{k}$. Если же этот периметр равен $2\pi/\sqrt{k}$, то возможны два случая:

- (1) Каждая сторона треугольника короче π/\sqrt{k} . В этом случае треугольник сравнения единственна: это — большая окружность, на которой отмечены три точки — вершины треугольника.
- (2) Одна из сторон равна π/\sqrt{k} , например, $|ab| = \pi/\sqrt{k}$. В этом случае существует множество треугольников сравнения. Действительно, можно взять любые две противоположные точки сферы в качестве \bar{a} и \bar{b} и соединить их произвольной полуокружностью (большого круга), а затем поместить \bar{c} в произвольном месте этой окружности, рассматривая эту полуокружность как $[\bar{a}\bar{b}]$.

Таким образом, требование, чтобы треугольник сравнения для Δabc был корректно определен, равносильно следующей системе неравенств: $\max\{|ab|, |ac|, |bc|\} < \pi/\sqrt{k}$, $|ab| + |ac| + |bc| \leq 2\pi/\sqrt{k}$.

На самом деле, нет необходимости рассматривать треугольники с периметром $2\pi/\sqrt{k}$:

Упражнение 4.6.7. Пусть $k > 0$ и X — такое пространство с внутренней метрикой, что условие из определения через дистанционные функции 4.6.2 (при сравнении с k -плоскостью) выполняется (для кривизны $\geq k$ или $\leq k$) для всех треугольников с периметрами меньшими, чем $2\pi/\sqrt{k}$.

Докажите, что тогда X — пространство кривизны $\geq k$ (или, соотв., $\leq k$) в целом.

Подсказка. В случае кривизны $\leq k$ условие сравнения дистанционных функций становится тривиальным для треугольника с периметром $2\pi/\sqrt{k}$. А в случае кривизны $\geq k$ можно аппроксимировать данный треугольник с периметром $2\pi/\sqrt{k}$ треугольниками с меньшими периметрами и получить требуемое неравенство предельным переходом.

Аналогично определению 4.6.6 можно “глобализовать” и другие определения ограниченности кривизны. Все глобальные определения будут, как и локальные, равносильны между собой.

Упражнение 4.6.8. Сформулируйте глобальные варианты других определений пространства кривизны $\geq k$ или $\leq k$ для любого k и докажите равносильность этих определений.

Упражнение 4.6.9. Если $k_1 > k_2$, то каждое пространство кривизны $\leq k_2$ в целом является пространством кривизны $\leq k_1$ в целом, и каждое пространство кривизны $\geq k_1$ в целом является пространством кривизны $\geq k_2$ в целом. Докажите это утверждение.

Читатель, вероятно, заметил, что доказательство второй части последнего упражнения много труднее, чем первой. Причина, конечно, в том, что в случае $k_1 > 0$ в определении пространств кривизны $\geq k_2$ участвует больше треугольников, чем для пространств кривизны $\geq k_1$. Именно, условия для случая кривизны $\geq k_1$ ничего не говорят о треугольниках с периметром бóльшим, чем $2\pi/\sqrt{k_1}$, в то время как случай кривизны $\geq k_2$ требует рассмотрения всех треугольников с периметрами, меньшими $2\pi/\sqrt{k_2}$ (или бесконечности, если $k_1 < 0$).

На самом деле, эта трудность в некотором смысле не существует: если пространство имеет кривизну $\geq k$ в целом, то на самом деле *периметры всех треугольников не превышают $2\pi/\sqrt{k}$* . Правда, это правило неприменимо к одномерным пространствам (отрезкам и окружностям). Точную формулировку и доказательство этого утверждения вы найдете в главе 10.

Теоремы глобализации. Известны две теоремы, утверждающие, что при определенных условиях локальное ограничение на кривизну влечет глобальное. Это — очень важные теоремы; на самом деле они образуют основу для двух теорий. Хотя эти теоремы будут доказаны только в последующих главах, мы, ввиду их значимости, сформулируем эти теоремы прямо сейчас.

1. Теорема о глобализации для неположительной кривизны (теорема 9.2.9): *каждое полное односвязное пространство кривизны $\leq k$, где $k \leq 0$, является пространством кривизны $\leq k$ в целом.*

2. Теорема Топоногова о глобализации (теорема 10.3.1): *для любого $k \in \mathbb{R}$ каждое полное пространство кривизны $\geq k$ является пространством кривизны $\geq k$ в целом.*

Как вы видите, вторая теорема носит очень общий характер, тогда как первая содержит два дополнительных условия: именно, она, вообще говоря, неверна при $k > 0$, и предполагается, что пространство односвязно. Легко видеть, что последнее топологическое требование необходимо: например, произведение $S^1 \times \mathbb{R}$ имеет неположительную кривизну (так как оно локально изометрично \mathbb{R}^2), но оно не является пространством неположительной кривизны в целом (рассмотрите треугольник с вершинами на окружности $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$).

Попробуйте сами доказать, как упражнения, сравнительно простые частные случаи этих теорем: случаи, когда $k = 0$ и пространство гомеоморфно \mathbb{R}^2 . (Если хотите, можете предположить кроме того, что пространство — полиэдральное; однако это не слишком упрощает доказательство.)

4.7. Кривизна конуса

Здесь мы добавим к нашему списку пространств Александрова еще один пример. Именно, мы полностью изучим условия, при которых конус над пространством с внутренней метрикой имеет неположительную или неотрицательную кривизну. Конус над метрическим пространством был определен в параграфе 3.6.2. Напомним, что точки конуса над пространством X представляют собой пары (x, t) , где $x \in X$ и $t \in [0, +\infty)$, причем все пары $(x, 0)$ отождествлены между собой (полученная точка называется вершиной конуса). Метрика конуса определяется по аналогии с евклидовой теоремой косинуса; в частности, конус над единичной сферой S^2 — это евклидово пространство.

Стандартная сфера в евклидовом пространстве имеет постоянную кривизну 1, а само евклидово пространство имеет нулевую кривизну. Естественно ожидать, что если пространство X с внутренней метрикой более искривлено, чем сфера (то есть имеет кривизну ≥ 1), то конус над X более искривлен, чем евклидово пространство (то есть имеет кривизну ≥ 0), и наоборот. На самом деле, чтобы это утверждение стало верным, требуется сделать некоторое дополнительное предположение относительно X . Причина состоит в том, что определение пространства ограниченной кривизны локально, а локальная структура конуса около его вершины зависит от *глобальной* структуры базового пространства X . Например, вспомним конус над окружностью (пример 4.1.4). Каждый конус над окружностью всюду, за исключением окрестности вершины, локально изометричен \mathbb{R}^2 , однако его геометрия в окрестности вершины зависит от полной длины окружности. В частности, конус над длиной

окружностью имеет неположительную (но не строго отрицательную) кривизну, а конус над короткой окружностью имеет неотрицательную (но не строго положительную) кривизну.

Следующая теорема справедлива для любых конусов.

Теорема 4.7.1. Пусть K — конус над (возможно несвязным) пространством X с внутренней метрикой, и O — вершина конуса. Тогда

1. $K \setminus \{O\}$ — пространство кривизны ≥ 0 (соотв., ≤ 0) тогда и только тогда, когда X — пространство кривизны ≥ 1 (соотв., ≤ 1).
2. K — пространство кривизны ≤ 0 тогда и только тогда, когда X — пространство кривизны ≤ 1 в целом (возможно несвязное).
3. K — пространство кривизны ≥ 0 тогда и только тогда, когда X — либо двухточечное пространство, либо связное пространство кривизны ≥ 1 в целом, и все треугольники в X имеют периметры, не превосходящие 2π .

Замечание 4.7.2. Как уже упоминалось, условие на периметр из пункта 3 теоремы автоматически выполняется для “почти всех” пространств кривизны ≥ 1 (точнее, для всех пространств, за исключением нескольких одномерных контрпримеров. Это позволяет упростить последнее утверждение теоремы. Мы обсудим это позднее, в пункте 10.2.1.

Замечание 4.7.3. Если кривизна конуса K ограничена локально, то она ограничена и в целом. Чтобы доказать это, заметим, что любой треугольник в K можно “переместить” в нормальную окрестность вершины O путем гомотетии.

Доказательство теоремы. 1. Рассмотрим треугольник Δabc в K , стороны которого не проходят через O . Тогда длины стороны треугольника $\Delta a'b'c'$ (проекция нашего треугольника в X) меньше π . Стороны Δabc лежат в плоских выпуклых секторах, именно, в подконусах над сторонами $\Delta a'b'c'$ (см. рис. 4.6. Хотя на рисунке база конуса изображена плоской с целью сделать рисунок более понятным, читателю лучше представлять эту базу как часть сферы.

Обратно, любой треугольник $\Delta a'b'c'$ в X со сторонами, меньшими π , является проекцией некоторого треугольника Δabc в K , стороны которого не проходят через O (причем последний треугольник можно считать лежащим в произвольно малой окрестности вершины).

Предположим, что периметр треугольника $\Delta a'b'c'$ меньше 2π . Тогда для него существует треугольник сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}'$ на стандартной единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (с центром $\bar{O} \in \mathbb{R}^3$). Расположим точки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ на лучах $\bar{O}\bar{a}', \bar{O}\bar{b}', \bar{O}\bar{c}' \subset \mathbb{R}^3$ так, чтобы $|\bar{O}\bar{a}| = |Oa|$, $|\bar{O}\bar{b}| = |Ob|$ и $|\bar{O}\bar{c}| = |Oc|$. Длины сторон полученного треугольника $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ в \mathbb{R}^3 равны

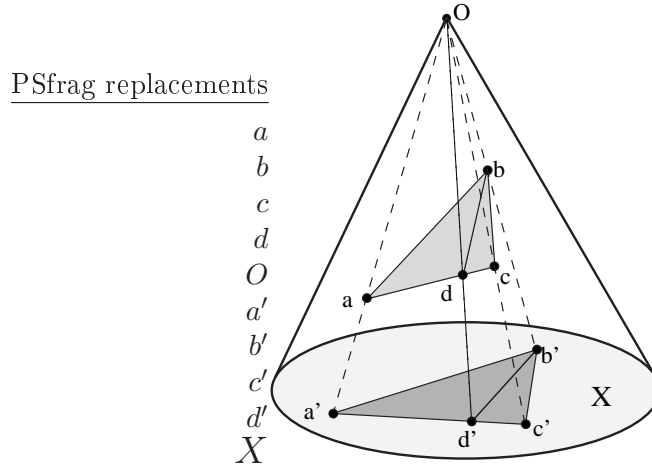


Рис. 4.6: Конус над пространством имеет кривизну ≥ 0 тогда и только тогда, когда само пространство имеет кривизну ≥ 1 .

длинам сторон треугольника $\triangle abc$; другими словами, $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ является треугольником сравнения для $\triangle abc$.

Зафиксируем точку $d \in [ac] \subset K$, и пусть $d' \in [a'c'] \subset X$ — проекция d . Пусть, далее, \bar{d} и \bar{d}' — соответствующие точки на евклидовом отрезке $[\bar{a}\bar{c}]$ и сферической кратчайшей $[\bar{a}'\bar{d}']$, соответственно. Подконус над $[a'c']$ в K изометричен плоскому сектору в \mathbb{R}^3 , натянутому на сферическую кратчайшую $[\bar{a}'\bar{c}']$. Изометрия этого подконуса на плоский сектор, отображает изометрично отрезок $[ac]$ на отрезок $[\bar{a}\bar{c}]$; в частности, посылает d в \bar{d} . Кроме того, сужение этой изометрии на кратчайшую $[a'c']$ отображает ее изометрично на сферическую кратчайшую $[\bar{a}'\bar{c}']$, в частности переводит d' в \bar{d}' . Отсюда следует, что \bar{d} принадлежит лучу $\bar{O}\bar{d}'$, и $|\bar{O}\bar{d}| = |Od|$.

Мы собираемся доказать, что условия на треугольники (из определения 4.1.9) для кривизны ≥ 0 или ≤ 0 , выполняются для $\triangle abc$ в K тогда и только тогда, когда аналогичные условия, но для кривизны ≥ 1 или ≤ 1 (4.6.6), выполняются для $\triangle a'b'c'$ в X .

Если считать расстояния $|Ob|$ и $|Od|$ фиксированными, то расстояние $|bd|$ в K становится возрастающей функцией от $|b'd'|$ (вспомните формулу для расстояния в конусе). Если $|b'd'| = |\bar{b}'\bar{d}'|$, то $|bd| = |\bar{b}\bar{d}|$, ибо $|\bar{O}\bar{b}| = |Ob|$ и $|\bar{O}\bar{d}| = |Od|$. Следовательно, $|b'd'| \geq |\bar{b}'\bar{d}'|$ тогда и только тогда, когда $|bd| \geq |\bar{b}\bar{d}|$, и наоборот. Этим желаемое утверждение доказано.

2. Для завершения доказательства теоремы остается связать результат пункта 1 с нашими определениями и рассмотреть второстепенные случаи.

Мы видим, как результат пункта 1, что если K имеет кривизну ≥ 0 (соотв., ≤ 0), то X имеет кривизну ≥ 1 (соотв., ≤ 1) в целом.

Аналогично, проекция любой нормальной области в $K \setminus \{O\}$ (для кривизны ≥ 0 или ≤ 0) является нормальной областью в X (для кривизн ≥ 1 или ≤ 1 , соответственно), и, наоборот, подконус над (достаточно малой) нормальной областью в X является нормальной областью в $K \setminus \{O\}$. (“Достаточно малая” означает, например, что ее диаметр меньше, чем $2\pi/3$.) Этим первое утверждение теоремы доказано.

3. Теперь рассмотрим “большие” треугольники в X . Именно, пусть Δabc — такой треугольник в K , что его стороны не проходят через вершину O конуса, и предположим, что треугольник $\Delta a'b'c'$ — его проекция в X — имеет периметр $L > 2\pi$. Тогда подконус над $\Delta a'b'c'$ в K (состоящий из трех выпуклых плоских секторов) является образом конуса K_1 над окружностью длины L при сохраняющем длины отображении. Кроме того, Δabc является образом треугольника в K_1 . Так как сохраняющее длины отображение очевидно является нерастягивающим, и K_1 имеет неположительную кривизну, то треугольник Δabc удовлетворяет определению 4.1.9 (для кривизны ≤ 0) без каких бы то ни было условий на X .

С другой стороны, заметим, что треугольник в K_1 , соответствующий треугольнику Δabc , не удовлетворяет этому определению (для кривизны ≥ 0), потому что вершина конуса K_1 лежит “внутри” этого треугольника. Не удовлетворяет последнему условию и Δabc . Отсюда следует, что если K имеет кривизну ≥ 0 , то X не содержит треугольников, длины стороны которых меньше π , а периметр больше, чем 2π .

Случай треугольника $\Delta a'b'c'$ в X , какие либо стороны которого не короче π , аналогичен. Такой треугольник соответствует треугольнику в K , одна из сторон которого проходит через O , и последний треугольник является образом (при сохраняющем длины отображении) треугольника в конусе над отрезком длины $L > \pi$. (Такой конус имеет неположительную кривизну, но не является пространством неотрицательной кривизны. Сравните с последним пунктом доказательства теоремы 4.2.14 о полиэдральных пространствах.)

Вывод таков: для связного пространства X существование треугольника с периметром большим, чем 2π , запрещает K иметь неотрицательную кривизну, но не влечет неположительности кривизны K . Этим теорема в случае связного X доказана.

4. Наконец, рассмотрим случай несвязного X . Тогда X представляет собой объединение попарно непересекающихся компонент, и K является метрическим букетом конусов над компонентами. Согласно предложению 4.2.9, конус K в этом случае имеет кривизну ≤ 0 тогда и только тогда, когда конус над каждой компонентой имеет кривизну ≤ 0 . Этим доказательство второго пункта теоремы завершено.

Наконец, заметим, что единственный случай, когда конус K над несвязным X имеет кривизну ≥ 0 , — это случай двухточечного X (в этом случае $K \cong \mathbb{R}$). В самом деле, пусть x и y — две точки в различных компонентах пространства X , и пусть $z \in X$ — любая третья точка. Можно предположить, что x и z принадлежат различным компонентам (иначе переобозначим x и y). Пусть x' , y' и z' — соответствующие точки в K ; именно, $x' = (x, 1)$, $y' = (y, 1)$ и $z' = (z, 1)$. Тогда стороны $[x'y']$ и $[x'z']$ треугольника $\Delta x'y'z'$ проходят через O и имеют общий отрезок $[x'O]$. Следовательно $\angle y'x'z' = 0$, и тем самым $\Delta x'y'z'$ не удовлетворяет условию на углы.

Собрав вместе все импликации, полученные в течении этого длинного рассуждения, легко увидеть, что они доказывают теорему. \square

Гладкие внутренние метрики

В этой главе мы познакомимся с такими пространствами с внутренней метрикой, определение и исследование которых используют аналитические методы. Вначале мы постараемся дать общее представление о римановых и финслеровых многообразиях, затем перейдем к введению в гиперболическую геометрию. После этого мы рассмотрим и другие интересные примеры гладких внутренних метрик. Ниже — краткий план главы вместе с некоторыми пояснениями.

В параграфе 5.1 дается координатное описание римановых метрик и обсуждается важная идея о том, что каждая риманова метрика локально почти евклидова. Для упрощения обозначений мы в основном ограничиваемся двумерными областями; обобщения на случай многомерных многообразий обычно тривиальны (в пределах наших рассмотрений). В параграфе 5.2 мы пользуемся тем, что кратчайшие в римановом многообразии удовлетворяют специальному дифференциальному уравнению второго порядка. Это уравнение описывает геодезические, имеющие в начальной точке данный вектор скорости.

Такой подход позволяет нам сразу построить *нормальные координаты*, которые аналогичны полярным, декартовым и сферическим (в больших размерностях) координатам: одно семейство координатных линий образуют геодезические, параметризованные длиной дуги, а другое семейство состоит из эквидистантных кривых, ортогональных всем кривым первого семейства. Есть два подхода к нормальным координатам, которые соответствуют дуальным точкам зрения в механике и оптике: движение по лучам и распространение волн. Именно, в первом случае мы начинаем с

семейства геодезических (например, выходящих из одной точки) — это дает нормальные координаты, аналогичные полярным. Эти геодезические могут быть интерпретированы как лучи, а их ортогональные траектории, являющиеся эквидистантными кривыми, соответствуют волновым фронтам. Альтернативно, можно начать с гладкой кривой (исходный волновой фронт) и рассматривать семейство его эквидистант — кривых, лежащих на постоянном расстоянии от исходного фронта. Это семейство представляет распространение волн (начиная с исходного волнового фронта), а ортогональные к семейству волновых фронтов траектории оказываются геодезическими. Чтобы обобщить понятие нормальных координат на старшие размерности, достаточно рассмотреть семейство геодезических и семейство ортогональных им эквидистантных гиперповерхностей.

На этом этапе еще нет существенного различия между римановыми и финслеровыми метриками, и результаты первых двух пунктов применимы (с соответствующими модификациями) также и к финслеровым метрикам.

В двумерном случае Имеется замечательное однопараметрическое семейство двумерных вполне однородных римановых метрик (постоянной кривизны). Это семейство образуют сферы, евклидова плоскость и гиперболические плоскости (плоскости Лобачевского). Геометрия двумерных метрик постоянной кривизны сравнительно хорошо изучена, а геометрический смысл гауссовой кривизны поверхностей хорошо описывается путем сравнения с этими модельными пространствами.

Метрическое введение в двумерную гиперболическую геометрию составляет предмет параграфа 5.3. Гиперболическую геометрию можно построить как аксиоматически, так и на основе римановой геометрии. Однако, привлечение вспомогательных евклидовых конструкций в любом случае существенно упрощает рассмотрение; и мы используем хорошо известные модели гиперболической плоскости в евклидовой полуплоскости и в круге.

В параграфе 5.4 вводятся метрики Карно–Каратеодори обладающие удивительными свойствами. В то время как римановы метрики получаются модификацией евклидова функционала длины, метрические структуры Карно–Каратеодори возникают за счет сужения класса допустимых путей. Мы ограничимся тем, что опишем некоторые отличительные черты таких метрик и приведем характерные примеры. Этот параграф факультативный. Для его понимания требуется некоторое знакомство с скобками Ли и дифференциальными формами.

Два последних параграфа главы посвящены понятию объема для гладких внутренних метрик.

5.1. Римановы пространства

5.1.1. Касательные векторы и координатные системы. Существует хорошая традиция начинать учебники по римановой геометрии с введения в теорию гладких многообразий. Мы постараемся свести эту часть к минимуму, ограничившись введением обозначений и терминов и коротким обсуждением введенных понятий. По существу, все, в чем мы нуждаемся — это ввести пространство $T\Omega$ касательных векторов к плоской области Ω . Если комунибудь из читателей эти понятия покажутся трудными, мы советуем не пользоваться ими первое время и просто думать об $T\Omega$ как о прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^2$, с декартовыми координатами (x, y) в области Ω и базисом из двух векторов $X = (1, 0)$, $Y = (0, 1)$ во втором сомножителе \mathbb{R}^2 . Такая неинвариантная точка зрения очень удобна, но только до тех пор, пока мы не переходим к другой системе координат.

Касательные векторы. Рассмотрим все гладкие кривые $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$, начинающиеся в точке $p \in \Omega$, то есть такие, что $\gamma(0) = p$. Говорят, что две кривые эквивалентны, если их векторы скорости в точке 0 совпадают, то есть если кривые исходят из p с одинаковыми векторами скорости. *Касательным* вектором v в точке p называется класс эквивалентности таких кривых γ , то есть $v = [\gamma]$.

Конечно, поскольку все эквивалентные кривые выходят из p с одинаковыми скоростями, кажется, что нет существенной разницы между обычными и касательными векторами. Так что читатель может удивиться, зачем мы стараемся усложнить простую ситуацию. Причина станет яснее, если мы захотим изменить систему координат. В самом деле, хотя мы рассматривали Ω как область в плоскости, нам желательно не фиксировать такое отождествление. Например, если Ω — простая поверхность в \mathbb{R}^3 , ее можно отождествить с областью в \mathbb{R}^2 , но существует множество разных способов отождествления (координатных систем) и нет критерия, какую из них следовало бы предпочесть. Во вторых, если даже Ω уже является подмножеством в \mathbb{R}^2 , ее другие, более удобные, вложения в \mathbb{R}^2 могут оказаться полезными.

На самом деле, именно вводя касательные векторы, мы упрощаем сложный объект. При изучении геометрии в институте (и даже в школе) обычно прилагают серьезные усилия к тому, чтобы приучить студентов к идее, что векторы, приложенные в разных точках “равны”, если равны их длины и направления. Здесь же главная идея состоит в том, что касательные векторы в различных точках *никогда* не могут быть равны, и их невозможно складывать.

Даже выражению “то же самое направление в разных точках” нельзя придать смысл в общем случае: иначе, например, нетрудно было бы построить непрерывное поле ненулевых векторов, касательных к сфере

во всех ее точках, в то время как известная “теорема о еж” утверждает, что такое невозможно.

Обозначим через $T_p\Omega$ множество всех векторов, касательных в точке p ; множество вообще всех касательных векторов мы обозначим через $T\Omega$. Так как касательные в одной и той же точке p векторы можно отождествить с “обычными” векторами, то их можно складывать и умножать на числа. Эти операции инвариантны, то есть результат не зависит от системы координат. Таким образом, $T_p\Omega$ является (двумерным) векторным пространством. Хотя касательные векторы в разных точках формально можно было бы складывать (т.к. мы отождествили их с евклидовыми векторами), мы не будем этого делать. И снова причина все та же: такое “сложение” не выдерживает изменения системы координат.

Рассмотрим гладкое отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$. Образ $\varphi \circ \gamma$ кривой γ с началом в точке p — это кривая с началом $\varphi(p)$; кроме того, если две кривые выходят из точки x с одинаковыми векторами скорости, то их образы имеют в точке $\varphi(x)$ также одинаковые векторы скорости. Следовательно, отображение φ индуцирует отображение $d_p\varphi: T_x\Omega \rightarrow T_{\varphi(x)}\Omega'$ и, более общо, отображение $d\varphi: T\Omega \rightarrow T\Omega'$. Последнее отображение называется *дифференциалом* отображения φ . Можно проверить, что дифференциал линеен на каждом касательном пространстве $T_p\Omega$.

Координатные системы. Под системой координат мы понимаем диффеоморфизм $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ из области $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ евклидовой плоскости с фиксированной системой декартовых координат в Ω . Если $(x, y) \in \Omega'$, то мы говорим, что точка $\varphi(x, y) \in \Omega$ имеет координаты (x, y) . *Если координаты зафиксированы и ясно, о какой системе координат идет речь, мы будем, для сокращения записи, обозначать точку $\varphi(x, y)$ через (x, y) , отождествляя, таким образом, Ω с Ω' !*

Выбрав систему координат в Ω , мы сразу получаем соответствующую координатную систему в $T\Omega$. В самом деле, точке $p = (x, y) \in \Omega$ естественно сопоставить две проходящие через нее кривые: $\gamma_x(t) = (x + t, y)$ и $\gamma_y(t) = (x, y + t)$. Эти кривые называются координатными линиями, проходящими через p , а соответствующие им касательные векторы называются координатными векторами. Мы будем обозначать их через X и Y (или $X(p)$ и $Y(p)$), если желательно подчеркнуть их зависимость от p).

Напомним, что векторное поле — это отображение, сопоставляющее каждой точке касательный вектор в этой точке. Таким образом, координатные векторы образуют два координатных векторных поля. Если наша координатная система задана отображением φ , координатные векторы X и Y — это просто образы при отображении $d\varphi$ стандартных базисных векторов $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Координатные векторные поля часто обозначают

также через $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$. Причину этого мы объясним в следующем пункте. Равенство $V = v_x X + v_y Y$ определяет (единственным образом) координаты (v_x, v_y) вектора $V \in T_p \Omega$. Мы будем часто писать $V = (v_x, v_y)$, снова отождествляя объект и его координаты.

Для чего нужны касательные векторы? Наиболее важное свойство векторов состоит в том, что они позволяют дифференцировать функции: если $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $V = [\gamma]$ — касательный вектор в точке p ; то мы определяем производную Vf функции f “в направлении” V равенством

$$Vf = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Производные в направлении координатных векторных полей X и Y — это просто обычные (хорошо известные) частные производные по x и y . Это объясняет введенные выше обозначения $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Кроме того, касательный вектор можно определить аксиоматически, как “дифференцирование”, то есть отображение, сопоставляющее гладким функциям числа и обладающее определенными свойствами (такими, как линейность над \mathbb{R} и правило Лейбница дифференцирования произведения).

Другое применение касательных векторов состоит в описании “движения со скоростью, предписанной векторным полем”. Более формально, можно рассматривать интегральные кривые каждого (достаточно гладкого) векторного поля V . Напомним, что интегральной кривой называется такой путь $\gamma(t)$, что $\gamma'(t) = d\gamma(t)/dt = V(\gamma(t))$ при всех t . Существование и единственность интегральной кривой, удовлетворяющей начальному условию $\gamma(0) = p$, является основополагающей теоремой теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Координаты с особенностями. Во многих случаях удобно использовать более общие, чем обычные, “вырожденные” координатные системы, то есть системы, имеющие особенности. Например, полярные координаты (r, ρ) вырождаются при $r = 0$: отображение $(r, \rho) \rightarrow (x = r \cos \rho, y = r \sin \rho)$ не обратимо, а его дифференциал вырождается (не биективен) при $r = 0$. Под вырожденной системой координат мы имеем в виду гладкое сюръективное отображение $\varphi: \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$. Мы будем предполагать, что особенности отображения φ столь же хороши, как в случае полярных координат: вырождение происходит только на конечном числе гладких связных подмногообразий, каждое из которых отображается в точку, а вне этих особенностей φ является локальным диффеоморфизмом. Во многих случаях, таких как полярные или нормальные координаты, “вырожденные координаты” традиционно называют просто координатами; и мы тоже будем пользоваться этой неправильной терминологией. Удобство состоит в том, что обычно можно пользоваться вырожденными координатами

почти так же, как обычными. Единственное отличие состоит в том, что теперь в U могут быть точки, каждой из которых соответствует неодноточечное множество в качестве полного прообраза, так что координатное векторное поле приходится определять как такое отображение $X, Y: \Omega' \rightarrow T\Omega$, что

$$X(x, y) = d\varphi_{(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} \in T_{\varphi(x,y)}\Omega,$$

$$Y(x, y) = d\varphi_{(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} \in T_{\varphi(x,y)}\Omega.$$

Это означает, что координатное векторное поле становится многозначным в точках вырождения. Например, в начале полярных координат множество $\frac{\partial}{\partial r}$ выглядит как еж: оно состоит из единичных векторов, идущих во всех направлениях (в то время как $\frac{\partial}{\partial \rho}$ обращается в ноль в начале). Заметим еще, что если два векторных поля V, W являются базовыми полями некоторой (обычной) системы координат, то они, в частности, линейно независимы. Однако это становится неверным в случае базисных полей вырожденной системы координат. Однако не все пары векторных полей могут возникать как базисные поля вырожденной системы координат. Последние обладают специальным свойством, являясь так называемыми “коммутирующими векторными полями”. Мы обсудим это ниже.

5.1.2. Финслеровы метрики. Напомним, что мы ввели как финслеров функционал длины, так и его частные случаи — риманов и конформный функционалы, — руководствуясь идеей брать в качестве расстояния время (или другие ресурсы), необходимое для путешествия из одной точки в другую. Мы исходили из интуитивного представления, что скорость путешествия зависит от того, где мы путешествуем и в каком направлении движемся. Это представление было формализовано путем введения гладкой неотрицательной “ценовой” функции $\lambda: T\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, где область $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Точку $(p, V) \in T\Omega$ мы представляем как пару из точки p и вектора скорости V в этой точке. То есть, мы считаем, что функция $\lambda(p, V) = \lambda_p(V)$ зависит от двух аргументов, указывающих местоположение и скорость (нам хотелось бы обозначать эту функцию через L , так как на языке механики это — в точности лагранжиан; но, к сожалению, обозначение L уже использовано для функционала длины).

Финслеров функционал длины, порожденный функцией λ , определен на классе всех кусочно гладких кривых и задается формулой

$$(5.1) \quad L(\gamma, a, b) = \int_a^b \lambda_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Напомним, что λ должна удовлетворять важному условию: в каждой точке p функция $\lambda_p(V) = \lambda(p, V)$ должна быть нормой на $T_p\Omega$. Ее положительная однородность обеспечивается инвариантностью функционала

L относительно изменения параметризации кривой, а ее выпуклость (неравенство треугольника) следует из полунепрерывности L .

Упражнение 5.1.1. Докажите, что финслеров функционал длины, определенный равенством (5.1), действительно полунепрерывен снизу и, следовательно, индуцируется порожденной им внутренней метрикой.

Поскольку мы собираемся изучать локальные свойства, предположим, что все рассуждения ведутся в области, достаточно удаленной от границы Ω ; например, можно предположить, что $\Omega = \mathbb{R}^2$. Мы делаем такое предположение с целью избежать рассмотрения граничных эффектов; например, ситуации, когда кратчайшая “прогибается, чтобы обойти выступающей внутрь выступ дополнения”.

Как обычно, функционал длины порождает внутреннюю метрику d . Легко проверить, что для любой гладкой кривой γ ее длина в метрике d совпадает с $L(\gamma)$ (упражнение 5.1.1). Однако, в то время как существование в метрике d кратчайшей, соединяющей любые две точки, обеспечивается теоремой 2.5.23, гладкость кратчайших совсем не очевидна. Более того, без дополнительного предположения о *строгой выпуклости* нормы λ_p кратчайшие могут быть и негладкими.

Упражнение 5.1.2. Чтобы понять, каким образом кратчайшая может быть не гладкой, рассмотрите банахово пространство с нормой λ_p (не зависящей от точки p), заданной равенством $\lambda_p(v_1, v_2) = |v_1| + |v_2|$. Найдите все кратчайшие соответствующей метрики. В частности, обратите внимание, что каждая ломаная с концами $(0, 0)$ и $(1, 1)$, составленная из двух отрезков с общим концом в точке (x, y) , где $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, является кратчайшей.

Причиной такой патологии (негладкости и неединственности кратчайшей, даже в сколь угодно малой окрестности точки) является то обстоятельство, что шары нашей нормы (имеющие форму ромба) не строго выпуклые. Читатель, которого заинтересовало это обстоятельство, может сам доказать, что в случае строго выпуклой нормы все кратчайшие являются гладкими кривыми, и кратчайшая, соединяющая достаточно близкие друг к другу точки, единственна.

Подсказка. Воспользуйтесь аналогом леммы 5.1.13 для подходящего двумерного нормированного (вместо евклидова) пространства.

Теперь мы оставим общие финслеровы метрики и сосредоточимся на их специальном случае — римановых метриках. Хотя геометрия финслеровых пространств может оказаться даже более интересной, чем риманова геометрия, в настоящее время она еще не столь развита. Финслерова геометрия представляет собой быстро развивающуюся область,

однако присущие именно ей методы исследования еще не сформировались, и даже не ясно, какие именно проблемы определяют прогресс финслеровой геометрии в ближайшем будущем.

5.1.3. Римановы метрики.

Метрический тензор. В случае римановой метрики функционал λ_p имеет вид

$$\lambda_p(V) = \sqrt{Q_p(V, V)},$$

где для каждой точки p функция Q_p является положительно определенной квадратичной формой. Билинейную симметричную форму, соответствующую квадратичной форме Q_p , мы будем обозначать $\langle V, W \rangle_p = Q_p(V, W)$. Величина $|V| = \sqrt{\langle V, V \rangle} = \sqrt{Q(V, V)}$ называется *длиной касательного вектора V* .

Посмотрим, как описывается риманова метрика в координатах (x, y) . Для задания квадратичной формы Q_p на $T_p\Omega$ достаточно знать следующие ее значения:

$$E(p) = Q_p(X(p), X(p)) = \langle X(p), X(p) \rangle,$$

$$F(p) = Q_p(X(p), Y(p)) = Q_p(Y(p), X(p)) = \langle X(p), Y(p) \rangle,$$

$$G(p) = Q_p(Y(p), Y(p)) = \langle Y(p), Y(p) \rangle,$$

которые представляют собой просто элементы матрицы билинейной формы \langle, \rangle_p в базисе, состоящем из координатных векторов $X(p)$ и $Y(p)$. Действительно,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} Q(V, W) &= Q(v_x X + v_y Y, w_x X + w_y Y) \\ &= E v_x w_x + F v_x w_y + F v_y w_x + G v_y w_y \end{aligned}$$

(здесь и в дальнейшем, чтобы сделать формулы менее громоздкими, мы опускаем аргументы, показывающие зависимость от точки p). Следовательно, риманову метрику в Ω можно задать ее *коэффициентами* — тремя функциями $E, F, G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Эти функции должны удовлетворять неравенствам $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$, ибо квадратичная форма Q положительно определена. Читатель, совсем не знакомый с квадратичными формами, может взять формулу (5.2) в качестве координатного определения римановой метрики. Разумеется, координатные векторы вырожденной системы координат могут быть линейно зависимыми; тем не менее даже в таком случае мы можем положить $E = \langle X, X \rangle$, $F = \langle X, Y \rangle$ и $G = \langle Y, Y \rangle$. Однако теперь мы можем утверждать только, что $E \geq 0$, $G \geq 0$, $EG - F^2 \geq 0$.

Упражнение 5.1.3. Покажите, что если ввести новые координаты (u, v) так, что $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то переход к новым координатам осуществляется по формулам:

$$E_{\text{нов}} = E\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + G\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2.$$

Найдите аналогичные формулы для F и G .

Замечание. Напомним, что, говоря формально, координатная система — это отображение $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega$. Переход к таким координатам (u, v) , что $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, где $x(u, v)$ и $y(u, v)$ — две данные функции (которые удобно обозначить теми же буквами, что и координаты), формально означает, что мы рассматриваем отображение $\psi: \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, $\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, и наша новая координатная система — это отображение $\varphi \circ \psi: \Omega_2 \rightarrow \Omega$.

Если координаты (x, y) выбраны, то длина кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ задается формулой

$$(5.3) \quad L(\gamma, a, b) = \int_a^b \sqrt{E(x'(t))^2 + 2F x'(t)y'(t) + G(y'(t))^2} dt,$$

где $E = E(x(t), y(t))$; аналогично выражаются F и G .

5.1.4. Римановы многообразия и изометрии. Начнем со следующего очевидного определения.

Определение 5.1.4. Говорят, что две области Ω и Ω' с римановыми метриками Q, Q' *изометричны*, если существует такой диффеоморфизм $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, что $Q'(d\varphi(V), d\varphi(V)) = Q(V, V)$ для всех касательных векторов $V \in T\Omega$.

Равносильно, римановы метрики изометричны, если существуют такие координатные системы в Ω и Ω' , что в точках с одинаковыми координатами коэффициенты E, F, G этих метрик равны.

Замечание 5.1.5. Очевидно, что изометричные римановы области изометричны как пространства с внутренней метрикой. Верно и обратное: если римановы области Ω и Ω' изометричны как пространства с внутренней метрикой, они изометричны в смысле определения 5.1.4 (то есть существует *гладкая* изометрия, переводящая одну риманову структуру в другую). Более того, *каждая* изометрия Ω на Ω' — гладкая и (как следствие) может быть взята в качестве φ из определения 5.1.4.

Это утверждение мы оставляем читателям в качестве (не столь уж очевидного) упражнения. Простейшее из известных нам доказательств основывается на результатах параграфа 5.2 (именно, на гладкости кратчайших и свойствах экспоненциального отображения).

Гладкость изометрий позволяет дать *метрическое* определение риманова многообразия (до сих пор рассматривались только области с римановыми метриками).

Определение 5.1.6. *Римановым многообразием* называется такое пространство с внутренней метрикой, каждая точка которого имеет окрестность, изометричную области с римановой метрикой.

Замечание 5.1.7. Это определение (видимо, впервые предложенное М. Громовым) не является стандартным. В большинстве учебников риманово многообразие определяются как *гладкое многообразие*, снабженное римановой структурой. Эти определения равносильны, что легко следует из замечания 5.1.5 (в частности, пространство с внутренней метрикой, локально изометричное римановой области, можно естественно снабдить структурой гладкого многообразия). Если вы знакомы с гладкими многообразиями, то мы рекомендуем вам доказать это в качестве упражнения.

Если эти абстрактные определения кажутся вам трудными, вы можете продолжать думать о римановых многообразиях как о гладких поверхности в евклидовом пространстве. На самом деле при таком подходе вы даже не теряете в общности: согласно известной теореме Дж. Нэша, каждое риманово многообразие изометрично поверхности, гладко вложенной в евклидово пространство некоторой (достаточно большой) размерности. Двумерные примеры такого рода обсуждаются в следующем пункте.

Вложенные поверхности. Важными примерами римановых метрик дают нам вложенные поверхности. Именно эти примеры явились одним из главных стимулов для создания теории римановых многообразий; такой подход восходит к К. Ф. Гауссу. В случае вложения $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ мы полагаем $\lambda_p(V) = |d_p r(V)|$. Соответствующая билинейная форма получается “подъемом” евклидова скалярного произведения при вложении: $\langle V, W \rangle_p = \langle d_p r(V), d_p r(W) \rangle_E$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ — обычное скалярное произведение в \mathbb{R}^3 . Это определение имеет ясный геометрический смысл: для любой гладкой кривой γ в Ω ее длина равна длине L_E ее образа при отображении r . Действительно,

$$\begin{aligned} (5.4) \quad L(\gamma, a, b) &= \int_a^b \lambda_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b |d_{\gamma(t)} r(\gamma'(t))| dt = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} r(\gamma(t)) \right| dt = L_E(r \circ \gamma, a, b). \end{aligned}$$

Читатель может представлять Ω как поверхность в \mathbb{R}^3 и считать r координатной системой; тогда dr исчезает из последней формулы.

Вычисление (5.4) имеет смысл только для гладких кривых. Заметим, что в то время как в Ω задана риманова метрика, ее образ в \mathbb{R}^3 снабжен *внутренней метрикой* d_I , индуцированной из окружающего евклидова пространства. Мы хотим доказать, что r является изометрией между этими двумя метрическими пространствами. Иными словами, метрика в $r(\Omega)$ индуцирована с помощью класса всех кусочно-гладких кривых. Разумеется, r является изометрией по отношению к этой метрике, так что мы будем обозначать последнюю метрику также через d (даже если бы мы понимали под Ω подмножество в \mathbb{R}^3 с координатной системой, заданной отображением r , это обозначение было бы вполне корректно). Мы хотим проверить, что $d = d_I$. Неравенство $d \geq d_I$ очевидно. Противоположное неравенство является предметом следующего упражнения

Упражнение 5.1.8. 1. Пусть $\rho(p, q)$ — длина кривой $\gamma_{pq} = r(\Omega) \cap P$, соединяющей точки $p, q \in r(\Omega)$, где P — плоскость, проходящая через отрезок $[pq]$ и перпендикулярная к поверхности $r(\Omega)$ в точке p (заметим, что γ_{pq} — действительно кривая, притом — гладкая, если точка q достаточно близка к p). Докажите, что

$$\rho(p, q) - |pq| = o(|pq|)$$

при $|pq| \rightarrow 0$, где $|pq|$ — евклидово расстояние.

2. Покажите, что для любых кривой длины L , лежащей в $r(\Omega)$, и числа $\varepsilon > 0$ найдется кусочно-гладкая кривая с теми же концами, длина которой не более $L + \varepsilon$.

Подсказка. Непосредственно по определению индуцированной метрики длина кривой в этой метрике есть предел длин евклидовых ломаных. Замените каждый отрезок $[p_i p_{i+1}]$ такой ломаной на гладкую кривую вида γ_{pq} и воспользуйтесь первой частью этого упражнения, чтобы оценить, насколько это может увеличить длину ломаной.

Из сказанного еще не ясно, будут ли кратчайшие гладкими кривыми. Этот вопрос мы обсудим в следующем параграфе. В заключение этого параграфа мы кратко коснемся связи между внутренними и внешними свойствами поверхностей.

Под *внутренней геометрией* мы понимаем свойства, зависящие только от римановой метрики. В случае вложенной поверхности — это риманова метрика, индуцированная вложением r .

Легко привести примеры различных вложений, индуцирующих одну и ту же риманову структуру.

Упражнение 5.1.9. Проверьте, что вложения $\varphi, \psi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданные равенствами

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (u, v, 0), \\ \psi(u, v) &= (\sin u, \cos u, v),\end{aligned}$$

индуцируют одну и ту же риманову метрику.

Следующее упражнение дает более интересный пример. Он показывает, что существует целое семейство поверхностей, изометричных плоской области.

Упражнение 5.1.10. Возьмем кривую $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, параметризованную длиной дуги, и предположим, что кривизна этой кривой нигде не обращается в нуль. Рассмотрим вложение $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ достаточно малой окрестности $U \subset \mathbb{R}^2$ точки (u_0, v_0) , где $v_0 \neq 0$, заданное равенством

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u).$$

Покажите, что область U с ее индуцированной римановой метрикой изометрична плоской области.

Подсказка. Рассмотрите аналогичное вложение плоской кривой γ_1 , имеющей ту же кривизну (как функцию длины дуги). Ясно, что в этом случае вложение переводит U в плоскую область; покажите, что последнее вложение индуцирует ту же риманову метрику, что и φ .

Чтобы доказать, что римановы метрики *не* изометричны, надо найти метрические свойства, которые были бы у них различны. Вот простейшие примеры.

Упражнение 5.1.11. Дайте элементарное доказательство того, что область на сфере не может быть изометрична плоской области. Точнее, пусть $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вложение в сферу (например, вложение $r(\varphi, \rho) = (\sin \varphi \sin \rho, \sin \varphi \cos \rho, \cos \varphi)$, заданное в малой окрестности точки в (φ, ρ) -плоскости, не пересекающей φ -оси). Докажите, что риманова метрика в области Ω , индуцированная отображением r , не евклидова.

Подсказка. Вероятно, простейший метрический инвариант, отличающий сферическую область от евклидовой, — это длина окружности (как функция радиуса).

Вообще, вопрос о том, какие именно свойства вложения (внешние свойства) определяются внутренней геометрией поверхности, является непростым и тонким. Наиболее известный результат такого рода — это теорема К. Ф. Гаусса (которая настолько его поразила, что он назвал ее “теорема Egregium”, то есть блистательная теорема), которая утверждает, что произведение главных кривизн вложенной поверхности является инвариантом ее внутренней метрики. Этот инвариант называется *гауссова кривизна*; ниже мы определим ее прямо на языке внутренней геометрии. В частности, из “теорема Egregium” следует, что произведение главных кривизн не меняется при *изгибаниях* поверхности. (изгибанием поверхности называется непрерывное семейство вложений, индуцирующих одинаковые длины кривых).

5.1.5. Римановы: евклидовы в малом. Этот пункт посвящен полезному с технической точки зрения и очень важному идеологически наблюдению, что каждая риманова метрика локально является почти евклидовой.

Выбор координатной системы означает выбор соответствия между Ω и областью в плоскости. Следовательно, координатная система задает вспомогательную евклидову структуру в Ω . Мы хотим показать, что при удачном выборе системы координат такая вспомогательная евклидова метрика будет очень близка к исходной римановой метрике.

Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой мы оставляем читателям в качестве тривиального упражнения: речь идет просто о линейной замене координат.

Лемма 5.1.12. *Для любой точки p можно найти такую систему координат, что в самой точке p будут выполняться равенства: $E = G = 1, F = 0$. Точнее, можно выбрать такую систему координат $\varphi: \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega, \varphi(x_0, y_0) = p$, что в этой координатной системе метрические коэффициенты удовлетворяют условию $E(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 1, F(x_0, y_0) = 0$.*

Иными словами, можно выбрать систему координат так, что метрические коэффициенты в (одной) данной точке p окажутся точно такими же, как коэффициенты евклидовой метрики в декартовых координатах. Это означает, что координатные векторы образуют ортонормированный базис пространства $(T_p\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$. Иными словами, дифференциал $d_{(x_0, y_0)}\varphi$ координатного отображения является линейной изометрией:

$$d_{(x_0, y_0)}\varphi: (T_{(x_0, y_0)}\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{евкл.}}) \rightarrow (T_p\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle_p).$$

Следующая лемма показывает, что после отождествления с помощью системы координат области Ω с областью в евклидовой плоскости (как в это сделано в лемме 5.1.12) римановы и евклидова метрики окажутся близкими друг к другу (в малой окрестности точки p). Интуитивно это означает, что риманова метрика локально является “почти евклидовой”.

Лемма 5.1.13. *Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ введены обычные декартовы координаты (x, y) , и метрические коэффициенты римановой метрики в этих координатах удовлетворяют условию $E(p) = G(p) = 1, F(p) = 0$.*

Тогда риманова длина $|V| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$ каждого вектора V в точке q близка к его евклидовой длине $|V|_E$:

$$\lim_{|pq|_E \rightarrow 0} \frac{|V|}{|V|_E} = 1.$$

Кроме того, в малой окрестности точки p риманова метрика близка к евклидовой; именно,

$$\lim_{|pq|+|pr|\rightarrow 0} \frac{d(q,r)}{|qr|} = 1,$$

где $|pq|$ — евклидово расстояние между p и q .

Лемма следует из непрерывности римановой метрики Q , то есть из непрерывности ее метрических коэффициентов E, F, G . Из леммы, в свою очередь, легко следует, что римановы углы равны “метрическим” углам, то есть углам во внутренней метрике, индуцированной римановой структурой. Именно, справедлива следующая

Лемма 5.1.14. *Рассмотрим гладкие пути γ_1, γ_2 в Ω выходящие из p с ненулевыми скоростями, то есть, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$. Тогда (метрический) угол между γ_1 и γ_2 в точке p существует и равен риманову углу*

$$\arccos \frac{\langle \gamma_1', \gamma_2' \rangle}{\sqrt{\langle \gamma_1', \gamma_1' \rangle} \sqrt{\langle \gamma_2', \gamma_2' \rangle}}$$

между векторами скорости $\gamma_1' = \gamma_1'(0)$ и $\gamma_2' = \gamma_2'(0)$ в точке $t = 0$.

Упражнение 5.1.15. Докажите леммы 5.1.13 и 5.1.14.

Замечание. Известные нам доказательства идейно просты, но их детальное изложение несколько громоздко.

Следующая переформулировка леммы 5.1.13 бывает полезной. Пусть $\varphi: \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$ — координатная система в Ω , $p \in \Omega$. Введем в \mathbb{R}^2 скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ так, чтобы отображение $d_p\varphi: (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_E) \rightarrow (T_p\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$ было изометрией. Напомним, что координатные векторы X и Y в точке p определяются равенствами

$$X(p) = d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = d_p\varphi(1, 0), \quad Y(p) = d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = d_p\varphi(0, 1).$$

Следовательно, в наших координатах скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ задается равенствами

$$\langle (1, 0), (1, 0) \rangle_E = E(p), \quad \langle (1, 0), (0, 1) \rangle_E = F(p), \quad \langle (0, 1), (0, 1) \rangle_E = G(p),$$

где E, F, G — коэффициенты римановой метрики.

Лемма 5.1.16. *Риманова длина $|V| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$ вектора V в близкой к p точке q мало отличается от его евклидовой длины $|V|_E = \sqrt{\langle V, V \rangle_E}$, то есть длины относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$; именно*

$$\lim_{|pq|_p \rightarrow 0} \frac{|V|}{|V|_E} = 1.$$

Лемма 5.1.16 подсказывает следующий способ нахождения (или определения) римановой площади в координатах. Рассмотрим координатный прямоугольник $[x_0, x_0 + \Delta x] \times [y_0, y_0 + \Delta y]$, где $p = (x_0, y_0)$, а $\Delta x, \Delta y$ — (малые) положительные числа. Лемма 5.1.16 подсказывает, что риманову площадь следует определить так, чтобы площадь этого прямоугольника была близка к его евклидовой площади в метрике \langle, \rangle_E . Легко видеть, что площадь параллелограмма, натянутого на векторы V и W , равна $\sqrt{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle - \langle V, W \rangle^2}$. Следовательно, евклидова \langle, \rangle_E -площадь этого прямоугольника равна $\sqrt{E(p)G(p) - F^2(p)} \Delta x \Delta y$. Теперь мы можем определить риманову площадь Ω интегрированием.

$$(5.5) \quad \text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega'} \sqrt{E((x, y))G(x, y) - F^2(x, y)} \, dx dy,$$

где Ω' — соответствующая область в (x, y) -плоскости.

Упражнение 5.1.17. 1. Докажите лемму 5.1.16.

2. Докажите, что риманова площадь, определенная равенством (5.5), совпадает с 2-мерной мерой Хаусдорфа.

3. Обобщите формулу (5.5) по размерности.

Гладкость кратчайших. Этот пункт — не обязательный, и его можно пропустить при первом чтении; в нем обсуждается гладкость кратчайших; в дальнейшем те же выводы будут получены независимо, другим способом. Нетрудно доказать, что все естественно параметризованные кратчайшие в Ω дифференцируемы. К сожалению, хотя известные нам доказательства просты, их изложение громоздко. Поэтому мы приводим здесь только наброски доказательств. Мы собираемся доказать, что естественно параметризованная кратчайшая γ дифференцируема в точке t_0 . Обозначим $\gamma(t_0) = p$. Задание системы координат в Ω определяет там вспомогательную евклидову структуру. Мы можем, не теряя общности, предположить, что $E(p) = G(p) = 1, F(p) = 0$, и применить лемму 5.1.12. Стандартные рассуждения показывают, что дифференцируемость γ в точке равносильна тому, что “ γ имеет в этой точке определенную скалярную скорость (единичную) и определенное направление”, то есть она удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(5.6) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} |p\gamma(t)| = 1,$$

где $|pq|$ — евклидово расстояние, и

$$(5.7) \quad \limsup_{u, v \rightarrow t_0, uv > 0} \angle(p, \gamma(u), \gamma(v)) = 0,$$

где $\angle(A, B, C)$ — это евклидов угол треугольника $\triangle ABC$ в вершине A .

Условие (5.6) немедленно следует из леммы 5.1.13.

Чтобы проверить условие (5.7), рассмотрим при $u > v > 0$ треугольник $\Delta(p, \gamma(u), \gamma(v))$. Легко видеть (это простое упражнение по планиметрии), что если $\angle(p, \gamma(u), \gamma(v)) \geq \alpha > 0$, то существует такая положительная константа $C = C(\alpha)$, что

$$|p\gamma(u)| + |\gamma(v)\gamma(u)| - |p\gamma(v)| \geq C|p\gamma(v)|.$$

Комбинируя это наблюдение с тем, что все отношения

$$\frac{d(p, \gamma(u))}{|p\gamma(u)|}, \quad \frac{d(p, \gamma(v))}{|p\gamma(v)|}, \quad \frac{d(\gamma(u), \gamma(v))}{|\gamma(u)\gamma(v)|}$$

сходятся к 1 при $u, v \rightarrow 0$, мы приходим к противоречию с тем, что $d(p, \gamma(u)) = d(p, \gamma(v)) + d(\gamma(u), \gamma(v))$.

Напомним, что наше дальнейшее изложение не опирается на приведенные здесь доводы; ниже мы докажем гладкость кратчайших как простое следствие леммы Гаусса 5.2.8.

5.1.6. Важные примеры. Здесь мы дадим явные выражения для метрических коэффициентов E, F, G в случае “модельных” метрик и “естественных” координат.

Начнем с евклидовой метрики в полярных координатах (которые вырождаются в начале). Полярные координаты задаются отображением $(r, \rho) \rightarrow (r \cos \rho, r \sin \rho)$, и, следовательно, координатные векторы имеют вид $\frac{\partial}{\partial r} = (\cos \rho, \sin \rho)$, $\frac{\partial}{\partial \rho} = (-r \sin \rho, r \cos \rho)$ (где правые части равенств записаны в декартовых координатах). Таким образом,

$$(5.8) \quad E(r, \rho) = 1, \quad F(r, \rho) = 0, \quad G(r, \rho) = r^2.$$

Отметим, что, хотя евклидова плоскость абсолютно “однородна”, то есть выглядит “одинаковой” в окрестностях всех точек, непосредственно из формул (5.8) этого не видно: из них ясно только, что евклидова плоскость симметрична относительно вращений вокруг начала, то есть что метрические коэффициенты не зависят от ρ и, следовательно, преобразование $(r, \rho) \rightarrow (r, \rho + \text{const})$ является изометрией.

Упражнение 5.1.18. Опишите параллельные переносы в полярных координатах и покажите, что они являются изометриями. Для этого проверьте непосредственно, что функционал длины с коэффициентами (5.8) не меняется при переносах.

Теперь рассмотрим сферу радиуса R с заданными на ней (вырожденными) координатами

$$(\varphi, \rho) \rightarrow (x = R \sin(\varphi/R) \cos \rho, y = R \sin(\varphi/R) \sin \rho, z = R \cos(\varphi/R)).$$

Это — почти стандартные сферические координаты, единственное отличие состоит в том, что изменен масштаб вдоль φ -линий с тем, чтобы

они были параметризованы длиной дуги. Тривиальные вычисления показывают, что

$$(5.9) \quad E = 1, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2(\varphi/R).$$

Как и в случае евклидовой плоскости, непосредственно из формул ясна только вращательная симметрия $(\varphi, \rho) \rightarrow (\varphi, \rho + \text{const})$ метрики. Конечно, мы знаем (из евклидовых рассуждений), что сферы совершенно симметричны: для любых двух точек сферы существуют движения в \mathbb{R}^3 , переводящие сферу в себя и одну из этих точек — в другую. Это, однако, не сразу видно, если мы имеем дело только с внутренней метрикой и исходим из формул (5.9); именно, если мы *определяем* сферу как поверхность, риманова метрика которой задана коэффициентами (5.9), то вывод формул, описывающих все изометрии, требует некоторой работы (сравните с предыдущим упражнением; если читатель любит сферическую геометрию, он может переписать в сферических координатах евклидовы вращения вокруг прямых, отличных от оси z).

Теперь мы *определим гиперболическую плоскость кривизны k* (где $k < 0$!) как плоскость с римановой метрикой, коэффициенты которой имеют вид:

$$(5.10) \quad E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{-k} \sinh^2(\sqrt{-k} r).$$

Другие определения гиперболической плоскости будут даны в параграфе 5.3. Позднее будет доказано, что гиперболические плоскости столь же однородны как сферы и евклидова плоскость.

Упражнение 5.1.19. Найдите с помощью формул (5.9) и (5.10), длину окружности радиуса r на сфере радиуса R и в гиперболической плоскости кривизны k .

5.2. Экспоненциальное отображение

Основная цель этого параграфа — показать, что в окрестность любой точки можно ввести систему координат, в которой E равно всюду 1, а F — тождественный ноль. Такая координатная система называется *нормальными координатами*. Легко видеть, что одно семейство координатных линий такой системы координат состоит из кратчайших (параметризованных длиной дуги). Теперь мы определим *геодезические* как кривые, удовлетворяющие некоторой системе дифференциальных уравнений, и используем их для построения нормальных координат.

5.2.1. Геодезические. Нормальные координаты. Определим геодезические как кривые, удовлетворяющие определенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Затем мы покажем, что геодезические локально являются кратчайшими, и что каждая кратчайшая, параметризованная длиной дуги, является геодезической.

Определение 5.2.1. *Геодезической* назовем гладкую кривую $(x(t), y(t))$, удовлетворяющую следующей системе дифференциальных уравнений:

$$(5.11) \quad E \frac{d^2x}{dt^2} + F \frac{d^2y}{dt^2} = - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{\partial E}{\partial y} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right),$$

$$(5.12) \quad F \frac{d^2x}{dt^2} + G \frac{d^2y}{dt^2} = - \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \frac{\partial G}{\partial y} \right).$$

На первый взгляд это определение может казаться странным. Чтобы мотивировать выбор именно этих уравнений, мы в следующей главе, воспользовавшись вариационным методом, покажем, что все гладкие кратчайшие удовлетворяют этим уравнениям. Отметим, что на самом деле мы *нигде не будем* использовать эти результаты, полученные вариационными методами. Вместо этого, используя свойства этих уравнений, мы дадим простое доказательство того, что геодезические локально являются кратчайшими. В дальнейшем также станет ясно, что эти (координатные) уравнения задают тот же геометрический объект и в других системах координат.

Читатель, знакомый с классической механикой, заметит, что уравнения (5.11) и (5.12) описывают движение свободной частицы, кинетическая энергия которой задана формой $E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2$ (то есть квадратичной формой нашей метрика).

Упражнение 5.2.2. Докажите, что каждая геодезическая (то есть, каждое решение уравнений (5.11) и (5.12)), за исключением постоянного отображения, является кривой, параметризованной пропорционально длине дуги.

Подсказка. Умножая уравнения (5.11) и (5.12) на $\frac{d}{dt}x$ и $\frac{d}{dt}y$, соответственно, и сложите результаты. Затем сравните полученный результат с равенством

$$\frac{d}{dt} \left(E \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2F \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + G \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = 0.$$

Упражнение 5.2.3. Проверьте прямым вычислением, что кривая, которая является геодезической в одной координатной системе, будет геодезической в каждой координатной системе.

Подсказка. Воспользуйтесь упражнением 5.1.3.

Основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений утверждает, что если заданы начальная точка $p = (x, y)$ и единичный вектор $V = (v_x, v_y)$ в точке p , то существует единственная геодезическая $\gamma(t)$, начинающаяся в p (при $t = 0$) и имеющая начальную скорость $\dot{\gamma}(0) = V$ (это — теорема о существовании и единственности решения задачи Коши). Геодезическая γ определена для всех достаточно малых $|t|$ (поскольку система не линейна, то может случиться, что решение невозможно продолжить на больший интервал).

Докажите, что такая геодезическая γ параметризована длиной дуги.

Определение 5.2.4. Экспоненциальное отображение $\exp_p(W)$ определим равенством

$$\exp_p(W) = \gamma(|W|),$$

где $W \in T_p\Omega$ — касательный вектор, γ — геодезическая с начальными условиями $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = W/|W|$, а $|W| = \sqrt{\langle W, W \rangle}$.

Геометрический смысл \exp_p совершенно ясен: чтобы попасть в точку $\exp_p(W)$, надо пройти вдоль геодезической с началом в p в направлении W дистанцию $|W|$.

Разумеется, значение $\exp_p(W)$ не определено, если кривая $\gamma(t)$ не может быть продолжена до $t = |W|$, но экспоненциальное отображение определено по крайней мере для достаточно коротких векторов W . Следовательно, мы построили отображение $\exp_p: \Theta_p \subset T_p\Omega \rightarrow \Omega$, определенное в некоторой окрестности Θ_p нуля-вектора в $T_p\Omega$. Рассматривая p как вторую переменную, мы можем также построить отображение $\exp: \Theta \subset T\Omega \rightarrow \Omega$, где $\Theta = \bigcup_{p \in \Omega} \Theta_p$. Это — гладкое отображение (по теореме о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий).

Заметим, что дифференциал \exp_p в точке $0 \in T_p\Omega$ является тождественным отображением по построению \exp_p . Действительно, образ $\exp_p(tV)$ кривой tV является геодезической, вектор скорости которой в точке $t = 0$ — это в точности V . В частности, \exp_p сохраняет углы между лучами, исходящими из начала — факт, который будет интенсивно использоваться в дальнейшем. По теореме об обратной функции отображение \exp_p является диффеоморфизмом некоторой окрестности U_p начала $0 \in T_p\Omega$ касательного пространства на ее образ $V_p = \exp_p(U_p)$ in Ω .

Радиус инъективности. Максимальный “размер” окрестности, в которой \exp_p остается диффеоморфизмом, является важной характеристикой метрики вблизи точки p .

Определение 5.2.5. Радиусом инъективности r_p в точке p называется максимум таких чисел r_p (или ∞), что $\exp_p: B(r_p) \rightarrow \Omega$ является

диффеоморфизмом на образ, где $B(r)$ — круг радиуса r с центром в $0 \in T_p\Omega$.

Упражнение 5.2.6. Докажите, что для любого компакта K , содержащегося в Ω , $\inf\{r_p : p \in K\} \neq 0$.

Замечание. Это — не слишком приятное упражнение; хотя доказательство основывается на обычных для компактности соображениях, его аккуратное изложение достаточно сложно. По-видимому, наиболее прямолинейный (но не наилучший) способ состоит в том, чтобы обратиться к доказательству теоремы об обратной функции и получить в нем эффективные оценки снизу для размера окрестности, в которой отображение обратимо. Однако имеются и превосходные геометрические доказательства (примеры того геометрического способа мышления, которое мы стремимся развить этой книгой), однако они требуют некоторой изобретательности.

Нормальные координаты. Введем полярные координаты $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow B(r_p)$ в круге радиуса r_p с центром в $0 \in T_p\Omega$. Вместе с экспоненциальным отображением \exp_p это дает нам новую систему координат $(x, y) \rightarrow \exp_p \varphi(x, y)$ в $V_p = \exp_p B(r_p)$. Точнее говоря, это — вырожденная система координат, ибо полярные координаты имеют “особенность при $r = 0$ ”, но, как обычно, такая особенность не создает каких либо трудностей. Чтобы найти координаты точки $q \in V_p \subset \Omega$, надо соединить p и q геодезической, проходящей в V_p (ее существование и единственность следуют из того, что $\exp_p: U_p \rightarrow V_p$ — диффеоморфизм). Длина этой геодезической и будет x -координатой точки q , а ρ -координата вектора скорости в точке p этой геодезической будет y -координатой точки q . Это — в точности риманов аналог полярных координат. Такие координаты называются *нормальными координатами с центром в p* . Заметим, что координатными x -линиями $\gamma_y(t) = (t, y)$ служат геодезические, параметризованные длиной дуги.

Более общо, *нормальные координаты* — это такая система координат (x, y) , что ее x -линиями служат геодезические, параметризованные длиной дуги, а координатные векторные поля ортогональны при $x = 0$. Это означает, что y -линии являются геодезическими, ортогональными к y -оси при $x = 0$. В случае “обобщенных полярных координат”, описанных в предыдущем пункте, линия $x = 0$ вырождается в одну точку p ; чтобы отличать такие “обобщенные полярные координаты”, мы называем их *нормальными координатами с центром в p* .

Из дальнейшего будет ясно, что нормальные координаты можно определить как координаты, в которых $E = 1$, и $F = 0$.

Замечание. Читатели, которые хотят знать, что происходит в старших размерностях, могут определить нормальные координаты как координаты,

в которых длина первого координатного вектора всюду равна 1, и он всюду ортогонален остальным координатным векторам. Из этого следует, что координатные линии, соответствующие первой координате, являются геодезическими. Интуитивно, можно сначала продолжать думать о двух координатах, из которых вторая — $(n - 1)$ -мерная; а затем представить себе семейство геодезических координатных линий и семейство ортогональных к ним эквидистантных поверхностей. Этот подход будет развит в следующей главе (параграф 6.4.1).

5.2.2. Лемма Гаусса и локальная минимальность геодезических. Имеется очень простой признак нормальной системы координат.

Лемма 5.2.7. *Если коэффициенты метрики в некоторой системе координат удовлетворяют условию $E = 1$, $F = 0$, то эта система координат — нормальная.*

Доказательство. Лемма следует из того, что при выполнении ее условий x -линии ($x = t$, $y = \text{const}$) являются решениями уравнений (5.11) и (5.12). \square

Теперь мы покажем, что обратное тоже верно. Именно, что в нормальных координатах их x - и y -линии взаимно ортогональны (не только при $x = 0$). Это утверждение обычно называют *леммой Гаусса*.

Лемма 5.2.8. *В нормальных координатах метрический коэффициент $F = \langle X, Y \rangle$ тождественно равен нулю.*

Доказательство. Рассмотрим координатную x -линию $(x(t), y(t)) = (t, y_0)$. Она должна удовлетворять уравнениям (5.11) и (5.12) (заметим, что мы используем упражнение 5.2.3). Эти уравнения в случае координатных линий принимают очень простой вид, ибо $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, где, как обычно, штрих означает производную по t . Таким образом, мы приходим к двум уравнениям: $0 = -\partial E / \partial x$ и $0 = -\partial F / \partial x$. Первое уравнение не несет новой информации. Действительно, то, что x -линии параметризованы длиной дуги, равносильно тому, что $E \equiv 1$. Второе уравнение говорит о том, что F не меняется вдоль x -линий. Следовательно, коэффициент F тождественно равен нулю, так как он равен нулю на y -оси $x = 0$. \square

Согласно этой лемме, в нормальных координатах риманово скалярное произведение имеет только один нетривиальный коэффициент $G(x, y)$, ибо $E = 1$ и $F = 0$; в частности координатные линии образуют ортогональную сеть.

Используя это обстоятельство, легко показать, что достаточно короткий участок геодезической является кратчайшей.

Лемма 5.2.9. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая с началом $\gamma(0) = p$, и пусть $b < r_p$, где r_p — радиус инъективности в точке p . Тогда γ является кратчайшим путем между точками $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(b)$.

Доказательство. Рассмотрим соединяющую точки $p = (0, 0)$ и $q = (x_0, y_0)$ кусочно гладкую кривую $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, b]$, где (x, y) — нормальные координаты с центром в p . Заметим, что по построению нормальных координат $x_0 = b < r_p$. Обозначим через b_1 наименьшее из тех значений t , для которых $x(t) = x_0$. Тогда кривая $\sigma|_{[0, b_1]}$ содержится в нашей координатной системе, и мы можем оценить ее длину следующим образом:

$$L(\sigma) \geq \int_0^{b_1} \sqrt{(x')^2 + G(y')^2} dt \geq \int_0^{b_1} |x'| dt \geq \int_0^{b_1} x' dt = x_0.$$

Следовательно, длина любого пути между p и q не меньше b . Нетрудно видеть, что равенства в последней цепочке неравенств могут иметь место только в случае $\sigma = \gamma$. \square

Упражнение 5.2.10. Покажите, что из доказанного следует, что все кратчайшие гладкие!

Из этой леммы и упражнения 5.2.6 вытекает очень полезное утверждение.

Лемма 5.2.11. У каждой точки $p \in \Omega$ найдется такая окрестность, что любые две точки, лежащие в этой окрестности, соединимы ровно одной кратчайшей, и каждая геодезическая, лежащая в этой окрестности, является кратчайшим путем между ее концами.

Упражнение 5.2.12. Докажите эту лемму.

5.3. Гиперболическая плоскость

Гиперболические плоскости были уже определены в параграфе 5.1 заданием их метрических коэффициентов в полярных координатах (см. (5.10)). Это определение не выглядит достаточно обоснованным (за исключением того довода, что оно получается простой заменой синуса и косинуса в формулах на соответствующие гиперболические функции). Однако на самом деле имеются очень серьезные причины, по которым следует изучить гиперболические плоскости. Этот параграф посвящен метрическому построению двумерной гиперболической геометрии.

5.3.1. Мотивировки.

Модельные пространства. Многие геометрические идеи, гипотезы и примеры возникают при изучении очень симметричных пространств, которые обычно могут быть проанализированы гораздо лучше, чем более общие пространства с внутренней метрикой. И многие результаты можно сформулировать как “теоремы сравнения”, то есть теоремы, утверждающие, что определенные характеристики метрического пространства мажорируются соответствующими характеристиками подходящего модельного пространства (пространства сравнения). Например, наши определения пространств неотрицательной или неположительной кривизны базировались на сравнении с евклидовой плоскостью. Евклидова плоскость, сферы и гиперболические плоскости представляют собой три наиболее важных типа модельных пространств (конечно, есть и другие важные объекты для сравнения, такие, как симметрические пространства). Почти наверняка читатель хорошо знаком с первыми двумя типами модельных пространств: с евклидовой плоскостью мы имеем дело еще в начальной школе, а некоторые факты из внутренней геометрии стандартных сфер в \mathbb{R}^3 доказываются в старших классах школы (через геометрию объемлющего трехмерного пространства \mathbb{R}^3). Хорошее знание сферической геометрии необходимо для географии и астрономии. Наоборот, геометрия гиперболической плоскости \mathbb{H}^2 часто остается неясной и даже таинственной, хотя она совсем не сложнее сферической геометрии. В этом параграфе дано введение в гиперболическую геометрию. Мы увидим, что сферы, плоскость и гиперболические плоскости совместно образуют замечательное 1-параметрическое семейство модельных пространств. Соответствующий параметр называется *кривизной*; кривизна равна нулю для евклидовой плоскости и равна $1/r^2$ для сферы радиуса r . Используя кривизну, можно записать все геометрические формулы таким образом, что они будут справедливы для всех пространств нашего семейства. С другой стороны, качественные геометрические явления могут быть коренным образом различными в евклидовой, гиперболической и сферической геометриях.

Мета-математическое обсуждение: почему гиперболические пространства? Совершенно естественно, что, выбирая модельное пространство, мы в первую очередь останавливаемся на евклидовом пространстве: именно оно может рассматриваться как математический аналог того физического пространства, в котором мы черпаем наш ежедневный опыт. Однако есть несколько мета-математических причин, по которым мы добавляем к нашему списку модельных пространств сферические и гиперболические пространства.

1. Этими пространствами (вместе с евклидовым) исчерпывается список всех *изотропных* 2-мерных пространств. Пространство называется

изотропным, если оно “выглядит одинаково во всех точках и всех направлениях” (то есть, для любых двух единичных касательных векторов найдется изометрия, дифференциал которой переводит один из этих векторов в другой. Обращаясь к физической аналогии, можно сказать, что фундаментальные законы не должны зависеть от места и направления (имеется в виду само пространство, без учета влияния различных объектов, таких, как Земля, и т.д.).

2. Идея прямой линии, являющаяся краеугольным камнем евклидовой геометрии, могла возникнуть при наблюдении траекторий свободно движущихся частиц или лучей света. Однако в более общей ситуации (при наличии потенциального поля или в искривленном пространстве, как это имеет место в общей теории относительности) имеется два основных типа локального поведения пучка траекторий: эллиптическое и гиперболическое. Модельными примерами этих двух типов служат пучки прямых на сферах и на гиперболических плоскостях.

3. На самом деле предыдущее замечание отражает более общее явление: в математике (и физике) различаются гиперболические и эллиптические объекты, например, гиперболы и эллипсы, синус и гиперболический синус, гиперболические и эллиптические дифференциальные уравнения, и даже вещественные и мнимые части комплексных чисел. С этой точки зрения евклидова геометрия является пограничным (параболическим) случаем между сферической и гиперболической геометриями. Нетрудно представить себе как сфера становится все более плоской с ростом ее радиуса. Забыть в такой ситуации о семействе гиперболических пространств — это все равно, как забыть о комплексных корнях квадратных уравнений. Более того, и на самом деле гиперболические плоскости можно рассматривать как сферы мнимых радиусов.

4. Последняя, но важная причина состоит в том, что исторически открытие и изучение гиперболической геометрии послужили сильнейшим стимулом, давшим толчок развитию геометрии и всей математики в целом.

Аксиомы, модели, исторические замечания. Мы так привыкли к евклидовой плоскости, что редко задаемся вопросом о происхождении самых фундаментальных геометрических законов. Имеется два подхода к построению евклидовой геометрии. При одном подходе, восходящем к Евклиду, плоскость представляет собой объект, удовлетворяющий определенному набору аксиом; предполагается, что эти аксиомы отражают те фундаментальные свойства реального мира, с которыми связан наш ежедневный опыт. Имеется целый ряд учебников элементарной геометрии, которые базируются на этом подходе и в которых евклидова геометрия выводится систематически из аксиом (последние более или менее те же,

что у Евклида, но сформулированные в соответствии с современными требованиями к точности). Именно такой подход используется для обучения геометрии в школе в большинстве стран, и школьникам требуется несколько лет для построения евклидовой геометрии (более или менее строго и систематически) на основе аксиом. Тем, кто обучался таким способом, аксиоматический подход обычно кажется самым естественным. Другой подход состоит в построении евклидовой плоскости (точнее, ее “модели”) из других математических объектов, которые кажутся более понятными или фундаментальными. Например, можно *определить* евклидову плоскость как множество всех пар (x, y) вещественных чисел. Такие пары называются точками, каждое множество точек, удовлетворяющее линейному уравнению $ax + by + c = 0$ считается прямой, а расстояние между двумя точками вводится формулой $|(x_1, y_1)(x_2, y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Одно из преимуществ аксиоматического подхода состоит в том, что все начинается со списка ключевых свойств основных объектов; но при этом может возникнуть сомнение, существуют ли объекты с указанными свойствами. Более мудро держать оба подхода и переходить от одного к другому в зависимости от конкретных обстоятельств.

Что касается сферической геометрии, то здесь трудно найти учебник, в котором она строилась бы аксиоматически, хотя список аксиом сферической геометрии можно получить из евклидовых аксиом путем небольшой модификации (поиск всех изменений в аксиоматике, необходимых для того, чтобы получить сферу вместо евклидовой плоскости, является хорошим упражнением). Обычно мы изучаем сферы как подмножества \mathbb{R}^3 на основе евклидовой геометрии. Мы могли бы аксиоматически задать основные объекты (точки, прямые, углы, расстояния) связав их друг с другом определенными условиями в форме аксиом. Вместо этого мы традиционно начинаем с модели сферической геометрии на основе стандартной сферы в \mathbb{R}^3 ; “точками” сферической геометрии служат точки пространства \mathbb{R}^3 , лежащие на фиксированном расстоянии от начала; “прямыми” мы считаем большие круги (сечения сферы плоскостями, проходящими через центр). Сферический угол между двумя прямыми определяется как евклидов угол между евклидовыми плоскостями, содержащими эти прямые. Наконец, “сферическое расстояние” определяется как евклидов угол в центре сферы. Отметим, что “сферическая прямая” совсем не выглядит прямой с точки зрения объемлющего евклидова пространства, а сферическое расстояние отлично от расстояния в объемлющем пространстве. Читатель может сказать: “Ха, это просто геодезические, углы и расстояния в индуцированной внутренней метрике!” Это, конечно, верно, и это обстоятельство сыграло роль в истории гиперболической геометрии. Однако, это удача, что мы имеем столь

удобную модель сферической геометрии — не всегда модели могут быть построены столь естественно.

Теперь, после этого отступления общего характера, перейдем к гиперболической геометрии.

Существует очень короткое аксиоматическое определение гиперболической плоскости: возьмите аксиомы евклидовой геометрии и замените пятый постулат (утверждение: “*две прямые, параллельные некоторой прямой, и имеющие общую точку, должны совпадать*”) на противоположное утверждение. (Конечно, оригинальные формулировки Евклида не удовлетворяют современным критериям строгости и точности, но можно воспользоваться аксиоматикой Гильберта, который построил современную версию системы Евклида.) Пространство, удовлетворяющее измененной системе аксиом (одна аксиома заменена на противоположную) и есть гиперболическая плоскость. Однако, такому определению предшествовал длинный исторический путь.

История пятого постулата восходит к Евклиду, который продемонстрировал гениальную интуицию, включив пятый постулат в число аксиом (видимо, после безуспешных попыток вывести пятый постулат из других аксиом и почувствовав, что это может завести его слишком далеко). После Евклида было много “доказательств”, то есть рассуждений, которые приводили к “противоречию”, но противоречию только с нашими привычными представлениями, а не с другими аксиомами.

Например, можно доказать, что если пятый постулат неверен, то можно доказать, что существует такое число, что площадь любого треугольника его не превосходит. Разве мы не получили противоречие? Ведь всем “известно”, что можно построить сколь угодно большой треугольник! Но беда в том, что это “знание” не следует из остальных аксиом Евклида.

Вероятно, первым математиком, который систематически исследовал систему аксиом, в которой пятый постулат заменен его отрицанием, был К. Ф. Гаусс. (Теперь математики называют такую систему аксиом и ее следствия “неевклидовой геометрией”.) Гаусс предполагал, что такая система может быть непротиворечивой несмотря на то, что многие свойства неевклидовой геометрии очень сильно отличаются от наших представлений, базирующихся на каждодневном опыте. В этом отношении Гаусс пошел так же далеко, как Лобачевский и Больяйи, и причина, почему только два последних геометра известны как первооткрыватели неевклидовой геометрии, состоит в том, что Гаусс не опубликовал своих исследований. Удивительно, но именно то, что он “знал слишком много”, удержало Гаусса от публикации его открытия: он понимал, что необходимо построить *модель* для того, чтобы *доказать*, что аксиоматика неевклидовой геометрии непротиворечива. (ни Лобачевский, ни Больяйи

не имели таких моделей; они были построены много позже Бельтрами и Пуанкаре). В письме Гаусса (адресованном отцу Я. Больяйи) он высказал свою веру в то, что неевклидова геометрия непротиворечива. Гаусс исходил из неосуществимой, хотя и глубокой идеи: он хотел реализовать гиперболическую геометрию как внутреннюю геометрию некоторой поверхности в \mathbb{R}^3 аналогично тому, как сферическая геометрия реализуется на евклидовых сферах. Гаусс даже нашел вложенные в \mathbb{R}^3 куски поверхности с требуемыми свойствами (так называемые псевдосферы), но он не смог реализовать так *всю* плоскость. Видимо, это заставляло его подозревать, что, возможно, где-то все же спрятано противоречие. Однако много позже Д. Гильберт доказал, что вся гиперболическая плоскость *не может* быть реализована вложенной поверхностью. Мы скоро увидим, что неевклидова геометрия может быть представлена как риманова метрика на плоскости; но дело в том, что эта метрика не может быть изометрически вложена в \mathbb{R}^3 .

Завершая это историческое отступление, отметим, что если кто либо захочет построить гиперболическую геометрию исходя только из ее аксиом, то его ждет столь же длинный путь, какой потребовался в школе, чтобы добраться до интересных результатов евклидовой геометрии. Пожалуй, вполне достаточно пройти этот путь однажды. Поэтому гиперболическую геометрию обычно изучают с помощью ее моделей. Отметим, однако, что при необходимости выводиться из аксиом каждое утверждение евклидовой геометрии эти утверждения полезно разделить на два класса: те, которые не зависят от пятого постулата, и те, которые на него существенно опираются. Первый класс утверждений называется *абсолютной геометрией*; такие утверждения верны как для евклидовой, так и для гиперболической плоскости. Например, утверждение о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, принадлежит абсолютной геометрии. А утверждение, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, чисто евклидово: оно не выполняется ни в гиперболической, ни в сферической геометриях.

5.3.2. Элементарная гиперболическая геометрия. Модель Пуанкаре.

Опишем модель Пуанкаре гиперболической геометрии. То, что эта модель изометрична гиперболической плоскости, описанной выше, мы докажем позже, а сейчас используем модель Пуанкаре, чтобы сравнительно детально изучить гиперболическую плоскость. Отметим, что говоря о “моделях” мы имеем в виду только то, что мы изучаем риманову метрику с помощью вспомогательной евклидовой структуры, и, следовательно, римановы объекты могут также рассматриваться с евклидовой точки зрения.

В противоположность евклидовой геометрии, где евклидова плоскость *единственна* (с точностью до изометрий), существует *множество* попарно не изометричных гиперболических плоскостей. Они образуют однопараметрическое семейство — по одной плоскости для каждого вещественного числа $k < 0$. Однако все гиперболические плоскости могут быть получены друг из друга изменением масштаба — умножением метрики на число. Мы начнем с той гиперболической плоскости, которая соответствует параметру $k = -1$, и будем именно ее называть гиперболической плоскостью.

Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.

Определение 5.3.1. Рассмотрим верхнюю полуплоскость

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

координатной плоскости xy , снабженную римановой метрикой со скалярным произведением

$$(5.13) \quad \langle V, W \rangle_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} \langle V, W \rangle_E,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ — евклидово скалярное произведение. Следовательно, метрические коэффициенты гиперболической метрики имеют вид:

$$E(x, y) = G(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad F = 0,$$

и гиперболический функционал длины L имеет вид

$$(5.14) \quad L(\gamma, a, b) = \int_a^b \frac{1}{y} \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| dt$$

на семействе всех кусочно гладких кривых. Здесь $y = y(\gamma(t))$ означает y -координату точки $\gamma(t)$, а $|\frac{d}{dt}\gamma(t)|$ — евклидова длина вектора скорости. Полученное пространство с внутренней метрикой называется *гиперболической плоскостью* (или *плоскостью Лобачевского*). Традиционно она обозначается через \mathbb{H} или \mathbb{H}^2 . Обычно, говоря о пространстве с внутренней метрикой, мы имеем в виду класс изометричных между собой пространств. Однако *моделью Пуанкаре* мы будем называть именно тот представитель класса, который мы только что определили.

Отметим, что гиперболический функционал длины является частным случаем конформного функционала длины (то есть, его квадратичная форма $Q(V, V)$ получается из евклидовой умножением на функцию).

Опишем основные объекты полученной геометрии в терминах евклидовой структуры на плоскости xy . Для этого нам понадобятся элементарные свойства *инверсий*; их можно найти в добавлении 5.3.6 в конце этого параграфа.

- Гиперболическими прямыми мы называем евклидовы полуокружности, ортогональные к оси x , и вертикальные (то есть ортогональные к той же оси) лучи с началом на оси x . (Именно эти кривые служат геодезическими построенной метрики.)
- Гиперболическими движениями (изометриями) являются параллельные переносы вдоль оси x -ов, симметрии относительно вертикальных прямых, гомотетии (подобия) и инверсии с центрами на оси x , а также конечные композиции перечисленных преобразований. Если рассматривать \mathbb{H} как множество комплексных чисел z с $\text{Im}(z) > 0$, то сохраняющие ориентацию гиперболические движения имеют вид

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где вещественные числа a, b, c, d должны удовлетворять условию $ad - bc = 1$. Чтобы получить все гиперболические движения, надо добавить еще преобразования вида

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

где $ad - bc = -1$.

- Гиперболическое расстояние между точками $p = (0, y_1)$ и $q = (0, y_2)$ на оси y равно

$$d(p, q) = |\ln y_1 - \ln y_2|.$$

Ниже будет показано, что для любых двух точек a и b найдется движение, переводящее эти точки в какие то точки p и q на оси y . Так как расстояния $d(a, b)$ и $d(p, q)$ должны быть равны, то мы можем использовать ось y в качестве “линейки”.

- Гиперболическим углом между двумя гиперболическими прямыми оказываем обычный (евклидов) угол между полуокружностями (или полуокружностью и лучом), представляющими эти прямые в модели Пуанкаре.
- Гиперболическая площадь области Ω равна интегралу

$$h_2(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Мы надеемся, читатель понимает, что эти утверждения требуют доказательств.

Предостережение. Имея дело с моделью Пуанкаре гиперболической плоскости, очень заманчиво обращаться к понятиям евклидовой геометрии. Однако здесь надо быть осторожным: объекты гиперболической геометрии должны быть инвариантны по отношению к гиперболическим изометриям. Например, евклидовы углы не меняются при гиперболических изометриях,

и, следовательно, наше определение гиперболических углов по крайней мере не бессмысленно. Однако, скажем, евклидова площадь модели Пуанкаре не имеет никакого смысла в гиперболической геометрии, так как при гиперболических движениях она может меняться.

Терминологическое замечание. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о понятиях, относящихся к гиперболической структуре (в противовес евклидовым понятиям модели Пуанкаре), мы будем добавлять прилагательное “гиперболическая”. Например, мы можем говорить о гиперболических прямых (которые могут быть евклидовыми полуокружностями), гиперболических расстояниях, и т. д.

Может показаться, что гиперболическая плоскость, определенная с помощью модели Пуанкаре, весьма неоднородна: даже прямых в ней два типа — евклидовы полуокружности и лучи. А когда мы приближаемся к оси x -ов модели Пуанкаре, отношение гиперболических расстояний к евклидовым становятся огромными; в то же время эти отношения становятся очень малыми, когда $y \rightarrow \infty$. Однако, на самом деле внутренне гиперболическая плоскость совершенно однородна; это становится ясным из рассмотрения гиперболических движений. Действительно, для любых двух точек легко найти гиперболическое движение, переводящее одну из этих точек в другую. Заметим, что это можно сделать даже не пользуясь инверсиями! Более того, любой луч можно перевести гиперболическим движением в любой другой луч, показав тем самым, что гиперболическая плоскость *изотропна*.

Модель Пуанкаре в круге. Удобной модификацией модели Пуанкаре является модель Пуанкаре в круге. В этой модели точки гиперболической плоскости представлены точками единичного круга. Вероятно, лучше всего, иметь наготове разные модели и переходить от одной модели к другой, в каждом случае выбирая модель, наиболее подходящую к данной ситуации.

Переход к модели в круге можно рассматривать просто как выбор новой системы координат в верхней полуплоскости. Рассмотрим инверсию φ относительно окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром $p = (0, -1)$. Конечно, мы могли выбрать любую инверсию, центр которой не принадлежит \mathbb{H} . Причина, по которой мы предпочли именно эту инверсию, состоит в том, что в этом случае верхняя полуплоскость переходит в точности в (открытый) круг $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Мы будем называть эту модель гиперболической плоскости *моделью в круге*. Посмотрим, как будут представлены объекты гиперболической геометрии в новой модели.

- Длина кривой γ находится по формуле

$$(5.15) \quad L(\gamma, a, b) = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt,$$

где через $|\gamma(t)|$ обозначено евклидово расстояние от $\gamma(t)$ до начала (центра круга). Следовательно, в случае модели в круге метрические коэффициенты гиперболической плоскости в декартовых координатах xy таковы:

$$E(x, y) = G(x, y) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad F(x, y) = 0.$$

- Гиперболические прямые (геодезические) представлены диаметрами круга и дугами евклидовых окружностей, ортогональных границе нашего круга.
- Гиперболическими движениями будут повороты относительно центра круга, симметрии относительно его диаметров и инверсии, отображающие граничную окружность в себя, а также конечные произведения перечисленных преобразований.
- Гиперболическим углом между двумя гиперболическими прямыми служит обычный (евклидов) угол между дугами окружностей или отрезками, представляющими эти прямые в модели.
- Гиперболическая площадь области Ω равна интегралу

$$h_2(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{4}{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Упражнение 5.3.2. Найдите, какие дуги и диаметры, представляющие гиперболические прямые в модели в круге, соответствуют вертикальным лучам модели Пуанкаре в полуплоскости.

Упражнение 5.3.3. Проверьте все пункты приведенного выше описания.

Подсказка. Чтобы получить гиперболическое движение в модели в круге из гиперболического движения в модели в полуплоскости, нам следует взять сопряжение последнего с φ . Именно, пусть I — гиперболическое движение, рассматриваемое в модели Пуанкаре в полуплоскости. Чтобы понять, куда оно переводит точку $a \in D$, мы сначала возвращаем точку a в модель Пуанкаре в полуплоскости отображением $\varphi^{-1} = \varphi$, затем применяем I , и после этого отображаем полученную точку назад в D с помощью φ . Окончательно: $\varphi \circ I \circ \varphi$.

Упражнение 5.3.4. Опишите гиперболические движения в модели в круге с помощью комплексных чисел.

Подсказка. Воспользуйтесь подсказкой к предыдущему упражнению и комплексным представлением инверсии I .

Упражнение 5.3.5. Проверьте, что в случае модели в круге коэффициенты гиперболической метрики в стандартных полярных координатах (r, ρ) имеют следующий вид:

$$(5.16) \quad E = \frac{4}{(1-r^2)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}.$$

Введем новую систему координат (d, ρ) , где вторая координата точки — та же, что в полярных координатах, а первая равна *гиперболическому* расстоянию от точки до центра круга. Это — точный аналог обычных полярных координат, но для гиперболической плоскости. Напомним, что r -линии ($r = t$, $\rho = \text{const}$) полярной системы координат являются гиперболическими прямыми, и, следовательно, все, что нам надо сделать — это параметризовать их гиперболической длиной дуги. Гиперболическое расстояние от начала до точки (r, ρ) равно

$$d(r) = \int_0^r 2(1-r^2)^{-1} dr = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Следовательно, отображение

$$(x, y) \rightarrow \left(r = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \rho = y \right)$$

переводит гиперболические координаты (d, ρ) в полярные координаты (r, ρ) .

Лемма 5.3.6. В координатах (d, ρ) метрические коэффициенты модели гиперболической плоскости в круге имеют вид:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \sinh^2 d.$$

Следовательно (по лемме 5.2.7), координатная система (d, ρ) является нормальной.

Доказательство. Мы имеем $E = 1$ (так как d -линии параметризованы гиперболической длиной дуги), и $F = 0$ (так как ρ -линии и d -линии ортогональны друг другу: первые являются евклидовыми концентрическими окружностями, а вторые — евклидовыми диаметрами круга, а евклидовы углы равны гиперболическим). Наконец,

$$G = \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \rho} \right\rangle_{\text{гип}} = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} = \sinh^2 d.$$

□

Заметим, что полученные метрические коэффициенты — в точности те же, что в формуле (5.10) при $k = -1$. Следовательно, мы доказали, что определение гиперболической плоскости через модель Пуанкаре равносильно определению, данному с помощью формулы (5.10) в параграфе 5.1.

Гиперболические плоскости различной кривизны. Наряду с гиперболической плоскостью, построенной с помощью модели Пуанкаре, можно рассматривать континуум пространств, полученных умножением метрики гиперболической плоскости на положительные постоянные. Мы скоро увидим, что гауссова кривизна гиперболической плоскости тождественно равна -1 ; после умножения метрики на $a > 0$ мы получим риманову метрику гауссовой кривизны $-1/a^2$. Следовательно, существуют гиперболические плоскости кривизны $-k$ для любого положительного k .

Чтобы лучше понять смысл изменения масштаба римановой метрики, попробуем изменять масштаб у евклидовой плоскости. Именно, пусть E_c — такое пространство с внутренней метрикой, что его точки — это точки пространства \mathbb{R}^2 , но расстояния получены из евклидовых умножением на c : $d_c(x, y) = c \cdot |xy|$.

Упражнение 5.3.7. Докажите, что все такие пространства E_c изометричны друг другу, причем $E_1 = \mathbb{R}^2$.

Подсказка. Проверьте, что отображение $h_c: E_c \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $h_c(x) = cx$, — изометрия.

Этот пример может навести на (абсолютно ложную!) идею, что умножение всех расстояний на постоянную всегда приводит к изометричным пространствам. На самом деле такое случается только в исключительных случаях. Например, пусть S_c — пространство с внутренней метрикой, точками которого служат точки единичной 2-мерной сферы S^2 , а его метрика d_c получена из метрики сферы S^2 умножением ее на \sqrt{c} . Тогда пространство S_c при $c \neq 1$ не изометрично $S_1 = S^2$; оно изометрично сфере радиуса \sqrt{c} . Таким образом, мы получили семейство сфер. Число c^{-1} называется кривизной сферы (и оно равно гауссовой кривизне ее римановой метрики; см. следующую главу).

Аналогично, для каждого положительного числа c мы можем рассмотреть пространство \mathbb{H}_c , полученное из \mathbb{H} умножением всех расстояний на \sqrt{c} . Новый функционал длины имеет вид

$$L(\gamma, a, b) = \sqrt{c} \int_a^b \frac{1}{y} \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| dt.$$

Мы увидим позже, что все пространства \mathbb{H}_c различны (попарно не изометричны). Число $-1/c^2$ называется кривизной пространства \mathbb{H}_c (в дальнейшем будет показано, что это число действительно равно гауссовой кривизне пространства).

Замечание 5.3.8. Зафиксируем число r . Пусть B_k — шар радиуса r в \mathbb{H}_k . Шары B_k “сходятся” к B_0 при $k \rightarrow 0$ и, таким образом, в любой ограниченной области гиперболическая метрика при $k \rightarrow 0$ становится все более и более похожей на евклидову (это можно формализовать,

выбрав нормальные координаты в \mathbb{H}_k и \mathbb{R}^2 и сравнивая расстояния между точками с одинаковыми координатами, как в доказательстве леммы 5.1.16).¹

Замечание 5.3.9. В действительности уже выбор группы движений гиперболической плоскости в модели Пуанкаре определяет риманов функционал длины (с точностью до постоянного множителя). Действительно, попытаемся найти метрические коэффициенты. Так как группа изометрий содержит переносы вдоль оси x -ов, метрические коэффициенты не могут зависеть от координаты x , то есть они являются функциями только от y . Поскольку евклидовы гомотетии тоже являются гиперболическими изометриями, коэффициенты метрики должны быть однородными функциями порядка -2 ; то есть они должны быть функциями, удовлетворяющими условию $f(cy) = f(y)/c^2$ для всех положительных c . Следовательно, каждый метрический коэффициент имеет вид $\text{const} \cdot y^{-2}$. Теперь заметим, что дифференциалы инверсий, оставляющие на месте фиксированную точку, порождают все повороты вокруг этой точки и, следовательно, гиперболическое скалярное произведение должно быть пропорционально евклидову. Это показывает, что $E = G = \text{const} \cdot y^{-2}$, $F = 0$.

Движения и гиперболические прямые. Мы хотим убедиться, что геометрические понятия, введенные с помощью модель Пуанкаре, определены вполне корректно. Сначала убедимся, что наши гиперболические движения действительно являются изометриями. Так как все преобразования, которые мы назвали “гиперболическими движениями”, биективны, то достаточно проверить, что они сохраняют гиперболическую длину.

Очевидно, что параллельные переносы вдоль оси x -ов не меняют подынтегральное выражение в (5.14), ибо они не меняют ни длину вектора γ' , ни координату y . То же верно по отношению к симметриям относительно вертикальных прямых. Рассмотрим теперь гомотетии с коэффициентом c . За счет параллельного переноса можно, не умаляя общности, считать, что центром гомотетии служит начало. Скорость образа $c\gamma(t) = (cx(t), cy(t))$ кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ при гомотетии равна $c\gamma'(t)$. Таким образом, абсолютная величина скорости умножается

¹Известно, что Гаусс пытался экспериментально проверить, не является ли физическое пространство неевклидовым. Для этого он измерял углы больших треугольников (с вершинами на трех высоких горах и световыми лучами в качестве сторон). Он получил, с возможной в те времена точностью, что сумма углов треугольника равна π . Единственное, что он мог отсюда заключить, что если даже это — гиперболический треугольник, кривизна пространства должна быть очень мала. На самом деле точность измерений Гаусса была страшно далека от той, которая необходима, чтобы заметить эффекты, предсказываемые общей теорией относительности; если бы не это, Гаусс мог бы действительно заметить, что сумма углов треугольника отлична от π и, тем самым, что физическое пространство действительно искривлено!

на s . В то же время координата y точки $\gamma(t)$ также умножается на s , так что подынтегральное выражение в (5.14) не изменяется.

Рассмотрим инверсию, отображающую p в q . Нетрудно видеть, что ее дифференциал представляет собой композицию дифференциала (единственной) гомотетии с тем же центром, переводящей p в q , и симметрии. Поэтому приведенные доводы работают и в случае инверсий.

То же самое можно доказать и с путем прямых вычислений. Рассмотрим инверсию I . Не теряя общности, можно предположить, что I — инверсия относительно единичной окружности с центром в начале (так как мы всегда можем добиться этого за счет подходящих параллельного переноса вдоль оси x и гомотетии). Инверсия I действует по формуле

$$I(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Длина образа кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ под действием инверсии I равна

$$\begin{aligned} L(I \circ \gamma, a, b) &= \int_a^b ((I \circ \gamma)(t)|_y)^{-1} \left| \frac{dI(\gamma(t))}{dt} \right| dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^{-1} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2} dt = L(\gamma, a, b). \end{aligned}$$

Упражнение 5.3.10. Дайте новое доказательство этих утверждений, используя комплексное представление

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

для гиперболического движения T .

Упражнение 5.3.11. Обозначим через $T_{a,b,c,d}$ гиперболическое движение, заданное комплексной формулой

$$T_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Докажите, что композиции преобразований $T_{a,b,c,d}$ и $T_{a',b',c',d'}$ соответствует произведение квадратных 2×2 матриц с элементами a, b, c, d и a', b', c', d' :

$$T_{a,b,c,d} \circ T_{a',b',c',d'} = T_{aa'+bc', ab'+bd', ca'+dc', cb'+dd'}.$$

Следовательно, группа сохраняющих ориентацию гиперболических движений изоморфна группе $SL_2(\mathbb{R})$ всех 2×2 -матриц с определителем 1.

Как уже упоминалось, гиперболическая плоскость однородна, причем ее делает однородной уже малая часть ее группы изометрий. Действительно, если две точки имеют, в модели Пуанкаре, одинаковую координату y , то существует параллельный перенос вдоль оси x -ов, переводящий одну из

этих точек в другую. Если же координаты y двух точек различны, то (евклидова) прямая, проходящая через эти точки, пересекает ось x -ов; и тогда существует гомотетия с центром в точке пересечения, переводящая одну из точек в другую.

Определение 5.3.12. Риманово многообразие называется *изотропным* относительно группы преобразований G , если для любых двух геодезических лучей найдется преобразование группы G , переводящее один луч в другой.

Предложение 5.3.13. *Гиперболическая плоскость изотропна (относительно ее группы изометрий).*

Доказательство. Доказательство становится очевидным, если воспользоваться моделью в круге. В самом деле, вершины обоих лучей можно поместить в центр круга (ввиду однородности). Теперь лучи представлены двумя полуоткрытыми евклидовыми отрезками и их можно совместить вращением вокруг центра. \square

Из этого предложения немедленно следует

Лемма 5.3.14. *Для любых двух точек p, q модели в круге существует гиперболическое движение, переводящее p и q в две точки, лежащие на общем диаметре круга.*

Разумеется, не только гиперболические плоскости изотропны. Евклидова плоскость и сферы тоже изотропны. Это свойство обычно входит в список аксиом евклидовой геометрии.

Отметим без доказательства, что сферами, евклидовой плоскостью и гиперболическими плоскостями исчерпывается список всех двумерных изотропных пространств.

Упражнение 5.3.15. 1. Докажите предыдущее предложение прямо в модели Пуанкаре в полуплоскости (не обращаясь к модели в круге).

2. Докажите, что изометрия I , сохраняющая ориентацию и переводящая один данный луч в другой, единственна; то же верно в отношении изометрии, меняющей ориентацию).

3. Докажите, что наш список движений модели Пуанкаре полон (то есть он содержит все изометрии гиперболической плоскости).

Определение 5.3.16. Метрическое пространство (X, d) называется *вполне однородным*, если любая изометрия $f: A \rightarrow B$ подмножеств $A, B \subset X$, (с метриками, являющимися *сужениями* исходной метрики на A и B), может быть продолжена до изометрии всего пространства X , то есть существует такая изометрия $\tilde{f}: X \rightarrow X$, что $\tilde{f}|_A = f$).

Упражнение 5.3.17. Приведите пример однородного пространства, не являющегося вполне однородным.

Упражнение 5.3.18. Докажите, что гиперболическая плоскость вполне однородна. В частности, если длины сторон двух гиперболических треугольников соответственно равны, то существует движение, отображающее один из треугольников на другой.

Замечание. На самом деле в размерности 2 нет существенной разницы между вполне однородными и изотропными пространствами, однако в старших размерностях требование полной однородности намного сильнее, чем изотропность. Можете ли вы привести пример изотропного риманова многообразия, не являющегося вполне однородным?

Теперь мы используем богатство группы гиперболических движений, чтобы доказать, что гиперболические прямые являются кратчайшими. Причем мы не только покажем, что гиперболические прямые — геодезические (и, следовательно, локально кратчайшие), но и докажем, что *каждый* отрезок гиперболической прямой является кратчайшим путем между его концами!

Сначала докажем частный случай этого утверждения.

Лемма 5.3.19. *Если отрезок принадлежит диаметру круга в модели Пуанкаре в круге, то он является кратчайшим путем между своими концами.*

Доказательство. Такой отрезок есть часть координатной d -линии нормальной системы координат (ρ, d) (см. лемму 5.3.6). Следовательно, он — геодезическая. Теперь утверждение следует из леммы 5.2.9 и тривиального наблюдения, что радиус инъективности равен ∞ (так как нормальные координаты определены на всей модели в круге). \square

Пусть теперь p и q — любые точки модели в круге). По лемме 5.3.14 существует движение I , переводящее их в две точки, $I(p)$, $I(q)$, лежащие на одном диаметре нашего круга. Так как I — изометрия гиперболической плоскости, то образ кратчайшей между p и q является кратчайшей между $I(p)$ и $I(q)$. По лемме 5.3.19 евклидов отрезок $[I(p), I(q)]$ является единственной кратчайшей между $I(p)$ и $I(q)$. Следовательно, прообраз этого отрезка, то есть дуга окружности, проходящей через p и q и ортогональная к границе диска, и будет единственной кратчайшей между p и q .

Попутно мы проверили одну из основных аксиом как евклидовой так и гиперболической геометрии: через каждые две различные точки проходит прямая, притом только одна. Разумеется, в модели Пуанкаре это делается очевидным: достаточно переместить с помощью (гиперболического)

движения точки на одну вертикальную прямую модели Пуанкаре; ясно, что две различные точки такой прямой не могут принадлежать окружности с центром на оси x -ов, следовательно, единственной прямой, проходящей через эти точки, является вертикальный луч.

Упражнение 5.3.20. Для двух данных пересекающихся прямых найдите прямую, не пересекающую ни одну из них (контрпример к пятому постулату).

Упражнение 5.3.21. Покажите, что для любых двух пересекающихся прямых найдется прямая, перпендикулярная одной из этих прямых и не пересекающая другую.

Углы в модели Пуанкаре. Обратите внимание на важное свойство модели Пуанкаре. Тожественное отображение верхней полуплоскости \mathbb{H}^2 , рассматриваемое как отображение евклидовой полуплоскости на гиперболическую плоскость, обладает замечательным свойством: оно сохраняет углы между прямыми; то есть евклидов угол между кривыми равен гиперболическому углу между их образами. Это ясно из формулы (5.13).

Отображения, сохраняющие углы, традиционно называются *конформными*.

Таким образом, тождественное отображение верхней полуплоскости на \mathbb{H}^2 является конформным отображением. Это обстоятельство делает модель Пуанкаре очень удобной: хотя большинство гиперболических прямых даже не лежат на евклидовых прямых, мы сохраняем возможность рассматривать гиперболические углы между кривыми как обычные евклидовы углы. Модель Пуанкаре в круге также является конформной, поскольку она получена инверсией из модели Пуанкаре в полуплоскости, а инверсия — конформное отображение.

Замечание. Существуют модели, представляющие гиперболическую плоскость как подмножество евклидовой плоскости таким образом, что гиперболическим прямым соответствуют евклидовы прямые или отрезки. Такие модели, однако, не могут быть конформными и потому в большинстве случаев оказываются менее удобными.

5.3.3. Идеальная граница. Напомним, что граничная окружность $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ не принадлежит модели в круге. Однако полезно добавить ее к гиперболической плоскости так, чтобы получить компактное пространство, гомеоморфное замкнутому кругу. Назовем добавленную окружность *идеальной границей* гиперболической плоскости и обозначим ее через G . Инверсия, преобразующая модель в круге в модель Пуанкаре в полуплоскости, отображает граничную окружность, за вычетом одной точки, которая не имеет образа при инверсии, в ось x -ов (можно представлять себе, что эта точка перешла в “точку” с координатой

$y = \infty$). Следовательно, имея дело с моделью Пуанкаре, следует думать о идеальной границе как состоящей из оси x -ов и еще одной “бесконечно удаленной точки $y = \infty$ ”. Чтобы избежать таких сложностей, мы советуем держаться модели в круге до тех пор, пока мы не дадим внутреннее определение идеальной границы.

Способа продолжить гиперболическую метрику на идеальную границу не существует. Однако, на объединении $\mathbb{H}^2 \cup \Gamma$ имеется естественная топология (понятие сходящихся последовательностей), превращающая его в компактное пространство, причем такая компактификация значительно удобнее одноточечной. По определению, последовательность точек $a_i \in \mathbb{H}^2$ сходится к точке $a \in \Gamma$, если она сходится к a в евклидовой топологии модели в круге. Будем говорить, что две ориентированные прямые (модели в круге) *параллельны* (или асимптотически сходятся), если они представлены дугами окружностей (или диаметрами), замыкания которых имеют общий конец на Γ . Свойство прямых быть параллельными является эквивалентностью (докажите это). Прямые, которые не пересекаются и не параллельны, называются *расходящимися*.

Внутреннее описание идеальной границы. Неприятной стороной этих определений является то, что они апеллируют к модели и, следовательно, их внутренний смысл (если таковой имеется) остается скрытым. Поэтому мы определим Γ внутренним образом.

Будем говорить, что две геодезические $\gamma(t)$, $\gamma_1(1)$ параллельны, если (гиперболическое) расстояние $d(\gamma(t), \gamma_1(t))$ равномерно ограничено при всех $t \in (0, \infty)$.

Упражнение 5.3.22. 1. Докажите, что это определение равносильно данному выше определению.

Подсказка. Нам надо оценить гиперболическое расстояние между двумя евклидовыми окружностями, встречающимися в точке граничной окружности модели. Не умаляя общности, можно предположить (ввиду однородности), что они встречаются в точке $(0, -1)$. При переходе с помощью инверсии I к модели в полуплоскости эти прямые становятся двумя вертикальными лучами. Для них расстояние легко оценить.

2. Докажите, что если геодезические $\gamma(t)$, $\gamma_1(t)$ параллельны, то существует такое число t_0 , что $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t), \gamma_1(t + t_0)) = 0$.

3. Покажите, что при таком выборе числа t_0 предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} d(\gamma(t), \gamma_1(t + t_0))$$

конечен и положителен.

Подсказка. Воспользуйтесь подсказкой к первому пункту упражнения.

Теперь мы можем определить Γ как множество классов параллельных прямых. Говорят, что последовательность точек $p_i \in H$ сходится к точке $[\gamma] \in \Gamma$, если $d(p_i, \gamma(0)) \rightarrow \infty$ и угол α_i между γ и отрезком $[\gamma(0), p_i]$ в точке $\gamma(0)$ стремится 0 при $i \rightarrow \infty$.

Упражнение 5.3.23. Проверьте, что последнее определение равносильно определению с помощью модели в круге.

Угол между параллельными прямыми ab , ac в их общей точке $a \in \Gamma$, положим равным нулю *по определению*. Мотивом для такого определения служит то, что в случае двух точек $b, c \in \mathbb{H}^2$ и последовательности точек $a_i \in \mathbb{H}^2$, $a_i \rightarrow a$ при $i \rightarrow \infty$, угол $\angle ba_i c$ стремится к нулю (докажите это!).

В дополнение к обычным “ограниченным” треугольникам будем рассматривать *идеальные треугольники*. Мы говорим, что треугольник *идеальный*, если по крайней мере одна из его вершин находится на идеальной границе. В соответствии с нашим определением, угол в такой вершине равен нулю. Например, если все вершины треугольника находятся на идеальной границе, то все его углы равны нулю. Из рассмотрения модели в круге ясно, что для любой ориентированной прямой l и точки $p \notin l$, не лежащей на ней, существует ровно одна прямая l_p^+ , проходящая через p и параллельная ей. Если мы сменим ориентацию прямой l , то найдем еще одну прямую l_p^- , проходящую через p и параллельную противоположно ориентированной прямой l . Все прямые, проходящие через p и лежащие “между” l_p^+ и l_p^- , расходятся с l (то есть, не пересекают ее и не параллельны ей). Советуем читателю постараться хорошо представить себе получившуюся картину.

Орициклы. Функции Буземана.

Определение 5.3.24. Пусть $a = [\gamma]$ — точка идеальной границы Γ . Кривая, ортогональная ко всем (параллельным между собой) геодезическим из класса γ , называется орициклом с центром a .

Упражнение 5.3.25. Докажите, что в модели Пуанкаре орициклы представлены горизонтальными прямыми и окружностями, касающимися оси x -ов. Докажите также, что в модели в круге орициклы представлены окружностями, касающимися граничной окружности.

Чтобы понять метрическую природу орициклов (и не только для этого), мы сопоставим каждой (ориентированной) прямой γ *функцию Буземана* $B_\gamma: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$B_\gamma(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(p, \gamma(t)) - t).$$

Упражнение 5.3.26. Докажите, что этот предел всегда существует.

Подсказка. Обратите внимание, что разность $(d(p, \gamma(t)) - t)$ монотонно убывает по t (по неравенству треугольника).

При фиксированном t функцию $d_t(p) = d(p, \gamma(t)) - t$ можно рассматривать как функцию расстояния от точки $\gamma(t)$, но нормированную (за счет вычитания t) так, чтобы она обращалась в ноль в точке $\gamma(0)$. Следовательно, линии уровня $S_{\tau, t} = \{p \in H : d(p, \gamma(t)) - t = -\tau\}$ функции d_t являются окружностями с центром в $\gamma(t)$, проходящими через точку $\gamma(\tau)$ перпендикулярно к $\gamma'(\tau)$.

Упражнение 5.3.27. Докажите, что линии уровня функции $S_\tau = \{p \in H : B_\gamma(p) = \tau\}$ являются орициклами.

Эти рассуждения позволяют нам представлять себе орицикл S_τ , проходящий через точку $\gamma(\tau)$, как предел окружностей, центры которых “уходят на бесконечность вдоль γ ”. Это подсказывает нам определить *орикруг* как множество $D_\tau = \{p \in H : B_\gamma(p) \leq \tau\}$.

Упражнение 5.3.28. Докажите, что орикруг D_τ является объединением кругов $B_{\gamma(t)}(t - \tau)$, $t \geq \tau$.

Упражнение 5.3.29. К чему приводит такая же конструкция в евклидовой плоскости? *Ответ.* К полуплоскости, ортогональной к γ .

Одну из сетей, состоящих из семейства параллельных прямых и семейства ортогональных к ним орициклов, очень просто увидеть в модели Пуанкаре в полуплоскости: сеть состоит из вертикальных лучей и горизонтальных прямых, то есть из координатных линий декартовых координат плоскости xy . (Заметим, что декартовы координаты *не* являются нормальными координатами для гиперболической метрики, поскольку линии y -ов не параметризованы длиной дуги).

Упражнение 5.3.30. Превратите декартовы координаты в гиперболические нормальные координаты за счет перепараметризации $y_1 = \varphi(y)$ и найдите метрические коэффициенты в этой координатной системе.

Читатель вероятно уже догадался, что сеть, образованную семейством параллельных прямых и семейством ортогональных к ним орициклов, можно всегда рассматривать как сеть координатных линий *нормальной системы координат*. В частности, семейство орициклов является эквидистантным.

Компактификация Буземана. Теперь мы опишем общую конструкцию компактификации Буземана для любого (полного, локально компактного) пространства с внутренней метрикой. Эта компактификация много

тоньше, чем одноточечная компактификация, и добавление идеальной границы к гиперболической плоскости служит примером такой компактификации.

Рассмотрим (полное локально компактное) пространство X с внутренней метрикой. Обозначим через $\text{Lip}(X)$ пространство всех 1-липшицевых функций на X , снабженное C^0 -метрикой $d_{C^0}(f, g) = \sup |f - g|$. Заметим, что C^0 -расстояние между двумя липшицевыми функциями на некомпактном пространстве может быть и бесконечным, но это не служит препятствием, потому что, определяя метрические пространства, мы разрешили бесконечные расстояния. (Впрочем, если бы бесконечные расстояния и не допускались, то можно было бы просто разбить $\text{Lip}(X)$ на семейство (обычно континуальное) метрических пространств, каждое из которых снабжено C^0 -метрикой, и положить равным бесконечности $\sup |f - g|$ для функций из различных пространств.)

Отображение $x \rightarrow d(x, \cdot)$ вкладывает изометрично X в $\text{Lip}(X)$. (Проверьте, что это действительно изометрия.) На самом деле удобно зафиксировать некоторую точку $y \in X$ и определить вложение равенством $x \rightarrow d_x = d(x, \cdot) - d(x, y)$. Это вложение сопоставляет каждой точке x дистанционную функцию $d_x(z) = d(x, z) - d(x, y)$, нормированную (за счет вычитания постоянной $d(x, y)$) так, чтобы она обращалась в ноль в точке y . Заметим, что C^0 -расстояние между любыми двумя дистанционными функциями конечно. Мы будем говорить, что функция $g \in \text{Lip}(X)$ является функцией, сходной с дистанционной, если $d_{C^0}(g, f) < \infty$ для некоторой (и, следовательно, любой) дистанционной функции f . Примером функции, сходной с дистанционной, служит функция $d(x, \cdot) + \text{const}$.

Если X некомпактно, то его образ при вложении $x \rightarrow d_x = d(x, \cdot) - d(x, y)$ не замкнут в $\text{Lip}(X)$. Его замыкание как раз и называется компактификацией Буземана пространства X . Она содержит изометричную копию пространства X (точки которого представлены дистанционными функциями, нормированными так, чтобы они обращались в ноль в фиксированной точке y) и множество предельных точек образа пространства X . Это множество предельных точек, обозначаемое $X(\infty)$, называется *границей Буземана* пространства X на бесконечности; ее элементы называются *функциями Буземана*. Эти функции являются сходными с дистанционными 1-липшицевыми функциями; они возникают как пределы (равномерные на компактах) последовательностей нормированных дистанционных функций $d_n(z) = d(z, x_n) - d(x_n, y)$.

Имеется и другое понятие границы на бесконечности (более того, есть по крайней мере пять полезных и не равносильных между собой определений границы на бесконечности). *Граница Титца* состоит из классов эквивалентности лучей с началом в фиксированной точке (два луча эквивалентны, если они находятся на ограниченном расстоянии

друг от друга) Это множество классов снабжается топологией равномерной сходимости на открытых множествах. В случае гиперболической плоскости границы Буземана и Титца совпадают (проверьте это).

Упражнение 5.3.31. 1. Как устроена границей Буземана на бесконечности в случае евклидовой плоскости? А в случае свободной группы с двумя образующими (с метрикой слов)?

2. Покажите, что в гиперболической плоскости функция Буземана относительно луча является частным случаем только что описанной общей функции Буземана (для последовательности точек x_n , уходящих на бесконечность вдоль луча).

3. Покажите, что для гиперболической плоскости ее компактификация Буземана совпадает с ее компактификацией, описанной нами ранее.

4. Приведите пример пространства с внутренней метрикой, для которого граница Буземана на бесконечности отлична от его границы Титца.

5.3.4. Формула Гаусса–Бонне. Хорошо известно, что на евклидовой плоскости сумма углов треугольника равна π . Это свойство равносильно пятому постулату. (Уже несколько веков назад было известно, что пятый постулат можно вывести из существования даже одного треугольника с суммой углов, равной π .) Этот факт является частным случаем более общей *формулы Гаусса–Бонне*, которая, в свою очередь, есть частный случай теоремы Гаусса–Бонне 6.3.18. Эта формула дает, в некотором смысле, качественную версию упражнения 6.5.7

Как обычно, под треугольником в пространстве с внутренней метрикой мы понимаем три различные точки a, b, c , соединенные тремя кратчайшими $[ab]$, $[bc]$, $[ca]$. Теперь будем рассматривать ограничивающую область треугольники на гиперболической плоскости или сфере, (при этом мы не исключаем идеальные треугольники на гиперболической плоскости). Верна следующая формула Гаусса–Бонне.

Теорема 5.3.32.

$$\angle a + \angle b + \angle c - \pi = k \cdot \text{Area}(T),$$

где k — кривизна пространства.

Доказательство. Ввиду возможности изменения масштаба достаточно рассмотреть только два случая: $k = 1$ и $k = -1$.

Случай 1: $k = 1$. Сферический треугольник можно представить как пересечение трех полусфер. Наше дальнейшее рассуждение состоит в элементарном применении формулы включений и исключений. Именно, пусть a', b', c' — точки стандартной единичной сферы, диаметрально противоположные точкам a, b, c , соответственно. Для каждой пары

противоположных точек, скажем, для a, a' , один из двух двуугольников $B(aa')$, $B'(aa')$ с вершинами a и a' накрывает треугольник Δabc , а другой накрывает противоположный треугольник $\Delta a'b'c'$. Заметим, что площадь каждого такого двуугольника равна удвоенному углу α треугольника Δabc в вершине a .

Все шесть двуугольников накрывают всю сферу с кратностью 1 (то есть каждая точка покрыта точно одним из них), за исключением самих треугольников Δabc и $\Delta a'b'c'$, каждый из которых покрыт троекратно. В итоге имеем

$$\begin{aligned} 4\pi &= \text{Area}(S^2) \\ &= 2(\text{Area}(B(aa')) + \text{Area}(B(bb')) + \text{Area}(B(cc'))) - 4\text{Area}(T). \end{aligned}$$

Это, вместе с наблюдением, что площадь каждого двуугольника равна удвоенному соответствующему углу треугольника Δabc , полностью доказывает случай 1.

Случай 2: $k = -1$. Заметим, что если треугольник (в том числе идеальный) разрезан на два треугольника, причем заключение теоремы 5.3.32 верно для любых двух из трех имеющихся треугольников, то оно справедливо и для оставшегося третьего. Далее, каждый треугольник можно получить, отрезая от идеального треугольника другой идеальный треугольник. Следовательно, достаточно доказать 5.3.32 для идеальных треугольников.

Рассмотрим идеальный треугольник Δabc , где $a \in \Gamma$. В модели Пуанкаре в полуплоскости его можно отобразить (гиперболическим движением) на идеальный треугольник, две стороны которого принадлежат вертикальным лучам, а две вершины расположены на окружности $x^2 + y^2 = 1$ (третья вершина перешла в “бесконечно удаленную точку” $y = \infty$). Элементарное (евклидово) геометрическое рассмотрение показывает, что если углы этого треугольника равны α и β , (мы считаем, что α — угол в левой вершине, а β — в правой), то вершины треугольника имеют декартовы координаты $(-\cos \alpha, \sin \alpha)$ и $(\cos \beta, \sin \beta)$, соответственно.

Теперь осталось просто сосчитать площадь треугольника прямым интегрированием. В самом деле, гиперболическая площадь треугольника T равна

$$\text{Area}(T) = \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \pi - \alpha - \beta.$$

□

Упражнение 5.3.33. Сформулируйте и докажите обобщение формулы Гаусса–Бонне для (гиперболических и сферических) многоугольников.

Упражнение 5.3.34. Покажите, что площадь гиперболического треугольника не может превосходить π .

Замечание 5.3.35. Существует замечательный трюк, позволяющий доказать многие теоремы гиперболической геометрии с помощью их сферических аналогов. Например, при доказательстве формулы Гаусса–Бонне мы не могли воспользоваться в случае 2 таким же разложением, как в случае 1, так как площадь гиперболической плоскости бесконечна. Однако этот трюк позволит нам применить результат случая 1 к случаю 2 и показать, что формула Гаусса–Бонне верна в обоих случаях. Другой пример: тот же прием можно использовать для доказательства того, что все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Вот основная идея этого трюка. Можно формализовать (многими способами) утверждение, что сферы, евклидова плоскость и гиперболические плоскости образуют однопараметрическое семейство. Например, формулы (5.10), (5.9) и (5.8) для коэффициентов метрики можно записать в виде единой формулы $G(r) = (\operatorname{Re} \sin(\sqrt{k}r))^2$, если воспользоваться комплексными числами. Теперь, если какая-либо величина может быть представлена при $k > 0$ как функция метрических коэффициентов, то, ввиду аналитичности, такое же представление имеет место для всех k (так как нетривиальная аналитическая функция может иметь только изолированные нули). Пусть читатель, которого заинтересовал такой подход, постарается сам восстановить все детали.

5.3.5. Избранные вопросы гиперболической геометрии. Мы заканчиваем этот параграф формулировками некоторых характерных геометрических свойств гиперболической плоскости. Доказательства мы оставляем читателям. Рассматриваемые здесь свойства в основном относятся к так называемой геометрии крупного масштаба гиперболической плоскости, и многие из них будут затем обобщены в параграфе 8.4. Мы рассматриваем только гиперболическую плоскость кривизны $k = 1$, предоставляя читателю в качестве полезного упражнения разобраться, как следует переформулировать наши утверждения для других значений k .

Рост шаров. Хорошо известно, что на евклидовой плоскости длина окружности радиуса r и площадь круга, ограниченного этой окружностью, равны, соответственно, $2\pi r$ и πr^2 . Согласно лемме 5.1.16 маленькие круги римановой метрики выглядят почти так же, как их евклидовы аналоги. В частности, длина маленькой окружности в гиперболической плоскости равен $2\pi r + o(r^2)$. В противоположность этому, в гиперболической плоскости окружности и шары большого радиуса растут с экспоненциальной скоростью: длина окружности радиуса r равна $\pi(e^r - e^{-r})$. Удивительно, но при больших r площадь круга меньше, чем длина ограничивающей его окружности: эта площадь равна $\pi(e^r + e^{-r} - 2)$. В частности, кольцо между двумя концентрическими окружностями радиусов r и $r + 1$ имеет большую площадь, чем круг радиуса r .

Большие треугольники. Прежде всего, из формулы Гаусса–Бонне следует, что площадь треугольника не может превосходить π . Так как площадь круга радиуса 1 больше π , то радиус круга, вписанного в любой треугольник, меньше, чем 1 (разумеется, эта оценка радиуса сверху очень грубая; попробуйте найти лучшую оценку). Это означает, что если в гиперболической плоскости выбрать три точки (сколь угодно далеко друг от друга), то соединяющие их отрезки “почти встречаются в центре треугольника”: все они пересекают один и тот же круг радиуса 1! Следовательно, каждая сторона гиперболического треугольника содержится в 2-окрестности объединения двух других сторон. Если смотреть очень издали, большой гиперболический треугольник выглядит почти как объединение трех лучей, выходящих из одной точки: весь треугольник содержится в 1-окрестности этого объединения. Грубо говоря, треугольник выглядит очень “тощим”, таким, как будто его стороны “втянулись” внутрь.

После всего сказанного легко обнаружить следующий замечательный феномен: рассмотрим треугольник $\triangle abc$ и точку на стороне $[bc]$. Тогда по крайней мере один из треугольников $\triangle abp$ и $\triangle acp$ непременно оказывается почти вырожденным в том смысле, что выполняется хотя бы одно из следующих неравенств: $d(a, b) + d(b, p) \leq d(a, p) + 4$, или $d(a, c) + d(c, p) \leq d(a, p) + 4$. В дальнейшем это свойство будет использовано для того, чтобы определить δ -гиперболические по Громову пространства.

Заметим еще, что, в отличие от евклидовой геометрии, имеется еще один признак конгруэнтности гиперболических треугольников: “конгруэнтность по трем углам”: два треугольника конгруэнтны (то есть один из них может быть получен из другого движением), если углы одного треугольника равны соответствующим углам другого. С другой стороны, в гиперболической геометрии вообще нет прямоугольников!

Лемма Морса. Кривая γ называется *квазигеодезической* с постоянной квазигеодезичности c или, просто c -квазигеодезической, если каждый длина каждого ее участка не более, чем в c раз больше расстояния между его концами, то есть

$$L(\gamma, t_1, t_2) \leq cd(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$$

при всех t_1, t_2 . Разумеется, c не может быть меньше 1, если только кривая γ отлична от постоянной; если же $c = 1$, то γ является кратчайшей. Нас будет интересовать следующий вопрос: если постоянная c зафиксирована, то как далеко c -квазигеодезическая может отойти от геодезической с теми же концами? В евклидовом случае отклонение не превышает $\text{const} \cdot d$, где d — расстояние между концами квазигеодезической. (Докажите это; найдите c -квазигеодезические с максимальным отклонением). Во

всяком случае, при любом фиксированном $c > 1$ максимальное отклонение стремится к бесконечности вместе с d .

В противоположность евклидову случаю лемма Морса утверждает, в случае гиперболической плоскости существует такая постоянная D (зависящая от c), что каждая c -квазигеодзическая (независимо от ее длины!) лежит на не превосходящем D расстоянии от геодезического отрезка, соединяющего ее концы. Доказательство леммы Морса (в гораздо более общей ситуации) будет дано в параграфе 8.4.

Возможна следующая удивительная переформулировка леммы Морса. Предположим, что мы изменили риманову метрику гиперболической плоскости таким образом, что отношение расстояний в новой и старой метриках равномерно ограничено. Тогда каждая кратчайшая новой метрики будет лежать на равномерно ограниченном расстоянии от соответствующего отрезка гиперболической прямой. Это говорит о том, что крупномасштабная структура геодезических гиперболической плоскости очень устойчива; это явление тесно связано с структурной устойчивостью гиперболических (аносовских) потоков.

Кривизна орициклов. Евклидова окружность большого радиуса локально выглядит как прямая: ее кривизна стремится к нулю по мере роста радиуса. В противоположность этому, геодезическая кривизна окружности в гиперболической плоскости стремится к 1 при стремлении радиуса к бесконечности (см. упражнение 6.4.9).

Ввиду сказанного, длина окружности растет экспоненциально. В самом деле, вспомним, что производная от длины кривой при эквидистантной вариации равна интегралу от ее геодезической кривизны. Геодезическая кривизна окружности большого радиуса приближенно равна 1, а это и значит, что производная от длины приближенно равна самой длине.

Так как окружности, проходящие через фиксированную точку в фиксированном направлении сходятся к орициклу (при стремлении радиуса к бесконечности), то геодезическая кривизна любого орицикла равна 1. Напомним, что горизонтальные прямые модели Пуанкаре являются орициклами. кривизны 1. В какую сторону они изогнуты: вверх или вниз?

Следуя этой же идее, рассмотрим кривую постоянной геодезической кривизны. Если эта постоянная больше, чем 1, то наша кривая, как и евклидова кривая постоянной кривизны, будет замкнутой (окружностью). Однако, если кривизна кривой не превосходит 1, кривая не замкнется! Представьте, что вы ведете “гиперболический автомобиль” по кривой постоянной кривизны (меньшей 1). Тогда, вопреки нашей “евклидовой” интуиции, вы тем не менее уезжаете все дальше и дальше, оставаясь на постоянном расстоянии от прямой!

Замощения правильными многоугольниками. Как обычно, мы называем многоугольник *правильным*, если как все его стороны, так и все его углы равны между собой. Иными словами, n -угольник является правильным, если его группа изометрий содержит \mathbb{Z}_n . В модели Пуанкаре в круге вершины правильного евклидова многоугольника с центром в начале являются и вершинами правильного гиперболического многоугольника (конечно, стороны этих многоугольников различны, т.к. евклидовы отрезки не будут гиперболическими геодезическими). Нетрудно видеть, что углы маленького гиперболического правильного n -угольника почти равны углам евклидова многоугольника с теми же вершинами, но с ростом длин сторон гиперболического n -угольника его углы стремятся к нулю. В частности, если $n > 4$, то всегда найдется (по непрерывности) n -угольник с углами, равными $2\pi/n$. Тогда вся гиперболическая плоскость может быть замощена изометричными копиями такого многоугольника; при этом к каждой вершине подходит n многоугольников. Это замощение аналогично замощению евклидовой плоскости квадратами. Однако существует существенная разница: евклидову плоскость можно замостить только треугольниками, квадратами и шестиугольниками, а гиперболическую плоскость можно замостить n -угольниками для любого $n > 2$.

Дискретные группы гиперболических изометрий. Группа изометрий евклидовой плоскости содержит совсем немного интересных дискретных подгрупп: каждая ее бесконечная дискретная подгруппа G в свою очередь содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную или \mathbb{Z} , или \mathbb{Z}^2 . Если же наложить дополнительное требование, чтобы факторпространство \mathbb{R}^2/G было многообразием, то останется только два случая: или $G = \mathbb{Z}^2$ и тогда \mathbb{R}^2/G — тор, или G — расширение группы \mathbb{Z}^2 с помощью осевой симметрии. В последнем случае \mathbb{R}^2/G — бутылка Клейна (неориентированная поверхность). Группа гиперболических изометрий много богаче, она содержит обширный класс дискретных подгрупп. Напомним, что, согласно упражнению 5.3.11, группа гиперболических движений изоморфна группе $SL_2(\mathbb{R})$. Следовательно, например, группа $SL_2(\mathbb{Z})$ действует на \mathbb{H} гиперболическими изометриями.

Каждый раз, когда группа G действует изометриями на гиперболической (или евклидовой) плоскости, существует замощение многоугольниками, соответствующее этому действию. Чтобы построить такое замощение, выберем произвольную точку p и рассмотрим ее орбиту $\{g(p), g \in G\}$. Теперь плоскость можно замостить областями Вороного $V_{g(p)}$, где

$$V_{g(p)} = \{q: d(q, g(p)) \leq d(q, g'(p)) \text{ для всех } g' \in G\}.$$

На этом пути можно получить такие замощения гиперболической плоскости правильными $4k$ -угольниками ($k > 1$), при которых группа

изометрий действует без неподвижных точек. Соответствующие факторпространства являются двумерными замкнутыми поверхностями (рода больше 2), снабженными римановыми метриками постоянной кривизна -1 .

5.3.6. Добавление: инверсии. По определению, инверсия $I_{p,r}$ относительно окружности радиуса r с центром в $p \in \mathbb{R}^2$ отображает точку q в такую точку $I_{p,r}(q)$ на луче $[pq)$, что $|pq| \cdot |pI_{p,r}(q)| = r^2$. Отметим, что $I_{p,r}$ не определено в точке p . Каждую инверсию $I_{p,r}$ можно получить как композицию инверсии $I = I_{(0,0),1}$ с гомотетией и параллельным переносом. Если рассматривать точки плоскости \mathbb{R}^2 как комплексные числа, то инверсия I задается очень простой формулой

$$(5.17) \quad I(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

где \bar{z} означает комплексное сопряжение. Перечислим свойства инверсий, важные для нашего изложения. Эти свойства нетрудно доказать как элементарными методами, так и с помощью комплексных чисел, используя формулу (5.17)). Детали доказательств оставляем читателю в качестве упражнений.

1. Инверсия является инволюцией, то есть $I_{p,r}^2 = \text{id}$. Каждая инверсия меняет ориентацию.
2. Инверсия является конформным отображением, то есть она сохраняет углы между кривыми. Это значит, что угол между образами двух кривых равен углу между самими кривыми (это свойство мы применяем только к прямым и окружностям).
3. Если окружность не проходит через центр инверсии, ее образ — окружность, в противном случае — прямая. Если прямая не проходит через центр инверсии, то ее образ — окружность, а если проходит, то она сама.
4. Неподвижными точками инверсии $I_{p,r}$ служат точки окружности радиуса r с центром в p (окружность инверсия). Дифференциал инверсии в каждой точке окружности инверсии является осевой симметрией.

5.4. Пространства Карно–Каратеодори

Все внутренние метрики, которые мы до сих пор рассматривали, были получены за счет введения новых функционалов длины, в то время как класс допустимых путей оставался, в основном, неизменным: мы использовали непрерывные или кусочно гладкие пути. В этом параграфе мы опишем замечательный класс внутренних метрик, полученный как раз за счет специализации класса допустимых путей. Мы ограничимся здесь определением метрик Карно–Каратеодори, геометрическими мотивировками и кратким описанием модельных примеров. Для дальнейшего чтения

мы рекомендуем читателям книгу [BR]. Этого параграфа несколько сложнее предыдущего, однако он не используется в последующих главах и может быть пропущен при первом чтении. Тем не менее он заслуживает того, чтобы вернуться к нему в дальнейшем. Мы надеемся, что он увлечет некоторых читателей настолько, что у них возникнет желание изучать геометрию пространств Карно–Каратеодори.

Мы будем рассматривать простейшие случаи, в основном на базе области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с ее стандартной евклидовой метрикой; замена евклидовой метрики римановой не привела бы к существенным изменениям, однако усложнила бы обозначения. Существуют, однако, нетривиальные явления, проявляющиеся только в высоких размерностях; они выходят за рамки нашего обзора. Последние пункты этого параграфа предполагают знакомство читателя со *скобкой Ли* и *дифференциальными формами*.

5.4.1. Метрики Карно–Каратеодори. Имеется широкий класс примеров, в которых класс допустимых путей определяется путем ограничений, накладываемых на вектор скорости пути в каждой точке. Например, сопоставим каждой точке $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ двумерную плоскость $H_p \subset T_p\Omega$ (содержащую $0 \in T_p\Omega$). Предположим, что плоскости H_p гладко зависят от p . Полученный объект называется двумерным *распределением*, или *полем двумерных плоскостей*. Выбранные плоскости H_p называются допустимыми. Говорят, что (кусочно гладкая) кривая γ является *H*-допустимой, если в каждой ее точке вектор скорости $\gamma'(t)$ лежит в соответствующей допустимой плоскости: $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$.

На первый взгляд это может показаться невероятным, но для общего распределения ² любые две точки из Ω можно соединить допустимой кривой! Следующие примеры могут только увеличить скептицизм по поводу этого утверждения. Во первых, в случае двумерной области Ω аналогом распределения служит поле прямых; тогда каждая допустимая кривая лежит на интегральной кривой этого поля прямых. Следовательно, множество точек, достижимых из данной точки, одномерно, что и соответствует нашей интуиции. Далее, рассмотрим трехмерный пример, в котором все допустимые плоскости параллельны между собой: например, выберем горизонтальную плоскость в каждой точке. Разумеется, в этом случае любая допустимая кривая будет лежать в горизонтальной плоскости, в частности, две точки, имеющие различные координаты z , нельзя соединить допустимой кривой. Общий критерий возможности соединить любые две точки допустимой кривой мы сформулируем позже, см. 5.4.6, но уже теперь ясно, что плоскости не должны быть касательными

²Т.е. для всех распределений, кроме некоторого замкнутого нигде не плотного их подмножества; при этом, естественно, подразумевается, что в множестве распределений введена некоторая естественная топология.

плоскостями к некоторому семейству поверхностей (известно, что, в отличие от векторных полей, *общее* поле плоскостей не будет касаться (даже локально) никакого семейства поверхностей).

Теперь сопоставим распределению H обычный евклидов функционал длины, но заданный *только на классе H -допустимых кривых*. Внутренняя метрика, определяемая этим функционалом, называется метрикой Карно–Каратеодори или неголономной (римановой) метрикой³. Отметим, что неголономную (риманову) метрику можно всегда рассматривать как предел римановых метрик. Действительно, выберем квадратичную форму Q_p в каждом $T_p\Omega$ так, чтобы H_p было ее ядром. Теперь рассмотрим следующее семейство римановых метрик, зависящее от численного параметра h :

$$\langle V, V \rangle_R = \langle V, V \rangle + h \cdot Q_p(V, V),$$

где $\langle V, V \rangle$ — обычное скалярное произведение вектора $V \in T_p\Omega$ на себя. Обозначим через $d_h(p, q)$ соответствующую риманову метрику. Грубо говоря, слагаемое $h \cdot Q_p(V, V)$ — это штраф за движение в направлении, не принадлежащем H_p (напомним, что H_p — это ядро Q_p).

Упражнение 5.4.1. Докажите, что $\lim_{h \rightarrow \infty} d_h(p, q)$ является расстоянием между p и q в метрике Карно–Каратеодори.

Читатель, знакомый с понятием связей в теоретической механике, может заметить здесь определенное сходство: чтобы удерживать частицу на поверхности, вводят потенциал, который становится огромным, если частица пытается удалиться от поверхности. Однако в случае общего распределения касающейся его поверхности не существует. По этой причине такие связи называются *неголономными*. Классический пример такого рода — шар, катящийся по плоскости без проскальзывания, будет кратко рассмотрен ниже.

Геометрическая теория управления. Возможно небольшое видоизменение описанной выше конструкции. Пусть V_i , $i = 1, 2, \dots, k$, — несколько гладких векторных полей в Ω . Мы будем говорить, что путь $\gamma(t)$ — допустимый, если найдутся такие вещественные функции $v_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, что

$$\gamma'(t) = \sum v_i(t) V_i(\gamma(t)).$$

Это равенство означает, что разрешается двигаться только в направлении линейной комбинации векторов V_i . Так что можно думать о полях V_i как ограничениях на направление движения; иными словами, векторные поля v_i служат управляющими функциями. Если векторные поля V_1 и V_2

³В зарубежной литературе распространен термин sub-Riemannian metrics, но он труднопереводим. Название “неголономные метрики” также широко используется, см., например, [VG].

линейно независимы в каждой точке, то можно построить распределение H плоскостей, натянутых на V_1 и V_2 , и тем самым свести нашу новую конструкцию к первоначальной. Различие возникает, если векторные поля линейно зависимы в некоторых точках.

Упражнение 5.4.2. Докажите, что в случае полей $V_1(x, y, z) = (1, 0, 0)$ и $V_2(x, y, z) = (0, 1, x)$ любые две точки соединимы допустимым путем.

Геометрическое управление: езда на велосипеде и парковка автомобиля. Описанные выше классы допустимых полей возникают во многих приложениях; поля V_i 's часто называют *управлением*. Например, рассмотрим велосипедиста, движущегося по плоскости. Велосипедист комбинирует два способа управления велосипедом: он поворачивает руль и нажимает на педали, чтобы двигаться вперед. С другой стороны, размерность пространства всех возможных положений велосипеда равна трем! Действительно, положение заднего колеса можно описать его координатами (x, y) ; и и нам надо еще одно число α для угла между велосипедом и осью x -ов. Таким образом, положению велосипеда соответствует точка (x, y, α) пространства $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Это пространство называется *конфигурационным пространством* нашей модели. Отметим, что с помощью только двух управлений велосипедист может достичь любой точки трехмерного конфигурационного пространства.

Теперь опишем соответствующее распределение. При движении велосипеда его заднее колесо следует за передним. Иными словами, вектор скорости пути, проходимого велосипедом, все время пропорционален вектору идущему от заднего колеса к переднему. В введенных выше координатах (x, y, α) последнее условие можно записать в виде равенства $\dot{x} \sin \alpha = \dot{y} \cos \alpha$. Иными словами, вектор скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha})$ точки, движущейся в конфигурационном пространстве, должен в точке (x, y, α) принадлежать плоскости, ортогональной вектору $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$. (Здесь \dot{x} означает дифференцирование по времени t .) Геометрически, в каждой точке трехмерного конфигурационного пространства $\mathbb{R}^2 \times S^1$ мы указали такую двумерную плоскость, что лежащие в ней векторы служат скоростями всех возможных движений велосипеда; другие векторы описывают движение велосипеда с проскальзыванием вбок. Чтобы построить метрику, нам надо еще выбрать сам функционал длины, однако конкретный его выбор здесь не так уж важен: именно ограничение на класс допустимых путей приводит к очень необычным качественным свойствам метрики Карно–Каратеодори, в то время как различные способы измерения длин векторов дают лишь весьма скромные по сравнению с этим изменения функционала длины. Например, мы можем использовать евклидову

длину, определенную равенством

$$L(\gamma, a, b) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\alpha}^2} dt.$$

Попробуем обсудить неформально неголономную риманову метрику, возникшую в этом примере. Рассмотрим две очень близкие друг к другу точки. Если вектор, соединяющий эти точки (как точки в \mathbb{R}^3) “идет в почти допустимом направлении”, то можно рассчитывать, что новое расстояние не слишком отличается от евклидова. Однако, если вектор, соединяющий точки, перпендикулярен допустимой плоскости, то допустимый путь, соединяющий эти точки, должен быть чрезвычайно длинным. Такие точки лежат далеко друг от друга в метрике Карно–Каратеодори. Каждый водитель, которому приходилось делать “параллельную парковку” (наша модель применима к автомобилю в той же мере, как к велосипеду), знает, что для того, чтобы придвинуть автомобиль на полметра к тротуару в тесном просвете между двумя машинами, вам придется проехать метров 10-20, двигаясь попеременно вперед и назад. Возможно, такая парковка автомобиля еще не столь уж сложная задача, но уже парковка автомобиля с двумя прицепами требует незаурядного мастерства. С точки зрения геометрии, автомобиль с двумя прицепами приводит к внутренней метрике того же типа, однако размерность конфигурационного пространства здесь больше, а управлений — по-прежнему только два.

Неголономные механические связи: перекачивание шара. Другим примером того же рода служит перекачивание шара. Положение шара, лежащего на плоскости, описывается пятью координатами: две указывают ту точку плоскости, в которой шар ее касается, две координаты описывают ту точку шара, которой он касается плоскости, и еще одна координата показывает скорость вращения шара вокруг вертикальной оси. Тот, кто перекачивает шар без проскальзывания, имеет только три возможности (контроля): две — это выбор направления перекачивания, а третья — как его вращать. Тем не менее, имеется полная возможность переместить шар в любое желаемое положение. Читатель легко может убедиться в этом экспериментально, катая глобус (или разрисованный мячик) по полу. Однако существуют такие позиции глобуса, которые кажутся очень близкими, однако при которых требуется очень долгое перекачивание, чтобы перевести глобус из первой позиции во вторую. Например, положите глобус так, чтобы он касался пола Вашингтоном, и попробуйте перекатить его так, чтобы он вернулся в ту же точку пола, но при этом внизу был бы Нью-Йорк.

5.4.2. Соединимость допустимыми путями и теорема о параллелепипеде.

Скобки Ли. Напомним кратко понятие скобок Ли; подробное изложение и доказательства можно найти во многих книгах, см. например [BC]).

Каждому гладкому векторному полю V естественно сопоставляются два фундаментальных объекта: дифференцирование гладких функций $f \rightarrow Vf$ и порожденная полем V однопараметрическая группа диффеоморфизмов φ_V^t . Напомним, что для каждого t диффеоморфизм φ_V^t определен условием, что для каждой фиксированной точки p ,

$$\frac{d}{dt}\varphi_V^t(p) = V(\varphi_V^t(p)).$$

Иными словами, для любой точки p , путь $\gamma(t) = \varphi_V^t(p)$ является интегральной кривой поля V , проходящей через точку p при $t = 0$. (*Интегральной кривой* векторного поля V называется такая кривая γ , что $\frac{d}{dt}\gamma(t) = V(\gamma(t))$).

Ниже мы приводим три равносильных между собой определения скобки Ли $[V, W]$ векторных полей V, W .

Определение 5.4.3. Скобка Ли $[V, W]$ векторных полей определяется равенством $[V, W]f = VWf - WVf$ для любой гладкой функции f .

Разумеется, необходимо доказать, что существует единственное векторное поле $[V, W]$, которое действует на функции по этому правилу. Из этого определения немедленно следует, что скобка Ли линейна по каждому из аргументов и кососимметрична. Нетрудно проверить что для любой гладкой функции f выполняется равенство $[fV, W] = f[V, W] - (Wf)V$.

Следующее определение особенно важно для нашего геометрического контекста.

Определение 5.4.4. $[V, W](p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} (\varphi_V^{\sqrt{t}} \circ \varphi_W^{\sqrt{t}} \circ \varphi_V^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_W^{-\sqrt{t}}(p))$.

Чтобы лучше понять геометрический смысл этого определения, можно воспользоваться системой координат (чтобы иметь возможность “вычитать точки”) и переписать определение в следующей менее инвариантной форме:

$$[V, W](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\varphi_V^t \circ \varphi_W^t \circ \varphi_V^{-t} \circ \varphi_W^{-t}(p) - p).$$

Мы советуем читателю нарисовать “четырёхугольник”, образованный четырьмя отрезками интегральных кривых полей V и W , проходимых поочередно в обоих направлениях; первая вершина “четырёхугольника” — это точка p , из нее мы в течение времени t идем вдоль интегральной кривой поля $-W$, и так далее. Этот “четырёхугольник” — не замкнутый (если только мы не имеем дело с координатными векторными полями; в последнем случае мы получим настоящий замкнутый четырёхугольник), но “почти замкнутый”: когда мы, начав в p , пройдем вдоль всех его

стороны, мы окажемся в точке p' , “очень близкой” к p . Именно, смещение $p' - p$ будет величиной второго порядка относительно t ; деля на t^2 и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, мы получим скобку Ли.

Последнее определение подчеркивает аналогию между скобкой Ли и обычными производными:

Определение 5.4.5.

$$[V, W](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d\varphi_V^{-t} W(\varphi_V^t(p)) - W(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\varphi_V^{-t} W(\gamma(t)),$$

где γ — такая интегральная кривая поля v , что $\gamma(0) = p$.

Выражение, стоящее в правой части последней формулы, называется *производной Ли* векторного поля W относительно потока φ_V^t . Чтобы мотивировать это название, представьте, что вы проходите по интегральной кривой поля V через точку p и смотрите, насколько при этом изменяется поле W : вам хочется сравнить $W(p) = W(\gamma(0))$ и $W(\gamma(t))$. Эти векторы принадлежат различным касательным пространствам. Поэтому, чтобы сделать осмысленным операцию вычитания, отобразим $W(\gamma(t))$ в касательное пространство в точке p с помощью дифференциала $d\varphi_V^{-t}$ отображения φ_V^{-t} . Теперь мы можем из полученного вектора вычесть $W(p)$ обычным образом, поделить результат на t и перейти к пределу при $t \rightarrow 0$.

Теорема Рашевского–Чоу. В этом разделе мы приводим достаточные условия конечности метрики Карно–Каратеодори. Эти условия известны как теорема Рашевского–Чоу. Начнем с ее простейшего трехмерного случая.

Теорема 5.4.6. Пусть два гладких векторных поля V_1 и V_2 заданы в связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что векторные поля $V_1(p)$, $V_2(p)$ и их скобка Ли $[V_1, V_2](p)$ образуют в каждой точке $p \in \Omega$ базис пространства $T_p\Omega$. Тогда любые две точки $p, q \in \Omega$ можно соединить допустимым путем, то есть таким кусочно гладким путем γ , что его вектор скорости в каждой (гладкой) точке являются линейной комбинацией векторов V_1 и V_2 :

$$\gamma'(t) = v_1(t)V_1(\gamma(t)) + v_2(t)V_2(\gamma(t)).$$

Доказательство. Докажем, что для любой точки $p \in \Omega$ множество точек, которые можно соединить с p допустимыми кривыми, открыто.

Обозначим через φ_1^t, φ_2^t однопараметрические группы диффеоморфизмов, порожденные полями V_1, V_2 , то есть $\frac{d}{dt}\varphi_i^t(p) = V_i(\varphi_i^t(p))$, $i = 1, 2$. Напомним, что

$$[V_1, V_2](p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} (\varphi_1^{\sqrt{t}} \circ \varphi_2^{\sqrt{t}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_2^{-\sqrt{t}}(p)).$$

Теперь рассмотрим отображение $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega$, определенное равенством

$$(5.18) \quad F(u, v, \tau) = \varphi_1^u \circ \varphi_2^v \circ \varphi_1^{\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}}(p).$$

Это отображение по крайней мере C^1 -гладкое (проверьте!) и

$$\frac{\partial}{\partial u} F(0) = V_1(0), \quad \frac{\partial}{\partial v} F(0) = V_2(0), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} F(0) = [V_1, V_2](0),$$

где $0 = (0, 0, 0)$.

Следовательно, по теореме об обратной функции, образ при отображении F содержит некоторую окрестность точки p . Остается заметить, что точку $F(u, v, \tau)$ можно соединить с p допустимым путем $\gamma: [0, 6] \rightarrow \Omega$, состоящим из поочередных смещений вдоль полей V_1 и V_2 (то есть, построенным из отрезков интегральных кривых полей V_1 и V_2). Искомый путь γ имеет вид:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}t}(p), \quad t \in [0, 1], \\ \gamma(t) &= \varphi_1^{-\sqrt{|\tau|(t-1)}} \circ \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}}(p), \quad t \in [1, 2], \\ \gamma(t) &= \varphi_2^{\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|(t-2)}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}}(p), \quad t \in [2, 3], \\ \gamma(t) &= \varphi_1^{\sqrt{|\tau|(t-3)}} \circ \varphi_2^{\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}}(p), \quad t \in [3, 4], \\ \gamma(t) &= \varphi_2^{v(t-4)} \circ \varphi_1^{\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}}(p), \quad t \in [4, 5], \\ \gamma(t) &= \varphi_1^{u(t-5)} \circ \varphi_2^v \circ \varphi_1^{\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{|\tau|}} \circ \varphi_2^{-\text{sign}(\tau)\sqrt{|\tau|}}(p), \quad t \in [5, 6]. \end{aligned}$$

Следовательно, каждую точку образа при отображении F можно соединить с p ; так как образ при отображении F содержит некоторую окрестность точки p , его компоненты связности открыты.

Теперь, поскольку компоненты связности открыты и либо совпадают, либо не пересекаются, теорема немедленно следует из связности области Ω . \square

Упражнение 5.4.7. Покажите, что в условиях теоремы 5.4.6 любые две точки области Ω можно соединить *гладким* допустимым путем (а не только кусочно гладким).

В полной общности теорема Рашевского–Чоу выглядит следующим образом: пусть V_i , $i = 1, 2, \dots, k$, — гладкие векторные поля на связном гладком многообразии. Предположим, что для каждой точки p линейная оболочка полей V_i , их скобок Ли и последующих скобки Ли (после итераций, таких как $[[[V_1, V_2], V_3], V_4]$) совпадает с $T_p\Omega$. Тогда любые две точки многообразия Ω можно соединить допустимой кривой.

Теорему Рашевского–Чоу для распределений можно сформулировать в следующей элегантной форме: Рассмотрим связное гладкое многообразие Ω и гладкое распределение $H_p \in T_p\Omega$ линейных подпространств. Обозначим через \mathfrak{H} пространство векторных полей, содержащихся в этом распределении,

то есть $V \in \mathfrak{H}$, если $V(p) \in H_p$ для всех p . Предположим, что подалгебра Ли тех векторных полей на Ω , которые порождены пространством \mathfrak{H} , совпадает со всей алгеброй Ли векторных полей. Тогда любые две точки из Ω можно соединить допустимым путем.

Отметим, что если все векторные поля порождены итерациями скобок Ли векторных полей из \mathfrak{H} , то на самом деле достаточно сделать не более, чем $n = \dim(\Omega)$ итераций.

Упражнение 5.4.8. Проверьте, что в каждом из следующих примеров выполняются условия теоремы Рашевского–Чоу и, следовательно, соответствующая метрика конечна.

(1) Рассмотрите в \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (x, y) векторные поля $V_1 = (1, 0)$, $V_2 = (y, x)$. Можете ли вы изобразить форму малого Карно–Каратеодори шара с центром в $(0, 0)$?

(2) Рассмотрите \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (x, y, z) и пусть $V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (0, 1, x)$.

(3) Рассмотрите поля $V_1 = (0, 0, 1)$, $V_2 = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$ на трехмерном цилиндре $\mathbb{R}^2 \times S^1$ с координатами (x, y, α) (это распределение описывает допустимые движения велосипеда в рассмотренном выше примере)

(4) Пусть V_1 и V_2 — любые линейно независимые левоинвариантные поля на $SO(3)$.

Упражнение 5.4.9. Докажите общую теорему Рашевского–Чоу.

Теорема о параллелепипеде. Мы хотим теперь глубже понять инфинитезимальное строение неголономной метрики, порожденной распределением H_p в области Ω . Мы ограничимся случаем $\dim \Omega = 3$; в отличие от теоремы Рашевского–Чоу, доказательство которой в общем случае основывается на тех же идеях, что и в размерности три, хотя становится значительно более громоздким, требуя более сложных обозначений, даже для формулировки теоремы о параллелепипеде в старших размерностях требуется использовать более тонкую технику (привилегированные координаты). Однако уже трехмерная теорема о параллелепипеде позволяет понять геометрию того, что на самом деле происходит в окрестности точки.

Предварительно обозначим через P_r^c параллелепипед (“сплюснутый ящик”)

$$[-cr, cr] \times [-cr, cr] \times [-cr^2, cr^2] \subset \mathbb{R}^3.$$

Теорема 5.4.10 (Теорема о параллелепипеде).⁴ Пусть в окрестности нуля пространства \mathbb{R}^3 заданы два гладких векторных поля V_1 и V_2 . Обозначим через H_p распределение двумерных плоскостей, натянутых

⁴В англоязычной литературе эту теорему часто называют “Ball-Box Theorem”; поскольку этот термин труднопереводим, мы воспользовались названием, заимствованным из [VG].

на векторы V_1, V_2 , причем считаем, что $H_{(0,0,0)}$ совпадает с плоскостью $z = 0$. Предположим, что выполнены условия теоремы Рашевского–Чоу, и обозначим через d метрику Карно–Каратеодори, индуцированную распределением H . Наконец, пусть B_r — шар радиуса r с центром в нуле в метрике d .

Тогда существуют такие постоянные $0 < c < C$, что

$$P_r^c \subset B_r \subset P_r^C$$

для всех достаточно малых r .

Следовательно, в 2-направлении xy шар B_r выглядит примерно как шар евклидова пространства, а в направлении оси z он чрезвычайно тонкий (длина его пересечения с осью z имеет порядок r^2). Иначе говоря, этот шар выглядит примерно как евклидов шар, сплюснутый в r раз в направлении оси z . Отметим, что до сих пор неизвестно, гомеоморфен ли евклидову шару d -шар достаточного малого радиуса r !

Доказательство. Мы будем существенно использовать доказательство теоремы Рашевского–Чоу.

I. Сначала докажем существование такого c , что $P_r^c \subset B_r$ при всех достаточно малых r . Для этого достаточно показать, что каждую точку из P_r^c можно соединить с началом допустимым путем, длина которого не превосходит r . Заметим, что вектор $W = [V_1, V_2](0, 0, 0)$ не лежит в плоскости xy (поскольку выполнены условия теоремы Рашевского–Чоу).

Вспользуемся отображением F (полагая $p = (0, 0, 0)$), заданным равенствами (5.18), и построенной в процессе доказательства теоремы Рашевского–Чоу 5.4.6 допустимой кривой γ , соединяющей $(0, 0, 0)$ с $F(u, v, \tau)$. Оценим длину этой кривой. Выберем M так, чтобы $|V_1(p)| \leq M$, $|V_2(p)| \leq M$ для всех точек p , лежащих в некоторой окрестности начала. Тогда длина γ не превосходит $M|u| + M|v| + 4M\sqrt{|\tau|}$. Действительно, векторы скорости пути γ в интервалах $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ равны, соответственно, $-\sqrt{|\tau|}V_2$, $-\sqrt{|\tau|}V_1$, $\sqrt{|\tau|}V_1$ и $\sqrt{|\tau|}V_2$. Следовательно, их длины при $t \leq 4$ не превосходят $\sqrt{|\tau|}M$, так что длина пути $\gamma|_{[0,4]}$ не больше, чем $4M\sqrt{|\tau|}$. Аналогично, при $t \in [4, 5]$ и $t \in [5, 6]$, скорость γ равна, соответственно, vV_1 и uV_2 и, следовательно, длины этих отрезков кривой γ не превосходят $M|u| + M|v|$. Отсюда следует, что расстояние Карно–Каратеодори от начала до $F(u, v, \tau)$ не больше, чем $M(|u| + |v| + 4\sqrt{|\tau|})$. Таким образом, остается показать, что (существует такое положительное число c , что) P_r^c содержится в F -образе множества $\{(u, v, \tau) : |u| + |v| + 4\sqrt{|\tau|} \leq r/M\}$. В свою очередь, этот образ содержит образ прямоугольника

$$\{(u, v, \tau) : |u| \leq \delta r, |v| \leq \delta r, |\tau| \leq \delta^2 r^2\},$$

где $\delta = 1/6M$.

Остается только напомнить, что

$$\frac{\partial}{\partial u}F(0, 0, 0) = V_1(0, 0, 0), \quad \frac{\partial}{\partial v}F(0, 0, 0) = V_2(0, 0, 0), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}F(p) = W.$$

Так как векторы $V_1(0, 0, 0)$, $V_2(0, 0, 0)$, W линейно независимы, то (для достаточно малых r) найдется такая постоянная $c > 0$ что

$$P_r^c \subset F([- \delta r, \delta r] \times [- \delta r, \delta r] \times [- \delta^2 r^2, \delta^2 r^2]),$$

Этим часть I доказана.

II. Теперь нам надо доказать существование такого числа C , что $B_r \subset P_r^C$ при всех достаточно малых r . Иными словами, нам надо оценить расстояние Карно–Каратеодори снизу. Пусть γ — допустимый путь, соединяющий начало с точкой (u, v, τ) . Нам надо оценить снизу (евклидову) длину L пути γ . Достаточно показать, что

$$(5.19) \quad CL \geq \max\{|u|, |v|, \sqrt{|\tau|}\}.$$

Выберем (и зафиксируем) такую ненулевую дифференциальную 1-форму ω , определенную в окрестности начала, что $\omega = dz$ в начале и $\omega(V_1) = \omega(V_2) = 0$; то есть ядро формы ω в каждой точке p совпадает с $H_p = \text{span}(V_1(p), V_2(p))$. Пусть $\omega = dz + \nu$. Тогда, поскольку ν обращается в ноль в начале, $|\nu_p| \leq A|p|$ для некоторого A . Выберем такое M , что $\|d\omega\| \leq M$ в окрестность начала.

Заметим, что L очевидно больше евклидова расстояния от начала до (u, v, τ) . Следовательно, $2L \geq (|u| + |v|)$. Таким образом, для C большего, например, чем $100\sqrt{1+A}$, неравенство (5.19) автоматически выполняется для всех тех точек (u, v, τ) , для которых $\sqrt{|\tau|} \geq 2\sqrt{1+A}(|u| + |v|)$. Выберем $C > 100(1+A)$. Следовательно, теперь достаточно справиться с точками, для которых $\sqrt{|\tau|} \geq 2\sqrt{1+A}(|u| + |v|)$, то есть для которых $|\tau| \geq 4(1+A)(|u| + |v|)^2 \geq 2(1+A)(u^2 + v^2)$.

Построим замкнутую форму α . Для этого дополним γ до замкнутой кривой, соединив (u, v, τ) отрезком σ с началом. Тогда

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\sigma} \omega.$$

Заметим, что $\int_{\gamma} \omega = 0$, так как γ' является линейной комбинацией полей V_1 и V_2 и, следовательно, $\omega(\gamma') = 0$. Таким образом

$$\left| \int_{\alpha} \omega \right| = \left| \int_{\sigma} \omega \right| = \left| \int_{\sigma} (dz + \nu) \right| = \left| -\tau + \int_{\sigma} \nu \right| \geq |\tau| - A(u^2 + v^2 + \tau^2).$$

Напомним, что нас теперь интересуют только точки, для которых $|\tau| \geq 2(1+A)(u^2+v^2)$. Однако для таких точек

$$(5.20) \quad \left| \int_{\alpha} \omega \right| \geq \frac{1}{2}|\tau| - A\tau^2 \geq \frac{1}{3}|\tau|$$

для достаточно малых $|\tau|$.

Теперь воспользуемся изопериметрическим неравенством в \mathbb{R}^3 . Действительно, длина цикла α не превышает $2L$ и, следовательно, его можно представить как границу такой двумерной цепи β , площадь которой не больше, чем $(1/\pi)L^2$. (Постоянная $1/\pi$ — точная; доказательство в этом случае нетривиально; однако для наших целей вполне достаточно неточной постоянной, скажем 10; доказательство такого грубого неравенства представляет собой уже простое упражнение.) Так что выберем β так, чтобы $\partial\beta = \alpha$ и $\|\beta\| \leq 10L^2$. По теореме Стокса

$$\left| \int_{\alpha} \omega \right| = \left| \int_{\beta} d\omega \right| \leq M\|\beta\| \leq 10ML^2.$$

Отсюда и из (5.20) следует, что $L^2 \geq |\tau|/(30M)$. Напомним, что мы имеем дело с точками, для которых $\sqrt{|\tau|} \geq 2\sqrt{1+A}(|u|+|v|)$, и, в частности, $\sqrt{|\tau|} \geq \max(|u|, |v|)$. Таким образом,

$$\sqrt{30M}L \geq \sqrt{|\tau|} = \max(|u|, |v|, \sqrt{|\tau|}).$$

Этой теорема доказана (с постоянной $C = \max(\sqrt{30M}, 100(1+A))$). \square

Упражнение 5.4.11. Найдите хаусдорфову размерность (конечной) неголономной метрики, индуцированной двумерным распределением в \mathbb{R}^3 .

Ответ: 4.

5.4.3. Модельные примеры.

Базовый пример. Наше введение в геометрию пространств Карно–Каратеодори мы завершим важным модельным примером. Этот пример позволит нам не только обратить внимание на многие важные свойства пространств Карно–Каратеодори, но и продемонстрировать важные связи теории этих пространств с другими геометрическими понятиями.

Интересующий нас пример задается следующим распределением H_p двумерных плоскостей в \mathbb{R}^3 : $H_{(x,y,x)} = \text{span}\{V(x,y,z), W(x,y,z)\}$, где $V(x,y,z) = (1,0,0)$, $W(x,y,z) = (0,1,x)$. Это распределение можно рассматривать как линейризацию распределения, описывающего возможные движения велосипеда. Скобки Ли $[V, W]$ векторных полей V и W тождественно равны $(0,0,1)$. Действительно,

$$Vf = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Wf = \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad VWf - WVf = \frac{\partial f}{\partial z} = (0,0,1)f.$$

Следовательно, выполнены условия теоремы Рашевского–Чоу. Тем самым при любом выборе (гладкого конечного) функционала длины на классе гладких кривых в \mathbb{R}^3 распределение H_p индуцирует конечную метрику Карно–Каратеодори. Мы могли бы использовать обычную евклидову длину кривых, но нам удобнее определить длины допустимых кривых $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ формулой

$$(5.21) \quad L(\gamma) = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Заметим, что наши допустимые кривые нигде не могут стать вертикальными, и следовательно, подынтегральное выражение не может обращаться в ноль. Ниже мы рассмотрим этот пример в различных обличьях. Это позволит глубже понять геометрию Карно–Каратеодори.

Связности на расслоениях. Будем рассматривать \mathbb{R}^3 как произведение (расслоение) $B \times F$, базой которого $B = \mathbb{R}^2$ служит плоскость xy , а слоем $F = \mathbb{R}$ — ось z -ов. Обозначим через π естественную проекцию на базу, то есть на сомножитель B . Заметим, что мы выбрали наш функционал длины таким образом, что проектирование сохраняет длины допустимых кривых; в этом — одна из причин, по которым мы предпочли функционал длины (5.21) обычной евклидовой длине.

Результаты этого пункта остаются справедливыми (после надлежащей модификации) и для общих распределений на расслоенных пространствах; по существу мы используем только инвариантность распределения относительно группы параллельных переносов (вдоль оси z -ов) и тот факт, что сужение дифференциала проектирования на каждую плоскость нашего распределения биективно. То, что мы ограничиваемся расслоением с одномерными слоями, позволяет не пользоваться векторнозначными формами, но, за исключением этого, общий случай не был бы существенно более трудным.

Наиболее важное свойство нашего распределения состоит в том, что каждую гладкую кривую из базы можно поднять в \mathbb{R}^3 в классе допустимых путей. Подъем всей кривой определяется единственным образом, если мы фиксируем одну точку и ее подъем. Действительно, сужение на H_p дифференциала $d_p\pi$ проектирования на базу является линейным изоморфизмом. Следовательно, для векторного поля X , касательного к базе B , найдется единственный подъем, то есть векторное поле \tilde{X} , лежащее в распределении H и такое, что $d\pi(\tilde{X}) = X$. Отсюда легко следует, что для любого гладкого пути $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow B$ и такой точки p , что $\pi(p) = \gamma(0)$, найдется единственный *подъем* пути γ , то есть такая допустимая кривая $\tilde{\gamma}$, что $\tilde{\gamma}(0) = p$ и $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Разумеется, все допустимые кривые могут быть получены этим способом. Таким образом, каждая допустимая кривая, соединяющая $p, q \in \mathbb{R}^3$, может

быть представлена ее проекцией, соединяющей проекции p_0, q_0 концов кривой на базу. Однако, если соединить точки p_0 и q_0 некоторым путем $\gamma: [0, 1] \rightarrow B$, то его подъем $\tilde{\gamma}$ с началом $\tilde{\gamma}(0) = p$ хотя и будет связывать p с некоторой точкой в слое, содержащем q : $\tilde{\gamma}(1) \in q_0 \times F$, нет никаких оснований ожидать, что эта точка совпадет с q . Это обстоятельство подсказывает следующее простое, но полезное определение.

Группа голономии. Пусть начало и конец пути $\gamma: [0, 1] \rightarrow B$ проектируются в точки $\pi(\gamma(0)) = p$ и $\pi(\gamma(1)) = q$. Определим для такого пути отображение $G_\gamma: F \times \{p\} \rightarrow F \times \{q\}$ следующим образом: если $\tilde{\gamma}$ — подъем пути γ , начинающийся в $\tilde{\gamma}(0) = a$, и $\tilde{\gamma}(1) = b$, то полагаем $G_\gamma(a) = b$.

Упражнение 5.4.12. Покажите, что отображение G_γ является диффеоморфизмом.

Упражнение 5.4.13. Покажите, что для фиксированной точки $p \in B$ множество G_γ образов петли γ , где $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, образует группу диффеоморфизм слоя $F = F \times \{p\}$, причем умножению путей соответствует произведение преобразований. Полученная группа называется группой голономии в точке p .

Напомним, что \mathbb{R} действует на \mathbb{R}^3 параллельными переносами в направлении оси z : $g_a(x, y, z) = (x, y, z + a)$. Распределение H и подъем \tilde{X} оба инвариантны относительно этого действия.

Упражнение 5.4.14. Убедитесь, что в случае нашего распределения каждое преобразование G_γ является параллельным переносом.

Группы голономии в разных точках p и q изоморфны, и каждый путь γ из p в q порождает такой изоморфизм. Действительно, каждой петле σ с вершиной p можно сопоставить петлю с вершиной q , проходя сначала путь γ , затем петлю σ , и наконец, снова путь γ , но в обратном направлении: $G_\sigma \rightarrow G_\gamma^{-1} \circ G_\sigma \circ G_\gamma$. На самом деле эта конструкция представляет собой сопряжение между действиями групп голономии в различных точках.

Теперь вопрос о нахождении допустимого пути, соединяющего точки p_1 и q_1 , сводится к нахождению такого пути γ , соединяющего проекции $p = \pi(p_1)$ и $q = \pi(q_1)$ этих точек, что $G_\gamma(p_1) = q_1$. В частности, любые две точки можно соединить таким путем, если группа голономии в некоторой (следовательно, и в любой) точке действует транзитивно (проверьте это утверждение!).

Форма кривизны. Следующая конструкция играет решающую роль в понимании смысла групп голономии. Любой вектор $X \in T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$ можно представить единственным образом в форме $X_H + X_V$, где $X_H \in$

$H_{(x,y,x)}$ и $\text{pr}(X_V) = 0$. векторы X_H и X_V называются горизонтальной и вертикальной составляющими вектора X ; вектор X_V касается проходящей через точку (x, y, z) копии слоя F (вертикальной прямой). Разумеется, кривая является допустимой тогда и только тогда, когда вертикальные составляющие ее векторов скорости нулевые во всех точках.

Теперь рассмотрим векторные поля X, Y в базе и их подъемы \tilde{X}, \tilde{Y} . Обозначим через $\omega(X, Y)$ вертикальную компоненту скобок Ли $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Векторное поле $\omega(X, Y)$ является касательным к слоям; так как в нашем случае все слои отождествлены с \mathbb{R} , то поле $\omega(X, Y)$ можно рассматривать как скалярную функцию.

Упражнение 5.4.15. Докажите, что $\omega(X, Y)(p)$ зависит *только* от значений полей $X(\pi)$ и $Y(\pi)$ в самой точке p . Покажите, что ω является 2-формой на базе.

Подсказка. Обратите внимание, что вертикальная компонента поля X — это просто $\langle X, Z \rangle$, где $Z = (0, 0, 1)$.

Когонибудь может удивить последнее упражнение, так как определение формы ω базируется на скобках Ли, в которые входят производные; ситуация здесь аналогична ситуации с тензором кривизны (см. главу 6, 6.3.3): там определение также использует векторные поля, но потом оказывается, что на самом деле тензор кривизны зависит только от их значений в рассматриваемой точке. Отметим, что на самом деле тензор кривизны является частным случаем рассматриваемой здесь конструкции. Следующее важное упражнение проясняет геометрический смысл формы кривизны ω .

Упражнение 5.4.16. Пусть γ — петля с вершиной p , то есть $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Предположим, что γ ограничивает односвязную область Γ , ориентированную согласованно с направлением обхода петли γ . Тогда преобразование G_γ имеет вид $z \rightarrow z + A$, где

$$A = \int_{\Gamma} \omega.$$

Подсказка. Имеется прямолинейное (“ручной работы”) доказательство, которое очень хорошо проясняет геометрический смысл конструкции. Рассмотрим два коммутирующих векторных поля X и Y . Сначала докажем требуемое утверждение для инфинитезимального прямоугольника, образованного интегральными кривыми полей X и Y . Это почти непосредственно следует из определения скобки Ли. А теперь заменим проекцию γ на путь, состоящий из кусочков интегральных кривых полей X и Y .

Другое доказательство, которое много короче, но не столь наглядно, можно получить путем рассуждений, аналогичных тем, что будут использованы ниже, в разделе “Еще один аспект: контактные структуры”.

Кратчайшие и изопериметрическая задача. Рассмотрим еще раз наше модельное распределение $V(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $W(x, y, z) = (0, 1, x)$. Чтобы применить ω к векторным полям $X = (1, 0)$, $Y = (0, 1)$, заметим, что они поднимаются как раз в поля V и W ; скобка Ли $[V, W] = (0, 0, 1)$ была подсчитана в начале раздела 5.4.3. Следовательно, $\omega(X, Y) = 1$, так что в этом случае ω — просто стандартная форма площади. Это позволяет нам находить кратчайшие такой неголономной метрики. Например, рассмотрим кратчайшую между $p = (0, 0, 0)$ и $q = (0, 0, z)$. Проекция любой кривой, соединяющей эти точки, является петлей с вершиной $(0, 0)$, ограничивающей область с ориентированной площадью z , а длина этой проекции находится по формуле (5.21). Следовательно, кратчайшая между этими точками является подъемом кратчайшей петли, ограничивающей площадь z . Таким образом, все сводится к изопериметрической задаче. Хорошо известно, что на плоскости кратчайшей среди всех кривых, ограничивающих данную площадь, является окружность. Следовательно, кратчайшие, соединяющие p и q , должны быть подъемами окружностей радиуса $\pi^{-1}\sqrt{z}$, проходящими через начало. Отметим, что здесь, в отличие от римановой геометрии, для каждого значения z существует бесконечно много кратчайших, соединяющих p с q .

Упражнение 5.4.17. Покажите, что каждая кратчайшая этой неголономной римановой структуры является подъемом дуги окружности. Обратите внимание, что кратчайшие ветвятся: имеется бесконечно много кратчайших, выходящих из каждой точки в данном (допустимом) направлении.

Упражнение 5.4.18. Воспользуйтесь определением кратчайших, чтобы дать явную формулу для дистанционной функции нашей метрики, и на основе этого проверьте теорему о параллелепипеде в рассматриваемом случае.

Еще один аспект: контактные структуры. Наше распределение H_p можно рассматривать и с позиции контактных структур: оно является распределением ядер контактной 1-формы $\omega_1 = xdy - dz$.

Воспользуемся доводами, аналогичные тем, которые были использованы для получения нижней границы в теореме о параллелепипеде. В качестве модельного случая рассмотрим опять допустимый путь γ , соединяющий точки $p = (0, 0, 0)$ и $q = (0, 0, z)$. Построим 1-цикл α , дополнив γ отрезком qp . Обозначим через β (гладкую) 2-цепь с границей α . По теореме Стокса

$$\int_{\alpha} \omega_1 = \int_{\beta} d\omega_1.$$

Внешний дифференциал формы ω_1 равен $d\omega_1 = \omega_2 = dx \wedge dy$, то есть это — ориентированная площадь проекции на плоскость xy . Следовательно,

$\int_{\alpha} \omega_1$ представляет собой площадь, ограниченную проекцией пути γ (при этом отрезок qp проектируется в точку). С другой стороны,

$$\int_{\alpha} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{qp} \omega_1 = 0 + z.$$

Следовательно, мы приходим к тому же выводу, как в конце предыдущего пункта: кратчайшая, соединяющая точки p и q , проектируется в кривую, ограничивающую область площади z .

Группа Гейзенберга. Введем на \mathbb{R}^3 следующую групповую структуру:

$$(x, y, z) \cdot (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1 + xy_1).$$

Таким образом, это — “почти” обычное сложение, но с “закручивающей добавкой” xy_1 в z -ой компоненте. Заметим, что распределение H левоинвариантно по отношению к этой групповой структуре. Действительно, левый сдвиг $L_{(x_0, y_0, z_0)}$, по определению, есть умножение на (x_0, y_0, z_0) , то есть

$$L_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) = (x + x_0, y + y_0, z + z_0 + x_0y).$$

Этот сдвиг переводит $(0, 0, 0)$ в (x_0, y_0, z_0) . Его дифференциал $dL_{(x_0, y_0, z_0)}$ действует по правилу $dL_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) = (x, y, z + x_0y)$. Таким образом,

$$dL_{(x_0, y_0, z_0)}(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = V(x_0, y_0, z_0),$$

$$dL_{(x_0, y_0, z_0)}(0, 1, 0) = (0, 1, x_0) = W(x_0, y_0, z_0).$$

Кроме того, функционал длины (5.21) также левоинвариантен (проверьте это!) Таким образом, распределение H_p определяет левоинвариантную метрику Карно–Каратеодори d_H на группе Гейзенберга.

Интересно сравнить эту метрику с такой левоинвариантной римановой метрикой d , квадратичная форма которой в начале $(0, 0, 0)$ совпадает со стандартной координатной евклидовой структурой.

Упражнение 5.4.19. Покажите, что d и d_H имеют одинаковую асимптотику на бесконечности:

$$\lim_{d(p, q) \rightarrow \infty} \frac{d(p, q)}{d_H(p, q)} = 1.$$

(Для сведения: даже разность d и d_H на самом деле равномерно ограничена; то есть существует такая постоянная C , что $|d(p, q) - d_H(p, q)| \leq C$ при всех p, q).

Поскольку у нас есть точное описание распределения d_H , это дает нам ценную информацию о крупномасштабном строении левоинвариантных метрик на группе Гейзенберга. В частности, расстояние $d((0, 0, 0), (0, 0, z))$ приближенно равно $\pi^{-1} \sqrt{|z|}$. Мы видим, что ось z -ов совсем не напоминает геодезическую в метрике d — расстояние между далеко отстоящими друг

от друга точками оси z -ов много меньше, чем длина отрезка оси z между ними.

Заметим еще, что метрика d_H обладает, по сравнению с d , дополнительной симметрией. Действительно, рассмотрим преобразование $A_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (где t — положительный параметр), действующее по правилу $A_t(x, y, z) = (tx, ty, t^2z)$. Следующее упражнение показывает, что A_t является гомотетией по отношению к метрике d_H , то есть $d_H(A_t(p), A_t(q)) = td_H(p, q)$.

Упражнение 5.4.20. Проверьте, что распределение H_p инвариантно по отношению к A_t и что преобразование A_t умножает длины (5.21) кривых на t .

Отсюда следует, что (метрический) касательный конус пространства (\mathbb{R}^3, d_H) изометричен как самому пространству \mathbb{R}^3, d_H , так и его асимптотическому конусу (конусу на бесконечности). Отсюда и из упражнения 5.4.19 следует, что асимптотический конус группы Гейзенберга с левоинвариантной метрикой d также изометричен (\mathbb{R}^3, d_H) .

Информация: В точках общего положения касательный конус пространства с метрикой Карно–Каратеодори изометричен нильпотентной группе с левоинвариантной метрикой Карно–Каратеодори; в “особых” точках он изометричен однородному пространству такой группы.

5.5. Римановы и финслеровы объемы

В этом параграфе мы изучим понятие объема риманова многообразия более детально и формально. Для двумерной области с римановой метрикой площадь была определена формулой (5.5). Причины, по которым такое определение естественно, сохраняют силу в любой размерности. Здесь мы превратим эту мотивацию в точное утверждение, показывающее, что объем *должен* выражаться аналогичным интегралом при единственном условии, что он монотонно зависит от метрики. Другими словами, существует лишь одно “разумное” понятие риманова объема: независимо от того, как строить определение, результат будет один и тот же. В случае финслеровых метрик это уже не так и, как результат, имеется много различных понятий финслерова объема. Этот аспект обсуждается в пункте 5.5.3.

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что размерность $n \geq 1$; все векторные пространства и многообразия считаются n -мерными.

5.5.1. Риманов объем и якобианы.

Определение 5.5.1. *Риманов объем* n -мерного риманова многообразия — это n -мерная мера Хаусдорфа, порожденная римановой метрикой (см. параграф 1.7).

Будем обозначать риманов объем через Vol . В необходимых случаях, чтобы избежать неясности, будем указывать соответствующее многообразие или риманову структуру как индекс, например, Vol_M . На самом деле риманов объем полностью определяется всего двумя свойствами:

- (1) Риманов объем в \mathbb{R}^n — это обычный евклидов объем (мера Лебега).
- (2) Объем монотонно зависит от метрики. Иными словами, если M и N — римановы многообразия и $f : M \rightarrow N$ — не увеличивающий расстояния диффеоморфизм, то $\text{Vol}_N(f(\Omega)) \leq \text{Vol}_M(\Omega)$ для любого измеримого множества $\Omega \subset M$.

Мы покажем, что риманов объем определяется этими свойствами единственным образом. Предыдущее же определение было дано для того, чтобы убедиться, что объем с указанными свойствами действительно существует.

Риманов объем, по определению, является борелевской мерой на римановом многообразии. Поэтому мы можем рассматривать интегралы Лебега по объему: если M — риманово многообразие и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая (или, более общо, интегрируемая) функция на измеримом множестве $\Omega \subset M$, то корректно определен интеграл $\int_{\Omega} f d\text{Vol}_M$. Нам понадобятся только такие элементарные и естественные свойства интегрирования, как линейность и монотонность относительно интегрируемой функции. По поводу общей теории меры и интегрирования см., например, главу 2 книги [Fe].

Якобиан. Предположим, что отображение $f : M \rightarrow N$, где M и N — римановы многообразия одной и той же размерности n , дифференцируемо в точке $x \in M$. Дифференциал $d_x f$ является линейным отображением из $T_x M$ в $T_{f(x)} N$. Римановы структуры пространств M и N определяют евклидовы скалярные произведения в $T_x M$ и $T_{f(x)} N$. Тем самым, эти пространства становятся изометричными \mathbb{R}^n . В частности, $T_x M$ и $T_{f(x)} N$ оказываются естественным образом снабженными n -мерными мерами Лебега (или Хаусдорфа). Так как каждое линейное отображение из \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n умножает все объемы на постоянную, зависящую только от отображения (см. упражнение 1.7.6), то, в частности, это верно для линейного отображения $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$. Соответствующая постоянная называется *якобианом* отображения $d_x f$.

Определение 5.5.2. Пусть M , N , f и x имеют тот же смысл, что и выше. *Якобианом* отображения f в точке x называется такое вещественное число $\text{Jac } f(x)$, что для всех измеримых подмножеств $X \subset T_x M$ справедливо равенство

$$\mu_n(d_x f(X)) = \text{Jac } f(x) \cdot \mu_n(X).$$

Если в $T_x M$ и $T_{f(x)} N$ выбраны ортонормированные базисы и A — матрица отображения $d_x f$ в этих базисах, то $\text{Jac } f(x) = |\det A|$ (см. упражнение 1.7.6).

Замечание 5.5.3. В силу нашего определения якобиан всегда неотрицателен. Существует несколько иное определение якобиана, при котором якобиан равен определителю соответствующей матрицы (а не его абсолютной величине) и тем самым может быть *знакопеременной* величиной. Это удобно в случае отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , но не для общих (возможно неориентируемых) римановых многообразий. Мы нигде не будем использовать снабженные знаком якобианы.

Якобианы показывают, как изменяется объем при отображениях. В анализе соответствующая формула называется формулой замены переменных.

Теорема 5.5.4 (формула замены переменных). Пусть M и N — римановы многообразия, $f : M \rightarrow N$ — диффеоморфизм, а $\Omega \subset M$ измеримое множество. Тогда

$$\text{Vol}(f(\Omega)) = \int_{\Omega} \text{Jac } f \, d\text{Vol}_M.$$

В частности, $\text{Vol}(N) = \int_M \text{Jac } f$.

Доказательство. Доказательство основывается на следующем локальном утверждении. Для фиксированной точки $x \in M$ и семейства измеримых множеств X , содержащих точку x и стягивающихся к ней, мы имеем:

$$(5.22) \quad \frac{\text{Vol}_N(f(X))}{\text{Vol}_M(X)} \rightarrow \text{Jac } f(x) \quad \text{as } \text{diam}(X) \rightarrow 0.$$

Для доказательства (5.22) зафиксируем малую окрестность U точки x и такой диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow T_x M$ окрестности U на окрестность нуля в $T_x M$, что $\varphi(x) = 0$ и его дифференциал $d_x \varphi : T_x M \rightarrow T_x M$ является тождественным отображением. (В качестве φ можно взять, например, обратное к \exp_x отображение.) Такое отображение задает локальные координаты в U . Теперь сравним риманову структуру многообразия M в этих координатах с евклидовой структурой в $T_x M$. В нуле они совпадают; следовательно, в окрестности нуля соответствующие метрики равны с точностью до первого порядка. Это равносильно тому, что отображения φ и φ^{-1} , суженные на достаточно малые окрестности нуля и точки x , удовлетворяют условию Липшица с константой, сколь угодно близкой к 1. Так как объем монотонен относительно метрики, то отсюда следует

$$\frac{\text{Vol}_{T_x M}(\varphi(X))}{\text{Vol}_M(X)} \rightarrow 1$$

при $\text{diam}(X) \rightarrow 0$. Пусть теперь $y = f(x)$, $V = f(U)$, а отображение $\psi : V \rightarrow T_y N$ определено формулой $\psi \circ f|_U = d_x f \circ \varphi|_U$. Тогда $\psi(y) = 0$, причем $d_y \psi : T_y N \rightarrow T_y N$ — тождественное отображение. Аналогично предыдущему, мы получаем

$$\frac{\text{Vol}_{T_y N}(\psi(f(X)))}{\text{Vol}_N(f(X))} \rightarrow 1$$

при $\text{diam}(X) \rightarrow 0$. Так как $\psi(f(X)) = d_x f(\varphi(X))$, то требуемая формула (5.22) теперь следует из равенства

$$\frac{\text{Vol}_{T_y N}(d_x f(\varphi(X)))}{\text{Vol}_{T_x M}(\varphi(X))} = \text{Jac } f(x),$$

которое есть ничто иное, как определение дифференциала.

Способ, как теперь можно вывести теорему из (5.22), зависит от степени подготовленности читателя. Наиболее элементарный способ — разбить X на малые подмножества $\{X_i\}$, выбрать точки $x_i \in X_i$ и сравнить объем $\text{Vol}_N(f(X)) = \sum \text{Vol}_N(f(X_i))$ с интегральной суммой $\sum \text{Jac } f(x_i) \text{Vol}_M(X_i)$. Детали мы оставляем читателям в качестве упражнения. \square

В качестве следствия теоремы 5.5.4 мы получим координатную формулу для риманова объема. Эту формулу часто берут в качестве определения объема.

Теорема 5.5.5. Пусть M — n -мерное риманово многообразие, U — открытое подмножество в \mathbb{R}^n , а $\varphi : U \rightarrow M$ — координатная система. Каждой точке $x \in U$ сопоставим матрицу $(g_{ij}(x))$, составленную из скалярных произведений координатных касательных векторов в точке $\varphi(x)$, т.е. $g_{ij}(x) = \langle d_x \varphi(e_i), d_x \varphi(e_j) \rangle_M$, где $\{e_i\}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^n . Тогда для любого измеримого множества $\Omega \subset U$ имеем

$$\text{Vol}_M(\varphi(\Omega)) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(g_{ij})} \, dm_n.$$

Доказательство. Рассмотрим U как риманово многообразие со стандартным евклидовым скалярным произведением. По теореме 5.5.4, $\text{Vol}_M(\varphi(U)) = \int_U \text{Jac } \varphi$. Остается доказать, что $\text{Jac } \varphi(x) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}$ для любой точки $x \in U$. Пусть (v_i) — ортонормированный базис в $T_{\varphi(x)}M$, а A — матрица дифференциала $d_x \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\varphi(x)}M$ в этом базисе. Тогда $\text{Jac } \varphi(x) = |\det A|$. С другой стороны, $(g_{ij}(x)) = A^T A$, где A^T — транспонированная матрица. Следовательно, $\det(g_{ij}(x)) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2$; так что $|\det A| = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}$. Теорема доказана. \square

Заметим, что теорема 5.5.5 определяет объем каждого измеримого подмножества риманова многообразия единственным образом. С другой стороны, в ее доказательстве (включая формулу замены переменных в интеграле) использовались только те два основных свойства, которые были упомянуты после определения 5.5.1. Следовательно, эти два свойства определяют объем единственным образом. Тем самым, нами получена следующая

Теорема 5.5.6. *Обозначим через V функцию, сопоставляющую каждому риманову многообразию M заданную на нем борелевскую меру. Предположим, что функция V монотонно зависит от метрики и сопоставляет евклидову пространству \mathbb{R}^n его стандартный евклидов объем.*

Тогда V совпадает с римановым объемом.

5.5.2. Объем липшицевых отображений. Хотя мы доказали формулу замены переменных только в случае диффеоморфизмов, она остается справедливой и для произвольных липшицевых гомеоморфизмов. Более того, несложная модификация делает ее справедливой и для липшицевых отображений, не являющихся биективными. Ниже мы приводим без доказательства соответствующую теорему.

Теорема 5.5.7 (Теорема Радемахера; см. теорему 3.1.6 в [Fe]). *Каждое липшицево отображение дифференцируемо почти всюду. То есть, если M и N — римановы многообразия, а $f : M \rightarrow N$ — липшицево отображение, то дифференциал $d_x f$ существует для всех, кроме, быть может, множества нулевой меры, $x \in M$.*

Заметим, что в этой теореме слово “римановы” может быть заменено словом “гладкие”, т.к. классы липшицевых отображений и множеств нулевой меры не зависят от римановой структуры (оба понятия могут быть определены в терминах системы координат).

Из теоремы Радемахера следует, что якобиан $\text{Jac } f(x)$ липшицева отображения $f : M \rightarrow N$ определен почти во всех точках $x \in M$. Следовательно, определен интеграл Лебега $\int_M \text{Jac } f$.

Этот интеграл называется объемом (или площадью) отображения f . Если f инъективно, этот объем равен объему множества $f(M) \subset N$. Если f покрывает некоторую часть N несколько раз, следует учесть кратность покрытия:

Теорема 5.5.8 ([Fe], теорема 3.2.3). *Если M и N — n -мерные римановы многообразия, а $f : M \rightarrow N$ — липшицево отображение, то*

$$(5.23) \quad \int_M \text{Jac } f(x) d\text{Vol}_M(x) = \int_N \#(f^{-1}(y)) d\text{Vol}_N(y),$$

где через $\#$ обозначено число точек множества.

Интеграл в правой части — это, конечно, интеграл Лебега от (всегда измеримой) функции $y \mapsto \#(f^{-1}(y))$.

Так как значения этой функции либо целые числа, либо бесконечность, то интеграл можно переписать в виде

$$\int_N \#(f^{-1}(y)) d\text{Vol}_M(y) = \sum_{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} k \cdot \text{Vol}_N(\{y \in N : \#(f^{-1}(y)) = k\}),$$

где выражение $\infty \cdot 0$, если оно появляется, считается равным 0.

Одним из наиболее распространенных применений этой теоремы является оценка объема образа сверху.

Следствие 5.5.9. *Если M и N — n -мерные римановы многообразия, а $f : M \rightarrow N$ — липшицево отображение, то*

$$\text{Vol}_N(f(M)) \leq \int_M \text{Jac } f(x) d\text{Vol}_M(x).$$

В частности, если $\text{Jac } f \leq 1$ почти всюду, то $\text{Vol}_N(f(M)) \leq \text{Vol}(M)$.

Доказательство. Если $y \in f(M)$, то $\#(f^{-1}(y)) \geq 1$. Подстановка этого в (5.23) завершает доказательство. \square

Следующее утверждение будет использовано в параграфе 5.6.

Предложение 5.5.10. *Пусть M — n -мерное риманово многообразие, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — липшицево отображение, а f_i ($1 \leq i \leq n$) — его координатное представление. Тогда, там, где f дифференцируемо, $\text{Jac } f \leq \prod_{i=1}^n \text{dil}(f_i)$.*

Доказательство. Предположим, что f дифференцируемо в точке $x \in M$. Нетрудно видеть, что $|d_x f_i(v)| \leq \text{dil}(f_i) \cdot |v|$ для всех $v \in T_x M$, т.е. $\|d_x f_i\| \leq \text{dil}(f_i)$. Обозначим через $A = (a_{ij})$ матрицу дифференциала $d_x f$ относительно ортонормированного базиса в $T_x M$ и стандартного базиса в \mathbb{R}^n ; i -ая строка этой матрицы составлена из чисел $d_x f_i(v_j)$, $1 \leq j \leq n$. Будем рассматривать эту строку как вектор $a_i \in \mathbb{R}^n$; тогда $|a_i| = \|d_x f_i\| \leq \text{dil}(f_i)$. Так как $|\det A|$ равен евклидову объему параллелепипеда, натянутого на вектора a_i , мы имеем $\text{Jac } f(x) = |\det A| \leq \prod_{i=1}^n |a_i| \leq \prod_{i=1}^n \text{dil}(f_i)$. \square

5.5.3. Финслеровы объемы. Из теоремы 5.5.6 следует, что в случае риманова многообразия имеется всего одно разумное понятие объема. В случае финслеровых метрик это уже не так: можно определить финслеров объем разными способами и получить существенно различные результаты. В этом разделе приведены некоторые примеры такого рода.

С этого момента предположим, что мы выбрали и зафиксировали некоторый функционал финслерова объема. То есть, каждое финслеро

многообразию снабжено борелевской мерой (объемом), который мы обозначим через Vol . Мы предполагаем, что Vol обладает свойствами, перечисленными после определения 5.5.1, именно, согласованностью с евклидовым объемом и монотонностью по отношению к метрике. Отметим, что из монотонности следует, что (гладкие) изометрии не меняют объем.

Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в \mathbb{R}^n . Нормированное пространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, являясь частным случаем финслерова многообразия, обладает финслеровым объемом $\text{Vol}_{\|\cdot\|}$. Обозначим через $|\cdot|$ евклидову норму. Так как $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ билипшицево эквивалентны (теорема 1.4.11), то существуют такие положительные постоянные c и C , что $c|x| \leq \|x\| \leq C|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Из монотонности объема следует, что $c^n m_n \leq \text{Vol}_{\|\cdot\|} \leq C^n m_n$. (Для доказательства рассмотрите тождественное отображение сначала как отображение из $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ в $(\mathbb{R}^n, c|\cdot|)$, а потом — как отображение из $(\mathbb{R}^n, C|\cdot|)$ в $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.) В частности, $\|\cdot\|$ -объем единичного куба конечен и положителен. Обозначим $\text{Vol}_{\|\cdot\|}([0, 1]^n)$ через $\nu(\|\cdot\|)$.

Объем $\text{Vol}_{\|\cdot\|}$ инвариантен относительно параллельных переносов, поскольку они являются изометриями пространства $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Отсюда, по теореме Лебега (1.7.5), следует, что мера $\frac{\text{Vol}_{\|\cdot\|}}{\nu(\|\cdot\|)}$ совпадает с мерой Лебега m_n . Таким образом, для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$.

$$\text{Vol}_{\|\cdot\|}(X) = \nu(\|\cdot\|) m_n(X).$$

Напомним, что финслерова структура Φ в области $U \subset \mathbb{R}^n$ — это непрерывная функция на TU , сужение которой на каждое касательное пространство $T_x U$ (где $x \in U$) является нормой на векторном пространстве. Обозначим это сужение через Φ_x .

Предложение 5.5.11. *Для финслеровой структуры Φ в области $U \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство*

$$\text{Vol}_{\Phi}(\Omega) = \int_{\Omega} \nu(\Phi_x) dm_n(x),$$

где $\Omega \subset U$ — любое измеримое подмножество.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательствам теорем 5.5.4 и 5.5.5. \square

Это предложение дает нам своего рода “общий вид” финслерова объема. Теперь можно строить функционалы финслерова объема, выбирая значение $\nu(\|\cdot\|)$ для каждой нормы $\|\cdot\|$ in \mathbb{R}^n . Другими словами, n -мерный Финслеров объем определяется его значениями на плоских нормированных пространствах. Более точно, справедливо следующее

Предложение 5.5.12. *Предположим, что каждое нормированное пространство $(V, \|\cdot\|)$ оснащено такой инвариантной относительно параллельных*

переносов мерой $\text{Vol}_{(V, \|\cdot\|)}$, которая конечна и положительна на каждом открытом множестве и обладает следующими свойствами.

- (1) *Евклидова согласованность*: $\text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, \text{standard евклидова norm})} = m_n$.
- (2) *Аффинная инвариантность*: мера сохраняется при любой линейной изометрии нормированных пространств.
- (3) *Монотонность*: если $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|'$, то $\text{Vol}_{(V, \|\cdot\|)} \leq \text{Vol}_{(V, \|\cdot\|')}$.

Тогда это семейство мер можно распространить на все финслеровы многообразия как евклидово-согласованный и монотонный функционал объема.

План доказательства. Имея меры на всех нормированных пространствах мы можем, аналогично определению 5.5.2, задать якобианы отображений из одного финслерова многообразия на другое. Определим финслеров объем по формуле из предложения 5.5.11; после этого нетрудно доказать формулу замены переменной (теорема 5.5.4). Из условий 2 и 3 следует, что линейное нерастягивающее отображение не увеличивает меру. Заметим, что дифференциалы нерастягивающего отображения финслеровых многообразий являются нерастягивающими линейными отображениями между их касательными пространствами (с нормами, являющимися сужениями наших финслеровых структур). Теперь формула замены переменных говорит о том, что финслеров объем определен корректно (то есть он не зависит от выбора системы координат) и монотонен относительно изменения метрики. \square

Для того, чтобы определить инвариантную относительно параллельных переносов меру на векторном пространстве, достаточно выбрать ее значение всего на одном множестве. Выше мы использовали для этой цели единичный куб в \mathbb{R}^n (вспомните определение $\nu(\|\cdot\|)$). В большинстве случаев более удобно задать объем множества, естественно связанного с нормой, например, единичного шара этой нормы.

Пример 5.5.13 (Мера Хаусдорфа). Обозначим через α_n евклидов объем стандартного единичного шара в \mathbb{R}^n . В каждом нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ определим меру $\text{Vol}_{(V, \|\cdot\|)}$ так, чтобы мера единичного шара этой нормы была равна α_n . Иными словами, сопоставим норме $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^n значение

$$\nu(\|\cdot\|) = \frac{\alpha_n}{m_n(\text{unit ball of } \|\cdot\|)}.$$

Нетрудно видеть, что условия предложения 5.5.12 выполняются, так что мы получили некоторый функционал финслерова объема. На самом деле этот функционал совпадает с n -мерной мерой Хаусдорфа. Это можно доказать аналогично тому, как мы находили точное значение нормирующей константы для меры Хаусдорфа (см. теорему 1.7.14 и ее следствие).

В следующем примере для определения объема требуется из некоторого класса множеств в векторном пространстве выбрать множество наименьшего объема. Это может показаться порочным кругом, так как само понятие объема еще не определено. Однако, чтобы *сравнивать* объемы множеств, нам совсем не надо выбирать функционал объема. Достаточно взять *любую* евклидову структуру и сравнивать меры Лебега, потому что результат не зависит от этой вспомогательной евклидовой структуры: ее изменение просто умножает все объемы на одно и то же число.

Пример 5.5.14 (комасса, [Gro1]). Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, B — его единичный шар, а Q — содержащий B аффинный куб минимального объема. (Под аффинным кубом мы имеем в виду образ куба $[-1, 1]^n$ при линейном отображении.) Теперь определим объем формулой $\text{Vol}_{(V, \|\cdot\|)}(Q) = 2^n$. Определенный таким образом функционал финслерова объема называется *комассой*.

Пример 5.5.15 (вписанный риманов объем). Аналогично предыдущему, пусть Q — эллипсоид наименьшего объема, содержащийся в B . Положим объем $\text{Vol}_{(V, \|\cdot\|)}(Q)$ равным α_n , евклидову объемы стандартного евклидова шара. Это определение равносильно следующему: для данной нормы $\|\cdot\|$ найдем евклидову норму $|\cdot|$ с наименьшим объемом среди всех евклидовых норм, не меньших, чем $\|\cdot\|$; теперь положим $\text{Vol}_{(V, \|\cdot\|)} = \text{Vol}_{(V, |\cdot|)}$. Полученный финслеров объем равен минимуму римановых объемов тех римановых метрик, которые не меньше нашей финслеровой метрики.

Аналогично можно рассмотреть максимальный риманов объем среди римановых не больших нашей финслеровой метрики. Такое определение объема связано с минимальным эллипсоидом, содержащим единичный шар нашей нормы.

Пример 5.5.16 (симплектический объем). Пусть B — единичный шар некоторой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^n . *Полярное* для B определяется условием:

$$B^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ для всех } y \in B\}.$$

Определим функционал объема равенством $\nu(\|\cdot\|) = m_n(B^*)/\alpha_n$, где α_n — евклидов объем евклидова единичного шара (сравните с примером 5.5.13). Полученный функционал финслерова объема называется *объем Холмса–Томпсона*.

Этот специальный финслеров объем тесно связан с так называемым симплектическим объемом (последний определен на кокасательном расслоении многообразия и не зависит от метрики). Точная формулировка: объем Холмса–Томпсона с точностью до постоянного множителя равен проекции симплектического объема множества ковекторов, норма которых не превосходит единицы.

Упражнение 5.5.17. Докажите, что в рассмотренных выше примерах все функционалы финслерова объема различны между собой.

Хотя существует много различных естественных функционалов финслерова объема, они тем не менее “не слишком различны”. Именно, отношение любых двух из них ограничено постоянной, зависящей только от размерности.

Теорема 5.5.18. Пусть Vol и Vol' — два n -мерных согласованных с евклидовым и монотонных функционала финслерова объема. Тогда $\text{Vol}(\Omega) \leq n^{3n/2} \text{Vol}'(\Omega)$ для каждого измеримого множества Ω в любом финслеровом многообразии.

Доказательство. Согласно предложению 5.5.11 достаточно доказать неравенство $\text{Vol} \leq n^{3n/2} \text{Vol}'$ для нормированного векторного пространства. Нам понадобится следующая лемма (она будет нужна также в разделе 8.5.3). Грубо говоря, она утверждает, что каждое выпуклое тело в \mathbb{R}^n можно аппроксимировать с ограниченной относительной погрешностью аффинным кубом. Напомним, что аффинный кубом называется образ стандартного куба $[-1, 1]^n$ при любом невырожденном линейном преобразовании.

Лемма 5.5.19. Пусть D — единичный шар нормы $\|\cdot\|$ в n -мерном векторном пространстве V . Тогда существует такой аффинный куб $Q \subset V$, что $\frac{1}{n}Q \subset D \subset Q$.

Доказательство. Можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционал F на $D \times \dots \times D$ (n сомножителей), определенный равенством, где $n \times n$ -матрица $[v_1, \dots, v_n]$ составлена из координат векторов v_i . Другими словами, $F(v_1, \dots, v_n)$ — это объем параллелепипеда, натянутого на эти вектора. Так как функционал F непрерывен, а множество $D \times \dots \times D$ компактно, F достигает максимума. Мы будем считать, что этот максимум достигается на стандартном базисе (e_1, \dots, e_n) пространства \mathbb{R}^n . Это всегда можно обеспечить за счет линейного преобразования множества D . Тогда мы можем считать, что $Q = [-1, 1]^n$. Действительно, так как D содержит вектора e_i , мы имеем $\|e_i\| \leq 1$; тем самым $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \|\sum x_i e_i\| \leq \sum |x_i| \leq 1$ при $(x_1, \dots, x_n) \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^n$. Следовательно $\frac{1}{n}Q \subset D$. С другой стороны, если $v = (x_1, \dots, x_n) \in D$, то $|x_i| \leq 1$ при всех i ; иначе можно было бы заменить e_i на v в выражении $F(e_1, \dots, e_n)$ и получить большее значение. Таким образом, $D \subset [-1, 1]^n$. \square

$$F(v_1, \dots, v_n) = |$$

Теперь рассмотрим аффинный куб Q из леммы 5.5.19 в n -мерном нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$. отождествим V с \mathbb{R}^n с помощью линейного изоморфизма, переводящего Q в $[-1, 1]^n$. Тогда из $\frac{1}{n}Q \subset D \subset Q$ следует, что $\frac{1}{n}B \subset D \subset \sqrt{n}B$, где B — евклидов единичный шар

в \mathbb{R}^n . Это, в свою очередь, равносильно неравенству между нормами: $\frac{1}{\sqrt{n}}|\cdot| \leq \|\cdot\| \leq n|\cdot|$, где $|\cdot|$ — стандартная евклидова норма. Следовательно, по монотонности объема (заметим, что $\text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, c|\cdot|)} = c^n \text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, |\cdot|)}$ для любой константы $c > 0$),

$$\frac{1}{n^{n/2}} \text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, |\cdot|)} \leq \text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)} \leq n^n \text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, |\cdot|)}$$

Аналогично, такое же неравенство выполняется при замене Vol' на Vol . Так как $\text{Vol}_{(\mathbb{R}^n, |\cdot|)} = \text{Vol}'_{(\mathbb{R}^n, |\cdot|)}$, то отсюда следует желаемое неравенство $\text{Vol} \leq n^{3n/2} \text{Vol}'$. \square

5.6. Неравенство Безиковича

Неравенство Безиковича является одним из простых утверждений, которые позволяют оценивать объем римановой метрики даже в ситуации, когда имеющаяся информация о метрике довольно ограничена. Это неравенство принадлежит к той части метрической геометрии, формулировки которой не содержат ограничений на кривизну или других сходных локальных условий. Много других проблем и результатов из этого раздела геометрии можно найти в книге [Gro1]. Мы сформулируем и докажем неравенство Безиковича в пункте 5.6.2. Доказательство использует результаты о степени отображения (которые относятся к дифференциальной топологии), кратко изложенные в первом параграфе. Хотя эти результаты далеки от тематики нашей книги, они снабдят нас важным инструментом для изучения метрической геометрии.

5.6.1. Степень отображения. В этом параграфе мы введем важный гомотопический инвариант отображения, его степень. В основном мы будем иметь дело со степенью по модулю 2, которая достаточна для наших целей. Доказательства и детальное изложение см. в книге [Mi]. Мы советуем читателю доказать все приведенные ниже утверждения доказать самим в одномерном случае в качестве упражнений (то есть для окружностей и интервалов).

Определение 5.6.1. Рассмотрим гладкое отображение $f : M \rightarrow N$, где M и N — гладкие многообразия. Точка $x \in M$ называется *регулярной* для f , если ранг дифференциала $d_x f$ равен размерности N , то есть $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ сюръективен. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения f , если каждая точка $x \in f^{-1}(y)$ регулярна f .

Хорошо известная теорема Сарда–Брауна утверждает, что регулярные значения отображения f всюду плотны в N (и, кроме того, дополнение к множеству регулярных значений в N имеет меру нуль).

Отметим, что если $f^{-1}(y) = \emptyset$, то точка $y \in N$ является регулярным значением. Если $\dim M < \dim N$, то множество регулярных значений совпадает с $N \setminus f(M)$. Если же $\dim M \geq \dim N$, то определение становится более интересным. В этом случае из теоремы о неявной функции следует, что для каждого регулярного значения y отображения f множество $f^{-1}(y)$ является гладким подмногообразием в M , имеющим размерность равную $\dim M - \dim N$. В частности, если $\dim M = \dim N$, то прообраз регулярного значения является дискретным множеством (состоит из изолированных точек). Если M еще и компактно, то прообраз регулярного значения конечен.

Степень отображения определяется только для отображений между многообразиями одной размерности. Ниже мы всегда считаем, что M и N — компактные многообразия размерности $n \geq 1$.

Определение 5.6.2. Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение, а $y \in N$ — регулярное значение f . Тогда $\deg_2(f; y)$ определяется как вычет по модулю 2 по формуле

$$\deg_2(f; y) = \#(f^{-1}(y)) \bmod 2.$$

Иными словами, $\deg_2(f; y)$ равна 0, если число точек в $f^{-1}(y)$ четно, и равна 1 в противном случае.

Предложение 5.6.3. Степень $\deg_2(f; y)$ не зависит от выбора регулярного значения $y \in N$.

Это предложение, вместе с тем, что существует по крайней мере одно регулярное значение, позволяет нам дать следующее определение.

Определение 5.6.4. Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Тогда $\deg_2(f; y)$, где $y \in N$ — произвольное регулярное значение f , называется *степенью по модулю 2* отображения f и обозначается через $\deg_2(f)$.

Предложение 5.6.5. Если гладкие отображения f_1 и f_2 из M в N гомотопны, то $\deg_2(f_1) = \deg_2(f_2)$.

Это предложение позволяет нам применить понятие степени отображения к негладким отображениям. Можно показать, что каждое непрерывное отображение из M в N гомотопно некоторому гладкому отображению. Если $f : M \rightarrow N$ — любое непрерывное отображение, а f_1 — гладкое отображение, гомотопное отображению f , то мы полагаем $\deg_2(f) = \deg_2(f_1)$. Из предложения 5.6.5 следует, что $\deg_2(f_1)$ не зависит от выбора f_1 , тем самым последнее равенство определяет $\deg_2(f)$ корректно. Кроме того, $\deg_2(f)$ зависит только от гомотопического класса отображения f .

Многообразия с краем. При предыдущих рассмотрениях мы предполагали, что M и N не имели края. Это предположение можно отбросить, если ограничиться только теми отображениями, которые отображают границу многообразия M в границу N (или ее подмножество).

Здесь под многообразием мы понимаем гладкое многообразие с кусочно гладкой границей. На самом деле можно определить степень и при отсутствии какой либо дифференциальной структуры (то есть в случае топологических многообразий).

Предложение 5.6.6. *Предположим, что M и N — компактные гладкие многообразия, возможно с границами, а f — такое гладкое отображение, что $f(\partial M) \subset \partial N$. Тогда $\deg_2(f; y)$ не зависит от выбора регулярного значения $y \in N$. Следовательно, определение 5.6.4 имеет смысл и для таких отображений f .*

Кроме того, если f_0 и f_1 соединены такой гомотопией $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$, что $f_t(\partial M) \subset \partial N$ для всех $t \in [0, 1]$, то $\deg_2(f_0) = \deg_2(f_1)$.

Доказательство. Мы сведем утверждение к случаю замкнутых многообразий (предложения 5.6.3 и 5.6.5) с помощью конструкции удвоения. Обозначим через \bar{M} удвоение M , то есть две копии M , склеенные вдоль тождественного отображения их границ. Аналогично, \bar{N} — удвоение N .

Отображение $f : M \rightarrow N$ естественно индуцирует отображение $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$, которое отображает каждый экземпляр многообразия M в соответствующую копию N . Новое отображение \bar{f} , соответствующее отображению $f(\partial M) \subset \partial N$, непрерывно. Нетрудно видеть, что $\deg_2(f; y) = \deg_2(\bar{f}; y')$ где y' одна из двух точек, соответствующих точке y . Теперь первое утверждение следует из предложения 5.6.3. Аналогично, второе утверждение следует из предложения 5.6.5. Подробности (в том числе и введение гладкой структуры на удвоении) мы оставляем читателю. \square

Как уже было отмечено после предложения 5.6.5, гомотопическая инвариантность \deg_2 позволила нам определить \deg_2 и для не гладких отображений. Совершенно те же доводы применимы к многообразиям с краем и классу тех отображений f , для которых $f(\partial M) \subset \partial N$.

Предложение 5.6.7. *Пусть M и N — компактные гладкие n -мерные многообразия, быть может с краем, $f : M \rightarrow N$ — такое непрерывное отображение, что $f(\partial M) \subset \partial N$ и $\deg_2 f \neq 0$. Тогда f сюръективно, то есть $f(M) = N$.*

Доказательство. Сначала, аналогично предложению 5.6.6, сведем предложение к случаю многообразий без края. Теперь предположим, что f не сюръективно. Если f гладко, рассмотрим $y \in N \setminus f(M)$. Так как $f^{-1}(y) = \emptyset$, то y является регулярным значением и тогда $\deg_2(f) =$

$\deg_2(f; y) = 0$. В общем случае заменим отображение f его гладкой аппроксимацией f_1 . Если f_1 достаточно близко к f , то оно гомотопно f и тоже не сюръективно. Следовательно, $\deg_2(f) = \deg_2(f_1) = 0$. \square

Замечание 5.6.8. Если многообразия M и N *ориентированы*, то можно определить целочисленную степень отображения $f : M \rightarrow N$ (обозначаемую $\deg(f)$). Именно, если $y \in N$ — регулярное значение f , то положим

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(x),$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } d_x f \text{ сохраняет ориентацию,} \\ -1, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Все сформулированные выше свойства степени \deg_2 справедливы, с очевидной модификацией, и для \deg . Ясно, что $\deg_2(f) = \deg(f) \bmod 2$.

5.6.2. Неравенство Безиковича. Будем пользоваться следующими обозначениями. Обозначим $I = [0, 1]$; тогда $I^n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ — стандартный n -мерный куб. Граница ∂I^n куба состоит из точек, хотя бы одна координата которых равна 0 или 1. Эта граница состоит из *граней*, которые мы обозначим через F_i^0 и F_i^1 ; именно, F_i^0 (соотв. F_i^1) — это множество тех точек куба I^n , i -ая координата которых равна 0 (соотв. 1).

Теорема 5.6.9 (Неравенство Безиковича). Пусть g — риманова структура на I^n . Через d_i , $i = 1, \dots, n$, обозначим риманово расстояние между гранями F_i^0 и F_i^1 . Тогда справедливо неравенство $\text{Vol}_g(I^n) \geq \prod_{i=1}^n d_i$.

Доказательство. На протяжении доказательства все расстояния, якобианы и другие характеристики куба I^n рассматриваются относительно метрики g . Определим функции $f_i : I^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, равенством

$$f_i(x) = \min\{d_i, \text{dist}(x, F_i^0)\}.$$

Через $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим отображение с координатными функциями f_i , то есть $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Сделаем следующие простые наблюдения

- (1) Отображения f_i являются нерастягивающими.
- (2) $f_i(x) \in [0, d_i]$ при всех $x \in I^n$. Это значит, что f отображает I^n в параллелограмм $P = [0, d_1] \times [0, d_2] \times \dots \times [0, d_n]$.
- (3) Если $x \in F_i^0$, то $f_i(x) = 0$, а если $x \in F_i^1$, то $f_i(x) = d_i$. Другими словами, f отображает каждую грань куба I^n в соответствующую грань параллелепипеда P .

Из первого пункта последнего предложения и предложения 5.5.10 следует, что якобиан $\text{Jac } f \leq 1$ существует почти всюду. Отсюда, по

следствию 5.5.9, получаем: $\text{Vol}_g(I^n) \geq \mu_n(f(I^n))$. Мы хотим показать, что $f(I^n) = P$.

Второе из сделанных наблюдений позволяет рассматривать f как отображение из I^n в P . Третье наблюдение показывает, что $f(\partial I^n) \subset \partial P$; следовательно, для f определена степень отображения. Мы хотим показать, что степень отображения f (по модулю 2), рассматриваемого как отображение из I^n в P , равна 1. Рассмотрим линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное равенством $A(x_1, \dots, x_n) = (x_1/d_1, \dots, x_n/d_n)$. Его сужение $A|_P$ является гомеоморфизмом из P в I^n . Следовательно, достаточно доказать, что отображение $A \circ f$ имеет степень 1 как отображение из I^n в I^n (а затем применить предложение 5.6.7). Для доказательства мы покажем, что $A \circ f$ гомотопно тождественному отображению; для этого построим такую гомотопию $\{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$, что $\varphi_t(\partial I^n) \subset \partial I^n$ при всех t (см. предложение 5.6.6). Пусть $\{\varphi_t\}$ — линейная гомотопия между $A \circ f$ и тождественным отображением, то есть $\varphi_t(x) = (1-t)A(f(x)) + tx$. Пусть $x \in \partial I^n$, а F — та грань куба I^n , которой принадлежит x . Тогда $y := A(f(x)) \in F$, так как $A \circ f|_{I^n}$ отображает каждую грань куба I^n в себя. Отсюда немедленно следует, что $\varphi_t(x) = tx + (1-t)y \in F \subset \partial I^n$ для всех t .

Таким образом, $\varphi_t(\partial I^n) \subset \partial I^n$ при всех t . Следовательно, $\deg_2(f) = \deg_2(A \circ f) = \deg_2(\text{Id}_{I^n}) = 1$, как мы и утверждали. В частности, образ $f(I^n)$ заполняет весь P . Тогда

$$\text{Vol}_g(I^n) \geq \text{Vol}(f(I^n)) = \text{Vol}(P) = \prod_{i=1}^n d_i.$$

□

Упражнение 5.6.10. Докажите следующее обобщение теоремы 5.6.9.

1. Пусть M — такое n -мерное риманово многообразие, что $\partial M = \partial I^n$. Докажите, что тогда

$$\text{Vol}(M) \geq \prod_{i=1}^n \text{dist}_M(F_i^0, F_i^1).$$

2. Если M — n -мерное риманово многообразие с краем, а $f: \partial M \rightarrow \partial I^n$ — непрерывное отображение, имеющее ненулевую степень $\deg_2(f)$, то

$$\text{Vol}(M) \geq \prod_{i=1}^n \text{dist}_M(f^{-1}(F_i^0), f^{-1}(F_i^1)).$$

Упражнение 5.6.11. Рассмотрим гомеоморфное сфере S^2 риманово многообразие M . Предположим, что найдутся четыре точки $a, b, c, d \in M$ со следующими расстояниями между ними: $|ab| = |bc| = |cd| = |da| = 1$, $|ac| = |bd| = 3/2$. Докажите, что тогда площадь M не меньше, чем $1/2$.

Подсказка. Докажите, что расстояние между кратчайшими ab и cd не меньше, чем $1/2$, и аналогичное утверждение для кратчайших bc

и *da*. Затем примените неравенство Безиковича к каждому из двух четырехугольников, на которые эти четыре пути разбивают сферу.

Упражнение 5.6.12. Предположим, что в римановом многообразии M , гомеоморфном проективной плоскости \mathbf{RP}^2 , каждая нестягиваемая петля не короче, чем 1. Докажите, что тогда площадь M не меньше $1/16$.

Подсказка. Разрежьте M по кратчайшей нестягиваемой петле. Полученное пространство гомеоморфно кругу. Разбейте его границу на четыре дуги равной длины и докажите, что расстояния между “противоположными” дугами не меньше, чем $1/4$. Остается применить неравенство Безиковича к этому кругу (который очевидно гомеоморфен I^2).

Замечание 5.6.13. На самом деле постоянная $1/16$ в последнем упражнении может быть заменена на $2/\pi$ (это усиление называется теоремой Пу, см. [Gro1]). Постоянная $2/\pi$ является оптимальной и достигается для метрики проективной плоскости \mathbf{RP}^2 , полученной из сферы радиуса $1/\pi$ отождествлением противоположных точек.

Упражнение 5.6.14. Пусть риманово многообразие M гомеоморфно тору $T^2 = S^1 \times S^1$. Предположим, что любая нестягиваемая петля в M не короче 1. Докажите, что тогда площадь M не меньше $1/4$.

Замечание 5.6.15. На самом деле оптимальная постоянная в последнем упражнении равна $\sqrt{3}/2$ (теорема Левнера), см. [Gro1]. Можете ли вы найти пример, в котором последнее значение достигается?

В заключение упомянем, что “обратное неравенство Безиковича” не существует, то есть нет аналогичной *верхней* оценки для объема. Именно,

Упражнение 5.6.16. Докажите, что для любого $C > 0$ и целого $n \geq 2$ найдется такая риманова структура g на n -мерном кубе I^n , что расстояния (по Хаусдорфу) в (I^n, dist_g) между F_i^0 и F_i^1 при всех i меньше, чем 1, однако $\text{Vol}_g(I^n) > C$.

5.6.3. Обобщения: систолы. Упражнения 5.6.12 и 5.6.14 являются частными случаями общей проблемы, которую можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим компактное n -мерное риманов многообразие (M, g) . Его *одномерной систолой* $\text{sys}_1(M, g)$ называется точная нижняя грань длин нестягиваемых в M петель. (Определение k -мерных систол при $k > 1$ технически сложнее, см. ниже.)

Задача ставится следующим образом: если мы зафиксируем топологический тип многообразия M и значение $\text{sys}_1(M, g)$, то можно ли оценить снизу объем римановых многообразий (M, g) ? Например, если M гомеоморфно тору T^2 или проективной плоскости \mathbf{RP}^2 , то можно доказать, что

$$\text{Vol}(M, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sys}_1(M, g)^2 \quad \text{для тора,}$$

$$\text{Vol}(M, g) \geq \frac{2}{v\pi} \text{sys}_1(M, g)^2 \quad \text{для проективной плоскости}$$
 (см. замечания после упражнений 5.6.12 and 5.6.14).

Более формально, сопоставим гладкому n -мерному многообразию M его *изосистолическую постоянную* $c_1(M)$, которая, по определению равна

$$c_1(M) = \inf_g \{ \text{Vol}(M, g) : \text{sys}_1(M, g) \geq 1 \},$$

или, равносильно,

$$c_1(M) = \inf_g \frac{\text{Vol}(M, g)}{\text{sys}_1(M, g)^n},$$

где инфимум берется по всем римановым метрикам g на многообразии M . Теперь вопрос ставится так: каково значение этой постоянной для данного M , или, по крайней мере, положительна ли эта постоянная?

Хотя точное значение $c_1(M)$ известно пока что только в нескольких простейших случаях (все они — двумерные), найден обширный класс многообразий M , для которых $c_1(M) > 0$, см. [Gro1].

Обобщить понятие систолы на старшие размерности можно различными способами. Один из возможных подходов состоит в том, что k -мерной систолой риманова многообразия M считается инфимум k -мерных объемов гомологически нетривиальных замкнутых k -мерных “пленок” в M . При этом необходимо уточнить, что понимается под “пленкой”. Нехорошо рассматривать в качестве пленок только k -мерные подмногообразия: одна из причин состоит в том, что не каждый гомологический класс можно представить подмногообразием. Вместо этого можно брать инфимум по всем сингулярным липшицевым цепям. Объясним это подробнее. Обозначим через τ k -мерный липшицев сингулярный симплекс, то есть липшицево отображение стандартного k -симплекса в M . k -Мерный объем $\text{Vol}(\tau)$ такого симплекса корректно определен (см. параграф 5.5.2). Это позволяет ввести понятие объема k -мерной липшицевой цепи. Именно, для липшицевой цепи $c = \sum_{i=1}^N x_i \tau_i$, где $x_i \in \mathbb{R}$, а τ_i — липшицев сингулярный симплекс, положим $\text{Vol}(c) = \sum_{i=1}^N |x_i| \text{Vol}(\tau_i)$. Граница цепи, циклы и группы гомологий определяются обычным образом. После этого определяем

$$\text{sys}_k(M, g) = \inf \{ \text{Vol}(c) : c \text{ — } k\text{-мерный цикл не гомологичный нулю}$$

и

$$c_k(M) = \inf_g \frac{\text{Vol}(M, g)}{\text{sys}_k(M, g)^{n/k}}.$$

Возникает вопрос, в каких случаях систола $c_k(M)$ отлична от нуля.

Несколько удивительно, что ответы при $k = 1$ и при $k > 1$ абсолютно различны. В то время, как $c_1(M) > 0$ во многих случаях, недавно было

доказано ([KS] и [Bab]), что при $1 < k < \dim M$ всегда $\text{sys}_k(M) = 0$. Это свойство называется *систолической мягкостью*. Фактически в [Bab] доказано даже более сильное утверждение. Именно, используется более общее, чем систолы, понятие интер-сistol и, кроме того, в качестве M допускается брать полиэдры вместо многообразий.

Кривизна римановой метрики

Цель этой главы, — показать, что риманово многообразие, секционные кривизны которого ограничены сверху или снизу числом k , является пространством с внутренней метрикой ограниченной (соответственно, сверху или снизу) кривизны в смысле главы 4, причем кривизна ограничена тем же числом k . Тот читатель, который готов принять этот факт на веру (или знаком с римановой геометрией) может опустить эту главу. Она включена лишь для придания изложению замкнутости.

Наше введение в риманову геометрию в основном заканчивается там, где начинается содержательная геометрия. Существует много учебной литературы, содержащей различные изложения дифференциальной и римановой геометрии. В нашем курсе мы рассматриваем римановы многообразия (как и другие пространства с внутренней метрикой, определения которых опираются на анализ) лишь как один из важных источников примеров. С этой точки зрения все аналитические методы могут быть отброшены как только они дадут определенную базовую информацию, используемую в дальнейших “синтетических” рассуждениях. Кратчайший путь от инфинитезимальных определений к локальным метрическим свойствам на удивление короток, и мы всячески стараемся сделать его длиннее для большей мотивированности наших рассуждений. В конечном счете, все что нам необходимо, — это ввести нормальные координаты и доказать (локальную) теорему сравнения Картана–Александрова–Топоногова 6.5.6.

В целях упрощения изложения мы ограничимся в нашем введении в риманову геометрию случаем двумерных многообразий. Это также

позволит нам выписывать явные формулы, избегая громоздких индексов и почти не обращаясь к линейной алгебре. Многомерные обобщения в большинстве случаев просты и оставлены читателю в качестве упражнений. Мы особо отмечаем случаи, где переход к старшим размерностям может вызвать трудности, и намечаем пути преодоления последних.

Ввести секционную (гауссову) кривизну и понять ее геометрический смысл можно даже без введения ковариантных производных. Однако для использования введенного таким образом понятия кривизны пришлось бы принять на веру некоторые (в основном технические) утверждения. Напомним, что ключевым понятием в предыдущей главе были нормальные координаты, и у нас было два (двойственных) подхода к ним. Если начинать с эквидистантного семейства (распространение волнового фронта), то геодезическая кривизна кривой этого семейства является производной ее элемента длины. В свою очередь, гауссова кривизна отвечает за производную геодезической кривизны при эквидистантном движении. Если же рассматривать нормальные координаты как семейство лучей (геодезических), то гауссова кривизна отвечает за скорость их удаления друг от друга. В обоих случаях гауссова кривизна входит как некоторый коэффициент в очень простые дифференциальные уравнения (первого и второго порядка, соответственно). Этот коэффициент не зависит от выбора конкретной нормальной системы координат (он зависит лишь от точки, или, в случае большей размерности, от точки и двумерного направления). Ковариантные производные нам понадобятся именно для доказательства этого факта (конечно, это может быть доказано и прямыми громоздкими вычислениями в координатах). Так как наши рассуждения носят локальный характер, мы считаем, что метрика определена в некоторой области на плоскости. Читатель, знакомый с понятием гладкого многообразия, сможет немедленно перенести наши утверждения о римановой метрике на случай гладких многообразия.

Далее следует краткий план главы.

Мы начнем с вычислений в координатах. Используя обычные вычисления вариаций, мы покажем, что каждая кратчайшая удовлетворяет уравнению геодезической. Это уравнение является уравнением Эйлера–Лагранжа, которому удовлетворяют функции, обеспечивающие минимум для широкого класса интегральных функционалов. Эти вычисления нам необходимы лишь для мотивировки дальнейшего. Советуем тем читателям, которые ненавидят координатные вычисления, пропустить их. Другая возможность состоит в том, чтобы обратиться сразу к параграфу 6.2, а затем вернуться к параграфу 5.2 и пересказать его содержание на инвариантном языке.

Наш следующий шаг состоит в замене инвариантных (зависящих от координат) производных векторных полей ковариантными производными. Мы также определяем ковариантное дифференцирование для финслеровой

метрики, однако его алгебраическая структура намного сложнее и вовсе не так уж полезна и удобна, как в римановом случае. Далее, мы перепишем уравнение геодезической на языке ковариантных производных и определим гауссову (секционную) кривизну.

Параграфы 6.3 и 6.4 посвящены геометрическому смыслу гауссовой кривизны. Отметим, что мы предлагаем для этого два альтернативных подхода: через понятия *скорости разбегаания геодезических* и *эквидистантной вариации кривых (гиперповерхностей)*. Читатель, желающий только понять наглядный смысл понятия кривизны чтобы затем использовать это понятие, может взять результаты этого параграфа в качестве *определения* секционной кривизны и полностью игнорировать ковариантное дифференцирование. Последнее, однако, необходимо для вычислений в конкретных примерах и для доказательства корректности “синтетических” определений римановой кривизны.

6.1. Мотивировка: вычисления в координатах

6.1.1. Дифференциальные уравнения геодезических в координатах.

Вычисления этого раздела в основном используются лишь для мотивировки и могут быть пропущены; к ним можно вернуться позже.

Вариации кривых. В этой главе мы часто будем иметь дело с однопараметрическим семейством кривых (называемым также вариацией кривой, особенно если в семействе есть выделенная кривая). Обычно мы будем обозначать это семейство через γ_ε . Формально, это — не что иное, как отображение $(\varepsilon, t) \rightarrow \gamma_\varepsilon(t)$ из координатной (ε, t) -плоскости (области в ней) в Ω . Образ координатного векторного поля $\partial/\partial t$ при этом отображении (точнее, при его дифференциале) образует поле скоростей кривых γ_ε . Образ второго координатного поля $\partial/\partial \varepsilon$ будем называть полем вариации или варьирующим полем. Понятно, что когда мы изменяем параметр ε при фиксированном t , то точка $\gamma_\varepsilon(t)$ удаляется (от точки $\gamma_0(t)$) со скоростью $(\partial/\partial \varepsilon)\gamma_\varepsilon(t)$. Заметим, что если отображение $\gamma_\varepsilon(t)$ не инъективно, то ни поле скоростей, ни варьирующее поле формально не являются векторными полями в Ω ; они могут быть “многозначными” в некоторой точке Ω (когда кривые семейства пересекаются), и они не определены вне точек образа. Следовательно, эти “векторные поля” необходимо понимать как векторнозначные отображения из области определения (подобно координатным “векторным полям” для вырожденной системы координат).

Во многих случаях мы будем использовать однопараметрические семейства координатных линий некоторых (возможно вырожденных) систем координат. Одно координатное векторное поле будет полем скоростей, а другое, — варьирующим полем.

Вычисление вариации в координатах. Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ — кратчайшая, параметризованная длиной дуги; $\dot{\gamma}(t) = d\gamma/dt = T(t)$, $\langle T, T \rangle = 1$. Здесь и далее производную по длине дуги будем обозначать (равноправно) либо через $\frac{d}{dt}$, либо точкой над буквой.

Включим кривую γ в некоторое семейство путей с фиксированными началом и концом и воспользуемся тем фактом, что функционал длины, ограниченный на это семейство, достигает своего минимума на γ . Выберем вектор-функцию $V(t) = (m(t), n(t))$, $V: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $V(a) = V(b) = 0$, которая будет варьирующим полем. Зафиксируем систему координат (x, y) и рассмотрим семейство кривых $\gamma_\varepsilon = \gamma + \varepsilon V$ вида $\gamma_\varepsilon(t) = (x(t) + \varepsilon m(t), y(t) + \varepsilon n(t))$. Конечно, эта конструкция абсолютно не инвариантна, она основана на специальном выборе координат (и следовательно, векторной структуры) в Ω . Однако попытка сделать ее инвариантной увела бы нас далеко от предмета этого параграфа. Читатель, знакомый с вариационными методами на многообразиях, может легко перевести наши рассуждения в инвариантную форму.

Из того, что кривые γ_ε имеют общие концы, а кривая γ является кратчайшей, следует, что $(d/d\varepsilon)|_{\varepsilon=0} L(\varepsilon) = 0$, где $L(\varepsilon)$ — длина кривой γ_ε . Таким образом, верно равенство

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Обозначим $T_\varepsilon = \frac{d\gamma_\varepsilon}{dt}$ и заметим, что $\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon}(t, \varepsilon) = V(t)$. Дифференцируя под знаком интеграла и подставляя $\langle T, T \rangle|_{\varepsilon=0} = 1$, получим

$$(6.1) \quad 0 = \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\langle T(t), \dot{V}(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \dot{x}\dot{y} + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \dot{y}^2 \right) dt,$$

где, как уже упоминалось, точка над буквой означает дифференцирование по t .

Теперь мы хотим проинтегрировать по частям. Возникает искушение продифференцировать скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ как обычное евклидово скалярное произведение:

$$\frac{d}{dt} \langle T(t), V(t) \rangle_{\text{Eucl}} = \left\langle \dot{T}(t), V(t) \right\rangle_{\text{Eucl}} + \left\langle T(t), \dot{V}(t) \right\rangle_{\text{Eucl}}.$$

Но для нашего “скалярного произведения” $\langle \cdot, \cdot \rangle$ эта формула просто *неверна!* Напомним, что мы использовали скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для обозначения билинейной формы $Q_p(\cdot, \cdot)$, определенной на касательных векторах. Коэффициенты этой формы зависят от точки p , и при дифференцировании мы должны использовать правило дифференцирования сложной функции. (На самом деле, уже само выражение $\dot{V}(t)$, $\dot{T}(t)$ зависит от выбора координатной системы!) Существует инвариантный и очень удобный способ сделать применимым обычное правило дифференцирования скалярного

произведения. Для этого надо ввести *ковариантные производные* (см. раздел 6.2), которые призваны заменить неинвариантные координатные производные “инвариантной” (не зависящей от системы координат) операцией.

Пока что продолжим наши координатные вычисления. Геометрический смысл происходящего станет понятен в параграфе 6.2.

Напомним, что

$$\begin{aligned} \langle T(t), V(t) \rangle &= E(x(t), y(t))\dot{x}m(t) + F(x(t), y(t))\dot{x}n(t) \\ &\quad + F(x(t), y(t))\dot{y}m(t) + G(x(t), y(t))\dot{y}n(t). \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение по t , мы получим (для упрощения записи везде опущены аргументы)

$$\langle T, \dot{V} \rangle = \frac{d}{dt} \langle T, V \rangle - \langle \dot{T}, V \rangle - \dot{E}\dot{x}m - \dot{F}(\dot{x}n + \dot{y}m) - \dot{G}\dot{y}n.$$

Подставим последнее выражение в (6.1) и заметим, что $E_\varepsilon = \frac{dE}{d\varepsilon} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y}$ (правило дифференцирования сложной функции), и аналогично выражаются $F_\varepsilon, G_\varepsilon$. После простых вычислений получим

$$\begin{aligned} (6.2) \quad 0 &= \int_a^b \langle T(t), \dot{V}(t) \rangle dt = \langle T, V \rangle \Big|_a^b - \int_a^b (\langle \dot{T}, V \rangle + mA + nB) dt = \\ &= \langle T, V \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left(m(A + E \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} F) + n(B + F \frac{d^2x}{dt^2} + G \frac{d^2y}{dt^2}) \right) dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\dot{x}^2 \frac{\partial E}{\partial x} - \dot{x}\dot{y} \frac{\partial E}{\partial y} - \dot{y}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x} \right), \\ B &= -\dot{x}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial y} \right) - \dot{x}\dot{y} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2}\dot{y}^2 \frac{\partial G}{\partial y}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\langle T, V \rangle \Big|_a^b = 0$, поскольку мы предположили, что концы кривых неподвижны. Напомним, что это тождество верно для *любых* функций m, n при одном лишь ограничении, что они обращаются в нуль в точках a и b . Стандартный аналитический довод показывает, что оба выражения

$$A + E\ddot{x} + F\ddot{y} \quad \text{и} \quad B + F\ddot{x} + G\ddot{y}$$

должны быть тождественно равны нулю! Действительно, пусть, например, первое выражение не равно нулю в некоторой точке t_0 . Положим $n = 0$ и выберем неотрицательную функцию m так, что $m(t_0) = 1$ и m тождественно равна нулю вне некоторой малой окрестности точки t_0 . Легко понять, что равенство (6.2) неверно при таком выборе функций m, n .

Итак, наша кривая γ удовлетворяет нелинейной системе двух дифференциальных уравнений второго порядка (5.11) и (5.12), которыми мы уже воспользовались в качестве определения геодезических. Напомним эти уравнения.

$$\begin{aligned} E\ddot{x} + F\ddot{y} &= \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial E}{\partial x} + \dot{x}\dot{y}\frac{\partial E}{\partial y} + \dot{y}^2\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x}\right), \\ F\ddot{x} + G\ddot{y} &= \dot{x}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial y}\right) + \dot{x}\dot{y}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{\partial G}{\partial y}. \end{aligned}$$

Упражнение 6.1.1. Повторите те же вычисления для кратчайшей γ , параметризованной *евклидовой* длиной в случае конформной метрики, заданной с помощью функции $\lambda(p)$. Покажите, что евклидова кривизна $k(t)$ кривой γ удовлетворяет соотношению

$$k(t) = \left\langle T(t), \frac{\Delta\lambda(\gamma(t))}{\lambda(\gamma(t))} \right\rangle.$$

Из этого уравнения видно, что кратчайшая должна изгибаться в направлении *увеличения* λ . На первый взгляд это может показаться странным, так как кратчайшая должна пытаться пройти по наименьшим значениям λ . Попытаемся объяснить это явление следующей аналогией. Если вы пытаетесь обойти некоторое препятствие, то обходя его, скажем, справа, вы все время поворачиваете налево, то есть *в сторону* препятствия.

6.2. Ковариантное дифференцирование

Цель этого раздела — заменить неинвариантные координатные производные (доставившие нам много хлопот из-за отсутствия простого правила дифференцирования скалярного произведения) инвариантной операцией ковариантного дифференцирования.

Когда мы выводили уравнения геодезических, наши вычисления были громоздкими из-за необходимости дифференцировать скалярное произведение. Более того, мы производили вычисления в координатах и, как было отмечено, некоторые выражения не имели геометрического смысла.

Основной трудностью явилась необходимость дифференцировать *вектор-функции* со значениями в касательных пространствах. Координатная частная производная такой функции не инвариантна относительно выбора системы координат.

Опишем ситуацию более детально. Пусть $\gamma(t)$ — кривая с началом в точке $p \in \Omega$ и начальным вектором скорости T , то есть $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = T$. Здесь и далее в этом параграфе дифференцирования производятся в точке p , то есть при $t = 0$. Для упрощения записи мы не указываем этого в наших формулах.

Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Продифференцируем ее:

$$(6.3) \quad Tf = \frac{df}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t}.$$

Рассмотрим теперь некоторую вектор-функцию вдоль кривой γ , то есть такую функцию $V: \mathbb{R} \rightarrow T\Omega$, что $V(t) \in T_{\gamma(t)}\Omega$. Наиболее интересный пример такой функции — сужение $V(t) = W(\gamma(t))$ некоторого векторного поля $W: \Omega \rightarrow T\Omega$. Если мы хотим дифференцировать поле V , мы не можем использовать формулу (6.3): мы просто не можем вычитать касательные вектора, заданные в разных точках, а при вычитании их координат результат будет зависеть от системы координат. То есть, если мы зафиксируем координатную систему, поле $V(t)$ можно будет продифференцировать покоординатно, как в разделе 6.1.1, однако, полученная производная вообще не имеет геометрического смысла ввиду ее зависимости от координат. Цель этого параграфа — построить “инвариантный” способ дифференцирования вектор-функций. Первый пункт содержит аксиоматическое определение ковариантного дифференцирования. За ним следуют два раздела с мотивировками, которые носят факультативный характер.

6.2.1. Аксиоматическое определение ковариантного дифференцирования.

Обозначим операцию ковариантного дифференцирования, которую мы хотим определить, символом $\frac{D}{dt}$. Выпишем некий список ее желательных свойств и просто примем их за аксиомы. Эти свойства — полные аналоги хорошо известных свойств производной вектор-функции в \mathbb{R}^n . Мы увидим, что эти свойства однозначно определяют операцию ковариантного дифференцирования (то есть операция с такими свойствами существует и единственна).

(1) *Линейность*: для любых двух вещественных чисел a, b

$$\frac{D}{dt}(aV + bW) = a\frac{D}{dt}V + b\frac{D}{dt}W.$$

(2) *Правило дифференцирования произведения*: для любой вещественнозначной функции $f(t)$

$$\frac{D}{dt}(fV) = f(p)\frac{D}{dt}V + \frac{df}{dt}V.$$

(3) *Дифференцирование сужения векторного поля*. Пусть V — сужение векторного поля W на кривую: $V(t) = W(\gamma(t))$. Потребуем, чтобы значение $\frac{D}{dt}V$ было бы одним и тем же для всех кривых γ с одинаковым касательным вектором $T = \gamma'(t_0)$ в точке p . Это означает, что корректно определена следующая операция дифференцирования (по направлению):

для данного векторного поля $W: \Omega \rightarrow T\Omega$ и вектора $T \in T_p\Omega$ мы полагаем

$$\nabla_T W = \frac{D}{dt} W(\gamma(t)),$$

где γ — кривая, исходящая из точки p со скоростью T .

Формально, мы можем применить ∇_T к полю W только если W определено в некоторой окрестности точки p . Однако, в силу пункта (3), производная $\nabla_T W$ полностью определяется сужением поля W на любую кривую с касательным вектором T в точке p . Очевидно, что операции ∇ и D/dt однозначно друг друга определяют. Поэтому в дальнейшем обозначения $\nabla_T W$ и $\frac{DW}{dt} = DW/dt$ будут часто использоваться одно вместо другого.

(4) *Линейность ковариантной производной по направлению:* для любых чисел a, b

$$\nabla_{aT+bS} W = a\nabla_T W + b\nabla_S W.$$

(5) *Правило дифференцирования скалярного произведения:*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Однако, этим списком естественных свойств ковариантная производная еще не определяется однозначно. Мы вынуждены добавить еще одно свойство, которое является аналогом перестановочности частных производных. Предположим точным формулировкам краткое отступление.

Коммутирующие векторные поля. Даже если в каждой точке векторные поля образуют базис, они, вообще говоря, не могут быть представлены как координатные поля какой-либо системы координат (даже локально). Координатные поля удовлетворяют дополнительному соотношению: их скобка Ли тождественно равна нулю. Однако мы не будем здесь определять скобку Ли. Вместо этого мы ограничимся классом так называемых *коммутирующих векторных полей*. Два векторных поля $V, W: \Omega \rightarrow T\Omega$ называются коммутирующими, если они могут быть представлены как образы двух координатных полей некоторого гладкого отображения. То есть, мы требуем существования такого гладкого отображения $\varphi: \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$, что для любой точки $q \in \Omega'$ выполняется $V(\varphi(q)) = X(q) = d_q\varphi(\frac{\partial}{\partial x})$ и $W(\varphi(q)) = Y(q) = d_q\varphi(\frac{\partial}{\partial y})$. Грубо говоря, пара коммутирующих векторных полей — это пара “координатных векторных полей в некоторой, возможно вырожденной, системе координат”.

Следующее простое упражнение служит обосновывает термина *коммутирующие векторные поля*.

Упражнение 6.2.1. Докажите, что для двух коммутирующих векторных полей V, W и функции f справедливо $VWf = WVf$ (то есть они коммутируют как дифференциальные операторы)

Обратное утверждение (если $VWf = WVf$ для любой гладкой функции f , то V и W коммутируют) также верно в силу известной теоремы Фробениуса. Тем самым, указанное свойство можно принять в качестве альтернативного определения коммутирования векторных полей.

Симметричность ковариантной производной. Теперь мы готовы сформулировать последнюю аксиому ковариантного дифференцирования:

(6) *Симметричность:* $\nabla_V W = \nabla_W V$ для любых двух коммутирующих векторных полей V, W .

Чтобы понять, почему эта аксиома действительно обобщает свойство перестановочности частных производных, проделайте два следующих упражнения.

Упражнение 6.2.2. Два векторных поля $V = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ и $W = (w_1(x, y), w_2(x, y))$ в \mathbb{R}^2 коммутируют тогда и только тогда, когда их компоненты v_1, v_2, w_1, w_2 удовлетворяют некоторому дифференциальному соотношению. Найдите это соотношение.

Подсказка. Примените результат предыдущего упражнения к координатным функциям.

Упражнение 6.2.3. Покоординатное дифференцирование $D_V W$ векторного поля $W = (w_1(x, y), w_2(x, y))$ на \mathbb{R}^2 “в направлении” вектора $V = (v_1, v_2)$ (используемое в векторном анализе) определяется формулой

$$D_V W = \left(v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y}, v_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \right).$$

Покажите, что для коммутирующих векторных полей $D_V W = D_W V$.

Лемма Леви-Чивита. В основаниях римановой геометрии следующую простую лемму Леви-Чивита иногда рассматривают как главную теорему.

Лемма 6.2.4. *Операции $\nabla_V W$ и DV/dt , удовлетворяющие аксиомам (1)–(6), существуют и единственны.*

Детальное доказательство этой леммы можно найти во многих учебниках. Мы ограничимся лишь его наброском.

Введем координатную систему (x, y) . Для двух векторных полей $V = v_1 X + v_2 Y$, $W = w_1 X + w_2 Y$, где, как обычно, X, Y — координатные

векторные поля, свойства (1), (2) и (4) влекут

$$\begin{aligned}\nabla_V W &= (v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y})X + (v_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial y})Y \\ &\quad + v_1 w_1 \nabla_X X + v_1 w_2 \nabla_X Y + v_2 w_1 \nabla_Y X + v_2 w_2 \nabla_Y Y.\end{aligned}$$

Следовательно, производная ∇ однозначно определена, если мы знаем три векторных поля: $\nabla_X X$, $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ (X и Y коммутируют!) и $\nabla_Y Y$. Таким образом, достаточно определить шесть вещественнозначных функций

$$\Gamma_{11,1} = \langle X, \nabla_X X \rangle, \Gamma_{11,2} = \langle Y, \nabla_X X \rangle, \Gamma_{21,1} = \Gamma_{12,1} = \langle X, \nabla_X Y \rangle,$$

$$\Gamma_{21,2} = \Gamma_{12,2} = \langle X, \nabla_X Y \rangle, \Gamma_{22,1} = \langle X, \nabla_Y Y \rangle, \Gamma_{11,2} = \langle Y, \nabla_Y Y \rangle.$$

Для нахождения этих функций (в терминах E, F, G и их частных производных) вычислим, используя (5), частные производные функций $E = \langle X, X \rangle$, $F = \langle X, Y \rangle$ и $G = \langle Y, Y \rangle$. Получим невырожденную систему линейных уравнений относительно $\Gamma_{ij,k}$. Это доказывает единственность. Теперь можно проверить, что операция ∇ , построенная по функциям $\Gamma_{ij,k}$, действительно удовлетворяет аксиомам (1)–(6). Детали оставляются читателю.

Следующее упражнение требует довольно длинных вычислений.

Упражнение 6.2.5. Используя формулы (5.9) и (5.10), повторите рассуждения и найдите явные координатные выражения для дифференцирования на сфере и гиперболической плоскости. Используя (5.8), перепишите формулу евклидовой производной (см. упражнение 6.2.3) в полярных координатах.

6.2.2. Аналитическая мотивировка. Обратимся еще раз к проблеме, с которой мы столкнулись в пункте 6.1.1. Она состояла в том, что мы не могли применить правило дифференцирования произведения к риманову скалярному произведению двух векторных полей. Выберем точку p и зафиксируем координаты (x, y) так, чтобы $E = G = 1$ и $F = 0$ в самой точке p (для упрощения выкладок). Положим $p = \gamma(0)$ и рассмотрим два векторных поля $V(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $W(t) = (w_1(t), w_2(t))$ вдоль γ . Вычисления будем производить в точке p .

Применяя правило дифференцирования сложной функции так же, как в разделе 6.1.1, получаем

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle \dot{V}, W \rangle + \langle V, \dot{W} \rangle + 2S(V, W),$$

где

$$2S(V, W) = \frac{dE}{dt} v_1 w_1 + \frac{dF}{dt} v_1 w_2 + \frac{dF}{dt} v_2 w_1 + \frac{dG}{dt} v_2 w_2,$$

и \dot{V} , \dot{W} — координатные производные по t : $\dot{V} = (\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t))$, $\dot{W} = (\dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t))$.

Полученная формула отличается от привычного нам правила дифференцирования членом $2S(V, W)$, не содержащим производных от V и W , где S — просто симметричная билинейная форма. Возникает желание подправить $\dot{V} = dV/dt$ и $\dot{W} = dW/dt$ таким образом, чтобы правило дифференцирования произведения выполнялось. Кажется естественным “приписать по половине выражения $2S$ к \dot{V} и \dot{W} ”, придавая нашей формуле наиболее симметричный вид (не случайно мы поставили коэффициент 2 перед S). Определим ковариантную производную следующей формулой:

$$(6.4) \quad \frac{DV}{dt} = \left(\dot{v}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dE}{dt} v_1 + \frac{dF}{dt} v_2 \right), \dot{v}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dt} v_1 + \frac{dG}{dt} v_2 \right) \right)$$

(напомним, что $E = G = 1$, $F = 0$ в точке p !). Тогда, конечно, $\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle = \langle \dot{V}, W \rangle + S(V, W)$, и

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle.$$

Вообще говоря, априори не ясно, имеет ли такое определение DV/dt геометрический смысл (то есть не зависит от выбора координат). Однако, можно убедиться, что определенная таким образом производная DV/dt удовлетворяет аксиомам (1)–(6) (сделайте это как упражнение!). Тогда, ввиду единственности такого дифференцирования (см. 6.2.4), производная DV/dt действительно не зависит от системы координат.

6.2.3. Другая мотивировка: ковариантное дифференцирование

на вложенных поверхностях. Давайте рассмотрим наш любимый пример вложенной поверхности, заданной отображением $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Скалярное умножение задается формулой $\langle V, W \rangle = \langle dr(V), dr(W) \rangle$, в правой части которой использовано обычное скалярное умножение в \mathbb{R}^3 . С другой стороны, можно было бы рассматривать Ω как подмножество в \mathbb{R}^3 (то есть заменить Ω на $r(\Omega)$) и воспринимать r как систему координат. Тогда касательные вектора к Ω можно воспринимать как вектора в объемлющем пространстве, а риманово скалярное произведение есть ни что иное как евклидово скалярное произведение касательных векторов.

Повторим наши вариационные рассуждения из пункта 6.1.1 с новой точки зрения. Все скалярные произведения здесь будут обычными евклидовыми скалярными произведениями в \mathbb{R}^3 . Напомним, что мы начали с гладкой кратчайшей $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ с натуральной параметризацией: $\langle dr(T), dr(T) \rangle \equiv 1$, где $d\gamma/dt = T(t)$. Вектор $dr(T)$ есть ни что иное, как вектор скорости нашей кривой $r(\gamma)$ в \mathbb{R}^3 . Выберем вектор-функцию

$V(t) = (m(t), n(t))$, $V: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $V(a) = V(b) = 0$ и рассмотрим семейство кривых $\gamma_\varepsilon = \gamma + \varepsilon V$, заданное в форме

$$\gamma_\varepsilon(t) = (x(t) + \varepsilon m(t), y(t) + \varepsilon n(t)).$$

Так как длина γ_ε достигает своего минимума при $\varepsilon = 0$, верно тождество $\frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$, где $L(\varepsilon)$ — длина кривой γ_ε . Итак,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b \sqrt{\langle dr(T) + \varepsilon \frac{d}{dt} dr(V(t)), dr(T) + \varepsilon \frac{d}{dt} dr(V(t)) \rangle} dt. \end{aligned}$$

Дифференцируя под знаком интегрирования и подставляя $\varepsilon = 0$, получим

$$(6.5) \quad \int_a^b \left\langle dr(T(t)), \frac{d}{dt} dr(V(t)) \right\rangle dt = 0.$$

Теперь мы можем *интегрировать по частям*, так как для евклидова скалярного произведения *можно* применить обычное правило дифференцирования произведения:

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \langle dr(T), dr(V) \rangle|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \langle dr(T(t)), dr(V(t)) \rangle dt.$$

Заметим, что не каждый вектор в \mathbb{R}^3 может быть представлен как $dr(V(t))$ для некоторого V : вектор $dr(V(t))$ должен быть касательным вектором к нашей поверхности. Рассуждая снова как в пункте 6.1.1, заключаем, что вектор $\frac{d}{dt} dr(T)$ должен быть ортогонален ко всем векторам, касательным к поверхности в точке $r(\gamma(t))$. Другими словами, вектор ускорения натурально параметризованной кратчайшей ортогонален поверхности в любой момент времени. Если представлять геодезическую как траекторию свободно движущейся по поверхности частицы, в вышесказанном можно узнать хорошо известный механический принцип: центростремительное ускорение ортогонально поверхности.

Единственное неудобство приведенного выше рассуждения — оно не имеет смысла в терминах внутренней геометрии поверхности. Вообразим двумерных существ, живущих на поверхности. Векторы в \mathbb{R}^3 , отличные от касательных к поверхности, не имеют смысла в их физическом мире. В наших рассуждениях возникли два объекта, выходящие за двумерные рамки, а именно, $\frac{d}{dt} dr(T(t))$ и $\frac{d}{dt} dr(V(t))$. Оба они одной природы: это производные касательного векторного поля, которые имеют нетривиальную нормальную составляющую к поверхности. Заметим, что оба вектора входят в наши формулы умноженными на вектор, касательный к поверхности,

и они могут быть заменены своими ортогональными проекциями на касательную плоскость в точке $r(\gamma(t))$. Это подсказывает следующую стратегию построения “внутреннего дифференцирования” касательных векторных полей: продифференцировать в объемлющем пространстве и спроектировать результат на касательную плоскость:

$$\frac{D}{dt}V(t) = dr^{-1}\text{Proj}_{dr(T_{\gamma(t)}\Omega)}\frac{d}{dt}dr(V(t)).$$

Если воспринимать Ω просто как множество в \mathbb{R}^3 , то формула приобретает более простой вид:

$$\frac{D}{dt}V(t) = \text{Proj}_{T_{\gamma(t)}\Omega}\frac{dV(t)}{dt}.$$

Не ясно *a priori*, почему определенная так производная $\frac{D}{dt}$ не изменится, если рассмотреть иное *изометрическое* вложение Ω в \mathbb{R}^3 , то есть вложение, индуцирующее ту же риманову метрику. Чтобы доказать, что $\frac{D}{dt}$ зависит лишь от внутренней геометрии Ω , достаточно убедиться в справедливости свойств (1)-(6) производной и применить лемму 6.2.4 (сделайте это как упражнение!).

Вторая фундаментальная форма. В заключение отметим, что нормальная составляющая производной имеет вид

$$(6.6) \quad \left\langle \frac{D}{dt}V, W \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dt}V, W \right\rangle = S(V, W).$$

Сравнивая это выражение с (6.4), можно заключить, что нормальная составляющая является симметричной билинейной формой на $T_{\gamma(0)}\Omega$. Ее значения зависят только от $V(0)$ и $W(0)$. Эта форма носит название *второй основной формы* поверхности, а ее собственные вектора и собственные числа называются главными направлениями и главными кривизнами. В то же время внутренняя геометрия поверхности определяется скалярными произведениями \langle, \rangle (так называемой *первой основной формой*, Хорошо известным фактом дифференциальной геометрии поверхностей в \mathbb{R}^3 является утверждение, что обе формы S и \langle, \rangle определяют такую поверхность с точностью до движения (теорема Бонне).

6.2.4. Параллельный перенос. Хотя выбранный здесь подход не опирается на понятие параллельного переноса, уместно дать здесь его определение и перечислить основные свойства.

Когда вводилось понятие касательного вектора, мы подчеркивали, что нет способа определить понятие “одно и то же направление” в различных точках поверхности. Однако, если в области Ω задана риманова метрика, то выбор пути γ между точками $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$

определяет некоторое естественное соответствие между $T_p\Omega$ и $T_q\Omega$. При этом достаточно предположить, что путь γ лишь кусочно гладкий.

Говорят, что векторное поле вдоль кривой γ *параллельно*, если оно удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка $DV(t)/dt = 0$. Для каждого начального значения $V(a) = W$ параллельное поле V определено единственным образом. Возникает отображение $I_\gamma(W) = V(b)$, $I_\gamma: T_p\Omega \rightarrow T_q\Omega$. Это отображение называется *параллельный перенос вдоль γ* . В силу линейной зависимости решений обыкновенного дифференциального уравнения от начальных данных отображение I_γ линейно. Более того, I_γ — линейная изометрия касательных пространств. Это следует из того, что скалярное произведение двух параллельных векторных полей есть постоянная функция. Действительно,

$$\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V(t), W(t) \right\rangle + \left\langle V(t), \frac{D}{dt} W(t) \right\rangle = 0.$$

Заметим, что гауссова кривизна (которая будет определена в следующем разделе) является некоторой мерой зависимости I_γ от γ . Используя параллельный перенос, можно вычислить ковариантную производную точно так же, как это делается в векторном анализе

$$\frac{D}{dt} V = \frac{d}{dt} \left(I_{\gamma[0,t]}^{-1} (V(\gamma(t))) \right).$$

Это — прямой аналог формулы (6.3) для производной скалярной функции.

6.3. Геодезическая и гауссова кривизны

6.3.1. Инвариантное уравнение геодезических. Чтобы наново вывести уравнения геодезических на языке ковариантных производных, повторим ход рассуждений раздела 6.1.1. Рассмотрим семейство кривых γ_ε с полем вариации $V = V_\varepsilon(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \gamma_\varepsilon(t)$, где $\gamma = \gamma_0$ является кратчайшей с натуральной параметризацией. Как обычно, через $T = T_\varepsilon(t) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_\varepsilon(t)$ обозначим поле скоростей семейства γ_ε . Здесь и далее мы не предполагаем, что концы кривой γ_ε имеют неподвижными. Итак,

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \sqrt{\langle T, T \rangle} dt$$

(так как $\langle T_0(t), T_0(t) \rangle = 1$)

$$= \int_a^b \left\langle \frac{D}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} T, T \right\rangle dt = \int_a^b \langle \nabla_V T(t), T(t) \rangle dt.$$

Поскольку V и T коммутируют, мы имеем, по аксиоме (6), $\nabla_V T = \nabla_T V$ и, значит,

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\langle T(t), \frac{D}{dt} V(t) \right\rangle dt = 0.$$

Используя правило

$$\frac{d}{dt} \langle V, T \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} T, V \right\rangle + \left\langle T, \frac{D}{dt} V \right\rangle,$$

дифференцирования скалярного произведения, получаем окончательно

$$(6.7) \quad \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \langle V, T \rangle|_a^b - \int_a^b \left\langle \frac{D}{dt} T(t), V(t) \right\rangle dt.$$

Эту формулу обычно называют формулой первой вариации. Предположим теперь, что концы кривых γ_ε неподвижны. Тогда $\langle V, T \rangle|_a^b = 0$. В этом случае $\frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$ для любого поля V (так как γ_0 — кратчайшая). Рассуждая по аналогии с разделом 6.1.1, мы получаем очень простое дифференциальное уравнение

$$(6.8) \quad \frac{D}{dt} T(t) = 0, \text{ или в иных обозначениях } \nabla_T T = 0.$$

Определение 6.3.1. Кривая γ называется *геодезической* если ее вектор скорости T удовлетворяет уравнению (6.8).

Таким образом, понятие геодезической является прямым обобщением понятия прямой в евклидовом пространстве: прямая линия — это кривая, которую мы проходим с постоянным вектором скорости. Здесь же под “постоянством” вектора скорости мы понимаем равенство нулю его *ковариантной* производной.

В этой инвариантной форме уравнение (6.8) имеет смысл в любой размерности.

Заметим, что каждая геодезическая параметризована пропорционально длине дуги (так как $\frac{d}{dt} \langle T, T \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} T, T \right\rangle = 0$).

Упражнение 6.3.2. Докажите, что в размерности два определения 5.2.1 и 6.3.1 равносильны.

Упражнение 6.3.3. Передокажите результаты разделов 5.2.2 и 5.2.1, используя новое определение геодезической.

6.3.2. Первая вариация длины кривой. Геодезическая кривизна.

Обратите внимание, что правая часть выражения для первой вариации (6.7) зависит только от векторного поля V и не зависит непосредственно от выбора самого семейства γ_ε . Уравнение (6.7) часто называют *формулой первой вариации длины*, так как она описывает как изменяется длина кривой при “сдвигах вдоль векторного поля V ”. Напомним, что эта формула верна для натурально параметризованной кривой. Обратите внимание, что уравнение (6.7) для риманова многообразия имеет тот же вид, что и в случае евклидовой плоскости. Это отражает тот факт, что риманово многообразие является “евклидовым в первом приближении”.

Если γ является геодезической, та формула приобретает следующий простой вид:

$$(6.9) \quad \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \langle V, T \rangle|_a.$$

Из этого уравнения можно извлечь особенно много, если ограничиться окрестностью, в которой кратчайшая между любыми двумя точками единственна. Пусть $\sigma(\tau)$ — гладкий путь, $V = \frac{d}{d\tau}\sigma$ — его поле скоростей, а $\rho(\tau) = d(p, \sigma(\tau))$ — расстояние от p до “движущейся точки” $\sigma(\tau)$. Применим формулу (6.7) к семейству кратчайших γ_τ , соединяющих p и $\sigma(\tau)$. Учитывая, что соответствующее поле вариации обращается в ноль в точке p , мы получаем уравнение

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \langle V, T \rangle,$$

где T — касательный вектор к γ_τ в концевой точке $\sigma(\tau)$. Другими словами, производная функции расстояния от точки p до точки, движущейся с единичной скоростью, равна минус косинусу угла между вектором скорости точки и направлением в ней на точку p (последнее есть $-T$).

Упражнение 6.3.4. Где использована единственность кратчайших в предыдущем рассуждении?

Упражнение 6.3.5. Пусть $\sigma(t)$ — гладкая замкнутая кривая, $\sigma(t_0)$ — ближайшая к точке p точка кривой σ . Покажите, что каждая кратчайшая, соединяющая p и $\sigma(t_0)$, ортогональна к (вектору скорости) кривой σ в точке t_0 .

Рассмотрим теперь случай, когда кривая γ не обязательно геодезическая. Заметим, что вектор $\nabla_T T = \frac{D}{dt}T(t)$ всегда ортогонален к $T(t)$. Действительно,

$$0 = \frac{d}{dt} \langle T(t), T(t) \rangle = 2 \left\langle T(t), \frac{D}{dt}T(t) \right\rangle.$$

Число $|\frac{D}{dt}T(t)| = k_g(t)$ называется *геодезической кривизной* кривой в точке $\gamma(t)$. В размерности два можно, выбирая ориентацию, приписать этой величине знак $+$ или $-$. В старших размерностях вектор $S(t) = \frac{D}{dt}T(t)$ часто называют *вектором кривизны*. На самом деле, это — ни что иное, как значение второй фундаментальной формы кривой (рассматриваемой как одномерное подмногообразие) на векторе T : сравните это определение с (6.6). Это дает новую геометрическую интерпретацию второй фундаментальной форме: она описывает, как изменяется метрика подмногообразия при его варьировании. Для вариации с фиксированными концами (или, более общо, когда поле вариации на концах ортогонально

к кривой) слагаемое $\langle V, T \rangle|_a^b$ исчезает и (6.7) приобретает вид

$$(6.10) \quad \frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \langle -S(t), V(t) \rangle dt.$$

Упражнение 6.3.6. 1. Покажите, что для произвольной параметризации кривой γ

$$S(t) = \frac{(\nabla_T T)_N}{\langle T, T \rangle},$$

где $(\nabla_T T)_N$ — ортогональная к T составляющая вектора $\nabla_T T$.

2. Пусть поле вариации V ортогонально к T . Покажите, сделав замену переменных в (6.7), покажите, что для произвольной параметризации

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\langle \frac{\nabla_T T}{\sqrt{\langle T, T \rangle}}, V(t) \right\rangle dt.$$

Упражнение 6.3.7. Выполните такие же вычисления для кривых в евклидовых пространствах \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Сравните S с хорошо известным понятием кривизны кривой в дифференциальной геометрии. Изучите изменение длин эквидистант замкнутой плоской кривой при отступлении внутрь по нормали.

6.3.3. Тензор кривизны. Выберем систему координат (x, y) . Пусть X и Y — координатные векторные поля (читатель, который рассматривает многомерную ситуацию, может взять первые два координатных поля). Поля X и Y коммутируют как дифференциальные операторы на пространстве функций, то есть $XYf = YXf$ для любой гладкой функции f . Однако, в отличие от евклидового случая, операторы $\nabla_X = \frac{D}{dx}$ и $\nabla_Y = \frac{D}{dy}$ не коммутируют: для векторного поля Z , вообще говоря, $\nabla_X \nabla_Y Z \neq \nabla_Y \nabla_X Z$.

Разность $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z$ называется *оператором кривизны*. Скалярная функция $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ четырех векторных аргументов X, Y, Z, W называется *тензором кривизны*. Это определение предполагает зависимость от четырех векторных полей, причем первые два из них — координатные поля некоторой системы координат. Ясно, что функция $R(X, Y)Z$ линейна по всем трем аргументам. Следующие упражнения показывают, что значение $R(X, Y)Z$ в точке p зависит *только от значений X, Y и Z в точке p* ! Доказательства опираются на прямые вычисления с использованием аксиом ковариантного дифференцирования.

Упражнение 6.3.8. Покажите, что для любой гладкой функции f

- (1) $\nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) = f \cdot (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z),$
- (2) $\nabla_X \nabla_{(fY)} Z - \nabla_{(fY)} \nabla_X Z = f \cdot (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z).$

Упражнение 6.3.9. Покажите, что

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$, в частности, $R(X, X)Z = 0$,
 (2) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Упражнение 6.3.10. Используя два предыдущих упражнения, покажите, что $R(X, Y)Z = 0$ в точке p , если хотя бы одно из полей X, Y или Z — нулевое в p . Выведите отсюда, что значение $R(X, Y)Z$ в точке p зависит лишь от значений полей X, Y и Z в точке p !

Для двух векторов $X, Y \in T_p\Omega$ обозначим $K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$. Выберем два вектора $X, Y \in T_p\Omega$ так, что площадь натянутого на них параллелограмма равна 1 (площадь относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$). Например, мы можем выбрать два единичных ортогональных друг другу вектора. Величина $K(p) = K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$ называется *секционной кривизной* в точке p . В размерности два секционная кривизна совпадает с гауссовой кривизной поверхности.

Упражнение 6.3.11. Используя свойство симметрии тензора R (в частности, свойство $R(X + \alpha Y, Y)Z = R(X, Y)Z$; смотри 6.3.9), покажите, что $K(X, Y)$ зависит только от площади параллелограмма, натянутого на X, Y , и, значит, секционная кривизна $K(p)$ корректно определена.

Упражнение 6.3.12. Покажите, что если риманову метрику умножить на константу c (при этом компоненты метрического тензора умножатся на c^2), то ее гауссова кривизна поделится на c^2 .

Упражнение 6.3.13. Используя упражнение 6.2.5, вычислите гауссову кривизну сферы и гиперболической плоскости.

Упражнение 6.3.14. Пусть X и Y — два взаимно ортогональных вектора. Докажите, что вектор $R(X, Y)Z$ можно получить поворотом вектора $|K(p)|Z$ на угол $\pi/2$ в направлении, зависящем от знака $K(p)$. Можно ли обобщить это построение на случай старших размерностей?

Важность гауссовой (секционной) кривизны будет объяснена в следующем разделе. Этот раздел мы завершим одним замечанием для случая старших размерностей. В наших двумерных рассуждениях термины “секционная кривизна” и “гауссова кривизна” взаимозаменяемы. С другой стороны, в двумерном случае термин “секционная кривизна” звучит довольно странно. Объяснение, почему в старших размерностях эта кривизна называется “секционной”, дано в следующих трех упражнениях. Мы предлагаем их в первую очередь тем читателям, которые желают проследить параллели между двумерным и многомерным случаями.

Упражнение 6.3.15. Покажите, что $K(X, Y) = K(X_1, Y_1)$, если параллелограммы, натянутые на X, Y и X_1, Y_1 лежат в одной двумерной плоскости и имеют одинаковые площади. Таким образом, $K(X, Y)$ зависит только от $X \wedge Y$.

Пусть σ — двумерная плоскость в $T_p\Omega$. Определим $K_\sigma = K(X, Y)$, где X и Y — взаимно ортогональные векторы из σ . Или, равносильно, $K_\sigma = \frac{K(X, Y)}{\|X \wedge Y\|^2}$.

Упражнение 6.3.16. Рассмотрите двумерную поверхность в Ω , полученную сужением отображения \exp_p на малую окрестность начала координат в σ . Снабдите ее метрикой, индуцированной из Ω . Можно рассматривать эту поверхность как двумерное сечение Ω , образованное “вращением” геодезических, проходящих через точку p и таких, что их касательные вектора заметают σ . Покажите, что секционная кривизна $K_\sigma(p)$ равна гауссовой кривизне этой двумерной поверхности в точке p .

Упражнение 6.3.17. Рассмотрите пространство $S^2 \times S^2$ (с метрикой произведения). Используя линейность оператора кривизны, выясните как в нем секционная кривизна зависит от (двумерного) направления σ . Предполагается известным, что кривизна единичной сферы равна 1. Сделайте то же самое для других произведений. Например, для произведений евклидовой и гиперболической плоскости, сферы и гиперболической плоскости.

Параллельный перенос и кривизна. Формула Гаусса-Бонне.

Существует еще одно описание кривизны — основанное на понятии параллельного переноса. Пусть $X, Y \in T_p\Omega$ — такие два вектора, что площадь натянутого на них параллелограмма равна 1. Рассмотрим замкнутый путь γ , $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Параллельный перенос I_γ определяет линейную изометрию $T_p\Omega$ на себя. Тогда

$$(6.11) \quad R(X, Y)Z = (I_\gamma(Z) - Z)\text{Area}(\gamma) + o(\text{Area}(\gamma)),$$

где $\text{Area}(\gamma)$ — (ориентированная) риманова площадь области, ограниченной кривой γ . Заметим, что формула (6.11) легко следует из определения оператора кривизны, если в качестве γ взять прямоугольник, образованный координатными линиями системы координат, имеющей вектора X и Y в точке p в качестве базисных векторов. Эта формула означает, что если вектор переносится параллельно вдоль малой петли, то он претерпевает поворот на угол, близкий к произведению гауссовой кривизны в этой точке на площадь области, ограниченной этой петлей. Формулу (6.11) можно легко обобщить на случай больших размерностей (в терминах дифференциальных 2-форм или с использованием некоторого условия, формализующего то, что “ γ ограничивает область на некоторой двумерной поверхности, касающейся векторов X и Y ”). В двумерном случае формула (6.11) влечет формулу Гаусса-Бонне.

Теорема 6.3.18. Пусть гладкая замкнутая кривая γ ограничивает односвязную область Ω . Тогда

$$\int_{\Omega} K(p) dA(p) = \int_{\gamma} k_g(t) dt - 2\pi,$$

где γ параметризована длиной, а $\int_{\Omega} K(p) dA(p)$ — интеграл гауссовой кривизны по (римановой) площади.

Если кривая γ является только кусочно-гладкой, то к правой части последнего равенства необходимо добавить величину $\pi - \alpha_i$ для каждой вершины с внутренним углом α_i .

Для лучшего понимания этой теоремы примените ее к (1) гладкой плоской кривой, (2) евклидову треугольнику, (3) большой окружности на сфере и (4) каждой из двух областей, ограниченных малой окружностью на сфере.

Доказательство теоремы 6.3.18 и формулы (6.11) опущены, так как мы не будем их использовать. Доказательство формулы Гаусса-Бонне для гиперболических и сферических треугольников можно найти в разделе 5.3.

6.4. Геометрический смысл гауссовой кривизны

Основное свойство, отличающее римановы от других метрических пространств — локальная “почти евклидовость”. Лемма 5.1.13 утверждает, что каждая точка p обладает координатной окрестностью, в которой отличие метрики от естественной евклидовой (индуцированной системой координат) имеет меньший порядок малости, чем расстояние до точки p . Здесь мы усилим это утверждение, показав, что подходящим образом выбранные нормальные координаты не искажают метрику даже во втором порядке, а искажение третьего порядка малости зависит от гауссовой кривизны.

Существует два подхода к определению искажения расстояний в нормальных координатах. Напомним, что одно семейство координатных линий составляют геодезические, вдоль которых метрика сохраняется. Значит, искажение возникает из-за различия в расстояниях между близкими геодезическими в случаях римановой и евклидовой метрик. Мы увидим, что скорость удаления друг от друга геодезических римановой метрики удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка (уравнению Якоби), которое отличается от соответствующего уравнения для евклидова пространства одним, содержащим кривизну, слагаемым.

Этот подход реализован в разделе “Уравнение Якоби”. Его преимущество состоит в том, что общее определение ограниченности кривизны для пространств с внутренней метрикой дано в тех же терминах.

Напомним, что второе семейство координатных линий нормальных координат ортогонально семейству геодезических. Мы увидим, что это семейство состоит из эквидистантных кривых, причем имеется естественное соответствие между точками разных эквидистант, осуществляемое вдоль геодезических. Таким образом, можно измерять искажение метрики изменением длин эквидистантных кривых при движении вдоль семейства геодезических. Мы увидим, что первая производная длины эквидистанты определяется ее геодезической кривизной, а вторая производная снова контролируется гауссовой кривизной метрики. Этот подход реализован в следующем разделе 6.4.1. Его преимущество состоит в простоте обобщения по размерности (с заменой эквидистант “параллельными” гиперповерхностями). К сожалению, не удалось найти аналог этого подхода для общих пространств с внутренней метрикой.

Дальнейшие геометрические выводы можно получить на основе любого из этих двух подходов.

6.4.1. Уравнение Якоби. Рассмотрим нормальную систему координат (x, y) с координатными векторными полями X, Y . Напомним, что первое координатное семейство — параметризованные длиной дуги геодезические. Они ортогональны координатным линиям второго семейства. В частности, это означает, что $\nabla_X X = \frac{D}{dx} X = 0$. Продифференцируем это равенство по y :

$$\nabla_Y \nabla_X X = \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} X = 0.$$

Теперь мы хотим поменять порядок дифференцирования. Но ковариантные производные по x и y не коммутируют; их коммутатор как раз и служил в предыдущем разделе определением оператора кривизны:

$$R(X, Y)X = \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X = -\nabla_X \nabla_Y X = -\nabla_X \nabla_X Y.$$

Последнее равенство следует из аксиомы (6) ковариантного дифференцирования ($\nabla_X Y = \nabla_Y X$ для коммутирующих векторных полей X, Y). Обозначив через $\frac{D^2}{dx^2}$ выражение $\nabla_X \nabla_X = \frac{D}{dx} \frac{D}{dx}$, мы получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно поля Y — так называемое *уравнение Якоби*

$$(6.12) \quad \frac{D^2}{dx^2} Y = -R(X, Y)X.$$

Заметим, что поле Y есть ни что иное, как варьирующее поле для семейства геодезических. То, что эти геодезические — координатные линии, не имеет значения, ибо те же доводы можно повторить для произвольной вариации. Дадим следующее определение.

Определение 6.4.1. Векторное поле $Y(t)$ вдоль геодезической $\gamma(t)$ называется *полем Якоби*, если оно удовлетворяет уравнению (6.12).

Упражнение 6.4.2. Покажите, что каждое поле Якоби вдоль γ может быть получено как поле вариации путем включения γ в некоторое семейство геодезических.

Подсказка. Так как поле Якоби Y удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, оно однозначно определено своими начальными данными для задачи Коши, то есть значением $Y(t_0)$ и производной $\frac{D}{dt}Y$ в момент времени t_0 . С другой стороны, достаточно просто включить кривую γ в семейство геодезических, для которого варьирующее поле Y_1 удовлетворяет тем же начальным условиям. Ввиду единственности решения задачи Коши отсюда следует, что $X = Y$, так как поле Y_1 должно удовлетворять тому же уравнению (6.12).

Рассмотрим поле Якоби $Y(t)$ вдоль геодезической $\gamma(t)$. Предположим, что это поле ортогонально к $\gamma(t)$. Пусть T — поле скоростей кривой γ , $g(t)$ — длина вектора $Y(t)$. Предположим, что $g(t) \neq 0$. Тогда можно записать $g(t) = |Y(t)| = \langle Y(t), N(t) \rangle$, где $N = |Y|^{-1}Y$ — единичное векторное поле, ортогональное к γ . Расстояние между $\gamma(t)$ и $\gamma_\varepsilon(t)$ составляет примерно $\varepsilon g(t)$ (с точностью до $o(\varepsilon)$).

Замечание. Наше определение поля N предполагает, что $|Y| \neq 0$. Все построения могут быть гладко продолжены на замыкание интервала, где g и Y — не нулевые. Все выводы этого раздела имеют силу *только* для t из такого промежутка.

Следующая очевидная лемма будет весьма полезна.

Лемма 6.4.3. *Ковариантная производная единичного векторного поля ортогональна этому полю: $\langle \nabla_Z W, W \rangle = 0$, где W — единичное поле, Z — произвольное поле.*

Доказательство. Дифференцирование тождества $\langle W, W \rangle = 1$ дает

$$0 = Z \langle W, W \rangle = 2 \langle \nabla_Z W, W \rangle.$$

□

Проведем некоторые предварительные вычисления. Дифференцируя выражение $\langle N, T \rangle = 0$, получаем

$$0 = \frac{d}{dt} \langle N, T \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} N, T \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} T, N \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} N, T \right\rangle,$$

поскольку γ — геодезическая и, по определению, $\frac{D}{dt} T = 0$. Итак, мы имеем

$$(6.13) \quad \left\langle \frac{D}{dt} N, T \right\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{D}{dt} N, N \right\rangle = 0,$$

где последнее тождество следует из леммы 6.4.3. Поскольку Y пропорционально N , то второе из уравнений (6.13) дает $\frac{D}{dt} \langle N, T \rangle = 0$.

Подсчитаем вторую производную функции g . Используя последнее уравнение, запишем

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} \langle Y, N \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} Y, N \right\rangle.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{dt} Y, N \right\rangle = \left\langle \frac{D^2}{dt^2} Y, N \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} Y, \frac{D}{dt} N \right\rangle.$$

Используя равенство $\frac{D}{dt} Y = \frac{D}{dt}(gN) = \frac{dg}{dt}N + g\frac{D}{dt}(N)$, можно переписать это тождество в виде

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{dt} Y, N \right\rangle = \left\langle \frac{D^2}{dt^2} Y, N \right\rangle + g \left\langle \frac{D}{dx} N, \frac{D}{dx} N \right\rangle.$$

Заметим, что в силу уравнения Якоби (6.12),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D^2}{dt^2} Y, N \right\rangle &= -\langle R(T, Y)T, N \rangle \\ &= -\langle R(T, gN)T, N \rangle = -g \langle R(T, N)N, T \rangle = -gK, \end{aligned}$$

где K — гауссова (секционная) кривизна; последнее равенство следует из того, что T и N — единичные взаимно ортогональные векторы. Итак, уравнение Якоби порождает следующее дифференциальное уравнение относительно функции g :

$$(6.14) \quad \frac{d^2 g}{dt^2} = -g \left(K + \left\langle \frac{D}{dx} N, \frac{D}{dx} N \right\rangle \right),$$

где $K = K(\gamma(t))$ — гауссова кривизна в точке $\gamma(t)$.

Заметим, что вектор $\frac{D}{dt}N$ ортогонален к T и N одновременно. Следовательно, в двумерном случае уравнение (6.14) упростится и примет вид

$$(6.15) \quad \frac{d^2 g}{dt^2} = -gK.$$

Важное замечание. Мы достигли того места в изложении, где появляется существенное различие между двумерной ситуацией и старшими размерностями. В двумерном случае направление вектора Y полностью определяется условием его ортогональности к T . Поэтому мы можем свести уравнение Якоби (6.12) к скалярному уравнению относительно длины векторного поля Y . В старших размерностях в уравнении (6.12) участвуют как длина, так и направление поля Y . Сложность случая старших размерностей объясняется тем, что геодезические нашего семейства могут “закручиваться вокруг γ ” (относительно базиса из параллельных

полей). Важно помнить, что уравнение, которое мы получили для двумерного случая, *неверно* в старших размерностях! Однако, основной геометрический вывод — теорема сравнения Рауха 6.5.1 — остается верным. Одно из ее возможных доказательств опирается на вычисления в базисе из *параллельных векторных полей вдоль γ* , то есть полей, ковариантные производные которых вдоль γ равны нулю. Одно такое поле — это поле T . В двумерном случае вторым таким полем с необходимостью является поле N . В следующем разделе описан альтернативный подход с использованием понятия эквидистантной вариации. Этот подход легко обобщается на старшие размерности и может быть использован вместо теоремы Рауха для доказательства теоремы сравнения Картана–Александрова–Топоногова. Отметим также, что многие геометрические выводы могут быть получены уже из неравенства $\frac{d^2g}{dx^2} \geq -gK$, вытекающего из (6.14).

Эквидистантные вариации. В предыдущем разделе гауссова кривизна описывалась как количественная характеристика расхождения или сближения геодезических. Существует альтернативный подход, позволяющий избежать уравнения Якоби и имеющий с точки зрения римановой геометрии ряд преимуществ (в частности, легкость перехода к старшим размерностям). С другой стороны, он применим лишь к гладким многообразиям.

Основная идея состоит в рассмотрении не пучка геодезических, а семейства ортогональных им кривых (гиперповерхностей — в старших размерностях). В нормальной системе координат — это второе семейство координатных линий. Расстояние между двумя близкими геодезическими примерно равно длине заключенного между ними отрезка ортогональной к ним кривой. Это наталкивает на мысль изучить, как изменяются длины эквидистант. Удобно рассматривать второе семейство как вариацию кривой (в старших размерностях — как вариацию гиперповерхности).

Пусть γ_ε — семейство кривых, варьирующее поле V которого является единичным векторным полем, ортогональным к кривым семейства, то есть $\langle V, V \rangle = 1$ и $\langle V, T \rangle = 0$ (где $T = \frac{d}{dt}\gamma$). Для краткости мы везде опускаем аргументы t и ε . Такая вариация называется *эквидистантной*. Следующее упражнение объясняет происхождение этого названия.

Упражнение 6.4.4. Докажите, что для всех достаточно малых ε и любого фиксированного t_0

$$\inf_t \{d(\gamma_\varepsilon(t_0), \gamma_0(t))\} = \varepsilon,$$

Другими словами, все точки кривой γ_ε лежат на одинаковом расстоянии ε от (образа) кривой γ_0 .

Подсказка. Используйте тот факт, что линии $\sigma(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon(t)$ — геодезические (см. ниже пункт (ii) леммы 6.4.6). Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству леммы Гаусса.

Предположим, что кривая $\gamma = \gamma_0$ параметризована длиной дуги.

Согласно формуле первой вариации (6.10),

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma_\varepsilon, a, b) = \int_a^b \langle -S, V \rangle dt = \int_a^b -k_g(t) dt,$$

где $S = \nabla_T T$, а $k_g = \langle \nabla_T T, V \rangle$, — геодезическая кривизна кривой γ в точке t (ее знак выбирается в соответствии с ориентацией, заданной вектором V). Это означает, что кривые нашего семейства сближаются (если $k_g > 0$) или расходятся (если $k_g < 0$) со скоростью, пропорциональной кривизне.

Упражнение 6.4.5. Покажите, что для вариации, индуцированной полем fV , где V — ортогональное к кривой единичное векторное поле, а f — скалярная функция, справедливо равенство

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma_\varepsilon, a, b) = \int_a^b -f(t)k_g(t) dt.$$

Ниже нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 6.4.6. В введенных обозначениях

$$(i) \langle \nabla_T V, V \rangle = \langle \nabla_V V, V \rangle = 0;$$

(ii) $\nabla_V V = 0$, (то есть кривые, ортогональные к кривым семейства γ_ε , являются геодезическими);

$$(iii) \langle \nabla_T \nabla_V T, V \rangle = -\langle \nabla_T V, \nabla_T V \rangle;$$

$$(iv) \langle \nabla_T V, \nabla_T V \rangle = \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle = k_g^2 \text{ вдоль } \gamma_0.$$

Доказательство. (i) Это верно просто потому, что V — единичное векторное поле (лемма 6.4.3).

(ii) Поскольку $\langle V, T \rangle = 0$, то

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \langle V, T \rangle = \langle \nabla_V V, T \rangle + \langle V, \nabla_V T \rangle \\ &= \langle \nabla_V V, T \rangle + \langle V, \nabla_T V \rangle = \langle \nabla_V V, T \rangle + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = \langle \nabla_V V, T \rangle. \end{aligned}$$

Вместе с пунктом (i) это показывает, что вектор $\nabla_V V$ равен нулю, так как он ортогонален V и T .

(iii) Дифференцируя равенство $\langle \nabla_T V, V \rangle = 0$ (которое следует из (i)), получаем

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \nabla_T V, V \rangle = \langle \nabla_T \nabla_V T, V \rangle + \langle \nabla_T V, \nabla_T V \rangle.$$

Но $\nabla_T V = \nabla_V T$ (так как T и V коммутируют). Это влечет (iii).

(iv) Поскольку $|k_g| = |\nabla_T T|$, равенство $\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle = k_g^2$ очевидно. Дифференцируя равенство $\langle V, T \rangle = 0$, имеем

$$0 = \frac{d}{dt} \langle T, V \rangle = \langle \nabla_T T, V \rangle + \langle T, \nabla_T V \rangle.$$

Поля V и T — единичные, следовательно, вектор $\nabla_T T$ коллинеарен V , а $\nabla_T V$ коллинеарен T . Значит, $|\nabla_T T| = |\nabla_T V|$. Пункт (iv) доказан. \square

Замечание. Может показаться, что при доказательстве пункта (ii) двумерность пространства была существенна. Это не так. Покажите, что интегральные кривые эквидистантной вариации гиперповерхности являются геодезическими. Для этого достаточно показать, что $\nabla_V V$ ортогонален к V и ко всем векторам, касательным к этой гиперповерхности.

Рассмотрим теперь вторую производную длины, то есть изучим как меняется k_g при изменении параметра ε . Имеем

$$\frac{dk_g}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \langle \nabla_T T, V \rangle = \langle \nabla_V \nabla_T T, V \rangle + \langle \nabla_T T, \nabla_V V \rangle = \langle \nabla_V \nabla_T T, V \rangle,$$

так как $\nabla_V V = 0$ согласно 6.4.6, (ii).

После изменения порядка дифференцирования в $\langle \nabla_V \nabla_T T, V \rangle$ появляется оператор кривизны:

$$\frac{dk_g}{d\varepsilon} = \langle \nabla_T \nabla_V T, V \rangle + \langle R(T, V)T, V \rangle.$$

Второе слагаемое — гауссова кривизна (так как V и T образуют ортонормированный базис). Согласно лемме 6.4.6 и пунктам (iii) и (iv), первое слагаемое — это $-k_g^2$. Итак, мы получили так называемое “уравнение Рикати”.

Лемма 6.4.7. *Геодезическая кривизна эквидистант удовлетворяет уравнению*

$$(6.16) \quad \frac{dk_g}{d\varepsilon} = -k_g^2 + K.$$

Замечание. Равенство 6.16 можно принять в качестве альтернативного определения гауссовой кривизны.

Упражнение 6.4.8. Примените лемму 6.4.7 к направленной внутрь круга эквидистантной вариации евклидовой окружности (знак k_g зависит от направления вариации). Обратите внимание, что когда ε станет равным радиусу окружности, k_g обратится в бесконечность (окружность выродится в точку).

Упражнение 6.4.9. Примените лемму 6.4.7 к обращенной вонне эквидистантной вариации окружности на плоскости Лобачевского. Чему равен предел k_g при $\varepsilon \rightarrow \infty$? Сделайте то же самое для окружности на сфере.

Следующее упражнение позволит нам сравнивать геодезические кривизны соответствующих кривых из эквидистантных семейств двух метрик в зависимости от гауссовых кривизн последних.

Упражнение 6.4.10. Пусть $\gamma_\varepsilon(t)$, $\sigma_\varepsilon(t)$ — эквидистантные семейства кривых в областях Ω и Ω_1 . Предположим, что вариации определены в одной области (ε, t) -плоскости. Также считаем, что геодезические кривизны кривых γ_0 и σ_0 в точке t_0 равны, а гауссовы кривизны областей Ω и Ω_1 таковы, что $K(\gamma_\varepsilon(t_0)) \geq K(\sigma_\varepsilon(t_0))$ для всех ε из области задания. Докажите, что тогда при t_0 и при всех таких ε геодезические кривизны кривых γ_ε не более геодезических кривизн кривых σ_ε .

Это упражнение является аналогом теоремы 6.5.1 и может быть использовано вместо нее при доказательстве основной теоремы 6.5.4. Обратите внимание, что в теореме 6.5.1 поле $Y(t)$ не обращается в ноль. Утверждение теоремы перестает быть верным после точки, в которой поле $Y(t)$ обращается в ноль (такая точка называется *сопряженной* с точкой $\gamma(0)$ вдоль кривой γ). Аналогом этого условия в упражнении 6.4.10 является предположение, что все кривые эквидистантного семейства являются гладкими, то есть k_g не обращается в бесконечность. Точка, в которой эквидистантная кривая имеет особенность $k_g = \infty$, называется *фокальной*.

Упражнение 6.4.11. Покажите, что для плоской кривой $\gamma(t)$ ее фокальные точки образуют кривую $\gamma(t) + (1/k_g(t))N(t)$, где $N(t)$ — единичное ортогональное к кривой векторное поле.

Число $1/k_g(t)$ называется *радиусом кривизны γ в точке $\gamma(t)$* .

Можно предложить следующую плодотворную стратегию изучения геометрии (или топологии) риманова многообразия ограниченной кривизны с использованием леммы 6.4.7 (или результата упражнения 6.4.10): надо сравнить эквидистантные семейства гиперповерхностей в рассматриваемом пространстве с эквидистантными семействами гиперповерхностей в подходящем модельном пространстве (обычно постоянной кривизны).

6.4.2. Искажение метрики при экспоненциальном отображении.

Результаты этого раздела можно вывести с помощью результатов любого из двух предыдущих разделов. Мы будем опираться на уравнение Якоби, другой подход сформулируем лишь как упражнение. Применим уравнение (6.15) к первому координатному семейству нормальной системы координат с центром в точке p . Метрические коэффициенты имеют в ней простой вид: $G = \langle Y, Y \rangle$ — единственный нетривиальный коэффициент, а $E = \langle X, X \rangle = 1$, $F = \langle X, Y \rangle = 0$. Обозначив $g = |Y| = \sqrt{G}$, мы можем

записать

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial x^2} = -K \sqrt{G}.$$

Это уравнение описывает удаление (или сближение) очень близких между собой координатных линий.

Если геодезическая $\gamma(t)$ включена в семейство геодезических $\gamma_\varepsilon(t)$, $\gamma = \gamma_0$ и поле вариации $Y(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \gamma_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=t=0}$ ортогонально к $\dot{\gamma}(0)$, то длина $g(t)$ этого векторного поля удовлетворяет уравнению

$$(6.17) \quad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -K(t)g(t),$$

где $K(t) = K(\gamma(t))$ — гауссова кривизна в точке $\gamma(t)$.

Напомним, что это уравнение выполняется только до тех пор, пока $g(t) \neq 0$. Условие $g(t) = 0$ (при $t > 0$) геометрически означает, что близкая геодезическая с точностью до второго порядка малости касается γ . В нормальной системе координат с центром в точке p выполняется $g(0) = G(0, y) = 0$, поскольку $Y = 0$ в точке p . При этом $dg/dt(0) = 1$, что является более тонким утверждением. Оно следует из леммы 5.1.13 (две координатные линии, исходящие из p расходятся (с точностью до первого порядка) с такой же скоростью, как и два евклидовых луча, образующих в начальной точке между собой тот же угол). Следовательно, согласно (6.17), $d^2 g/dt^2(0) = 0$ и $g(t) = t + o(t^2)$. Подставляя это опять в (6.17), получаем

$$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = -Kt + o(t^2) \quad \text{и, значит,} \quad \frac{d^3 g}{dt^3}(0) = -K.$$

Иными словами, в нормальных координатах

$$(6.18) \quad \sqrt{G(x, y)} = x - \frac{1}{6} K x^3 + o(x^3).$$

Этот вывод подсказывает следующую геометрическую интерпретацию кривизны: в нормальных координатах метрика евклидова с точностью до второго порядка малости (так как для евклидовой метрики $G(x, y) = x^2$), а искажение третьего порядка малости определяется кривизной K .

Переформулируем немного последнее утверждение. Согласно лемме 5.1.13, риманова метрика локально может быть аппроксимирована евклидовой. Эта лемма гарантировала, что можно так выбрать координатное отображение из евклидовой области в окрестность фиксированной точки $p \in \Omega$, что искажение метрики в шаре малого радиуса r с центром p имеет порядок $o(r)$. Теперь мы можем существенно усилить это утверждение. Касательное пространство $T_p \Omega$, снабженное скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, является евклидовым пространством, а \exp_p отображает окрестность начала координат в Ω . Следующая лемма утверждает, что это отображение

отличается от изометрии самое большее членами третьего порядка (в терминах расстояния до p).

Лемма 6.4.12. *Имеет место оценка*

$$d(q, s) - |\exp_p^{-1}(q) \exp_p^{-1}(s)| = o(\max(d(p, q), d(p, s))^3),$$

где $|\cdot|$ — расстояние в $(T_\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Доказательство. Введем в $T_p\Omega$ полярную систему координат (r, ρ) и нормальную систему в окрестности точки p с помощью отображения \exp_p : $\exp_p(r, \rho) = (x = r, y = \rho)$. Коэффициенты евклидовой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ в полярных координатах имеют вид $E = 1, F = 0, G(r, \rho) = r^2$, в то время как коэффициенты римановой метрики в соответствующей точке $x = r, y = \rho$ равны $E = 1, F = 0, G(r, \rho) = (r + o_\rho(r^2))^2$. Теперь утверждение леммы вытекает из координатной формулы (5.3) для длины кривой. \square

Подчеркнем еще раз, что гауссова кривизна определяет искажение метрики лишь в третьем порядке малости.

Конструкция, примененная в лемме, полезна сама по себе и будет (с небольшими изменениями) использоваться нами в этом разделе еще несколько раз! Заметим также, что \exp_p не искажает расстояния до точки p , следовательно сферы с центром в начале координат отображаются в сферы того же радиуса с центром в p .

Поверхности постоянной кривизны. Рассмотрим важную модельную ситуацию — область постоянной гауссовой кривизны $(K(p) = k$ для всех $p \in \Omega)$. Возможны три случая: $k = 0, k > 0$ и $k < 0$, которые соответствуют поверхностям, локально изометричным евклидовой плоскости, сфере и гиперболической плоскости. Действительно, если $k = 0$, то, согласно уравнению Якоби (6.17), $\frac{d^2}{dt^2}g(t) = 0$, следовательно, $g(t)$ — линейная функция. В самом деле, расстояние между евклидовыми прямыми является линейной функцией (до тех пор, пока они не пересекутся). Если $k > 0$, то решение уравнения Якоби (6.17) имеет вид $g(t) = A \sin \sqrt{k}t + B \cos \sqrt{k}t$. В частности, если $g(0) = 0, \dot{g}(0) = 1$, то $g(t) = \sin \sqrt{k}t$. Легко проверить, что если вращать меридиан сферы радиуса \sqrt{k} с единичной угловой скоростью, то скорость точки меридиана, лежащей на расстоянии t от полюса, составит $\sin \sqrt{k}t$. Иными словами, меридианы “расходятся” со скоростью, пропорциональной $\sin \sqrt{k}t$. Если $k < 0$, общее решение уравнения (6.17) имеет вид $g(t) = A \sinh \sqrt{-k}t + B \cosh \sqrt{-k}t$. Эта формула описывает разбегание пучка прямых на гиперболической плоскости кривизны k .

Формализуем эти наши рассуждения.

Лемма 6.4.13. *Предположим, что $K(q) = k = \text{const}$ для всех $q \in \Omega$ и пусть $p \in \Omega$. Тогда существует окрестность точки p , которая изометрична области или на евклидовой плоскости ($k = 0$), или на гиперболической плоскости кривизны k ($k < 0$), или, наконец, на сфере радиуса \sqrt{k} ($k > 0$).*

Рассмотрим случай $k = 0$; остальные случаи разбираются аналогично. Рассуждение очень похоже на доказательство леммы 6.4.12. Выберем нормальную систему координат (x, y) с центром в точке p . Пусть $\gamma(t) = (t, y)$ — координатная линия, исходящая из p . Снова обозначим $g(t) = \sqrt{G(t, y)}$. Тогда $g(0) = 0$ и $\frac{dg}{dt}(0) = 1$ (см. лемму 6.4.12). Решая уравнение Якоби (6.17) с начальными условиями $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, мы немедленно получаем $g(t) = t$ и, следовательно, $G(x, y) = y^2$. Сравнивая эти выражения для E, F, G с коэффициентами евклидовой метрики в полярной системе координат (r, ρ) (формула (5.8)), мы заключаем, что отображение $(x, y) \rightarrow (r = x, \rho = y)$ является изометрией на некоторую окрестность начала координат. \square

Упражнение 6.4.14. Используя формулы (5.9) и (5.10), покажите, что поверхность постоянной кривизны $k \neq 0$ локально изометрична или сфере, или гиперболической плоскости.

Замечание. Заметим, что тем самым мы *доказали*, что гауссова кривизна гиперболической плоскости кривизны k действительно равна k . Более того, из нашего рассуждения *следует*, что гиперболическая плоскость однородна: действительно, используя формулу (5.10), мы построили изометрию, переводящую произвольную точку области постоянной отрицательной кривизны в начало полярной системы координат.

6.5. Теоремы сравнения

6.5.1. Теорема сравнения Рауха. Следующий (двумерный) вариант теоремы сравнения Рауха (и ее аналог — упражнение 6.4.10) играет решающую роль в наших рассуждениях.

Теорема 6.5.1. *Пусть $\gamma_1(t), \gamma_0(t)$ — геодезические в Ω_1 и Ω_0 , а $Y_1(t), Y_0(t)$ — такие поля Якоби вдоль γ_1 и γ_0 , соответственно, что*

$$Y_1(0) = Y_0(0) = 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{D}{dt} Y_1(0) \right| = \left| \frac{D}{dt} Y_0(0) \right| = 1.$$

Предположим, что Y_1 не обращается в ноль на отрезке $[0, T]$ и гауссова кривизна $K_1(t) = K(\gamma_1(t))$ в точках кривой γ_1 не превосходит гауссовой кривизны $K_0(t) = K(\gamma_0(t))$ в соответствующих точках кривой γ_0 , то есть $K_0(t) \leq K_1(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

Тогда $|Y_1(t)| \leq |Y_0(t)|$ для всех $0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Пусть $g_1(t) = |Y_1(t)|$, $g_0(t) = |Y_0(t)|$. Тогда функция $g_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 g_1}{dt^2}(t) = -K_1(t)g_1(t) \quad \text{и} \quad g_1(0) = 0, \quad \dot{g}_1(0) = 1.$$

Аналогичное уравнение верно и для $g_0(t)$.

Мы хотим доказать, что $g_1(t) \leq g_0(t)$ для всех $0 \leq t \leq T$.

Идея состоит в том, чтобы рассмотреть функцию $\varphi(t) = \frac{g_0(t)}{g_1(t)}$ и доказать, что она монотонно (не строго) возрастает в интервале $]0, T[$. Тогда, поскольку по правилу Лопиталья $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1$, и, значит, $\varphi(t) \geq 1$, мы получаем $g_0(t) \geq g_1(t)$.

Чтобы доказать монотонность φ , проверим, что $\dot{\varphi}(t) \geq 0$ для всех t . Имеем

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{g}_0(t)g_1(t) - g_0(t)\dot{g}_1(t)}{g_1(t)^2}.$$

Обозначим числитель этой дроби через $\psi(t)$. Поскольку знаменатель $g_1(t)^2$ положителен, достаточно увидеть, что $\psi(t) \geq 0$. Равенство $\psi(0) = 0$ следует из $g_0(0) = g_1(0) = 0$. Снова, достаточно доказать, что $\dot{\psi}(t) \geq 0$ для всех t . Из уравнений, которым удовлетворяют g_0 и g_1 , следует, что

$$\dot{\psi} = \ddot{g}_0 g_1 - g_0 \ddot{g}_1 = (K_1 - K_0)g_0 g_1.$$

Таким образом $\dot{\psi} > 0$, если $g_0 \geq 0$ ($g_1 > 0$ на $]0, T[$ по условию теоремы).

Осталось показать, что g_0 не меняет знака на $]0, T[$. Предположим обратное, и пусть $t_0 \in]0, T[$ — первая точка, где $g_0 = 0$. Применим предыдущее рассуждение к интервалу $]0, t_0]$. Так как $g_0(t) \geq 0$ для всех $t \in]0, t_0]$, то на этом интервале $\dot{\psi}(t) \geq 0$. Следовательно, $g_0 \geq g_1$ на $]0, t_0]$. В частности, $g_0(t_0) \geq g_1(t_0) > 0$, что противоречит нашему допущению. Теорема доказана. \square

Замечание. Заметим, что это доказательство двумерно, так как использует уравнение (6.15), а не (6.14).

Замечание. Условие отсутствия нулей у поля Якоби существенно. Напомним, что две точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются *сопряженными вдоль γ* , если существует нетривиальное (то есть не равное нулю тождественно) поле Якоби, обращающееся в них в ноль. Отрезок геодезической, внутри которого находятся две сопряженные между собой точки *никогда* не является кратчайшей. (Одно из красивых доказательств использует индексную форму, понятие, которое выходит за рамки этой книги. Прямое доказательство немного громоздко, хотя и элементарно.) Поэтому такие геодезические бесполезны для измерения расстояния. Обратное, геодезическая, не содержащая сопряженных точек, всегда является локально кратчайшей (кратчайшей среди достаточно близких к ней кривых). Это легко доказать, рассуждая как в лемме 5.2.9.

6.5.2. Теорема сравнения Картана–Александрова–Топоногова.

Здесь мы собираемся использовать конструкцию, очень схожую с конструкцией леммы 6.4.13. Рассмотрим два экспоненциальных отображения $\exp_p: U_p \rightarrow \Omega_p = \exp_p(U_p)$ и $\exp_q: U_q \rightarrow \Omega_q = \exp_q(U_q)$, где U_p и U_q выбраны столь малыми, что эти отображения являются диффеоморфизмами.

Удобно считать, что U_p и U_q являются шарами одного и того же радиуса r . Зафиксируем произвольную изометрию $I: (T_q\Omega_q, \langle \cdot, \cdot \rangle_q) \rightarrow (T_p\Omega_p, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$. Ясно, что I отображает U_q на U_p . Рассмотрим отображение $\sigma: \Omega_q \rightarrow \Omega_p$, являющееся суперпозицией $\sigma = \exp_p \circ I \circ \exp_q^{-1}$.

(Другой способ: зафиксируем нормальные системы координат с центрами в точках p и q , и определим отображение σ по равенству координат.)

Перечислим несколько очевидных свойств отображения σ . Прежде всего, σ сохраняет радиальные расстояния:

$$d_{\Omega_q}(q, s) = d_{\Omega_p}(p, \sigma(s)).$$

Действительно, σ отображает натурально параметризованные геодезические, исходящие из q , в такие же геодезические, исходящие из p .

Далее, по построению, $d_q\sigma$ является линейной изометрией касательных пространств и, в частности, σ сохраняет углы между геодезическими, исходящими из q (поскольку мы не уточняем, говорим ли мы о римановом угле или об общем понятии угла в пространствах с внутренней метрикой, мы неявно используем лемму 5.1.14).

Упражнение 6.5.2. По аналогии с леммами 6.4.12 и 6.4.13 покажите, что если $K(p) = K(q)$, то σ искажает метрику только в четвертом порядке.

Упражнение 6.5.3. Используя упражнение 5.1.19, покажите, что длина окружности радиуса r с центром в p равна $\pi r^2(1 - \frac{1}{6}K(p)r^2 + o(r^2))$.

Доказательство леммы 6.4.13 опиралось на замечание, что для области Ω с метрикой постоянной кривизны k отображение σ является изометрией. Следующее обобщение этого свойства, вероятно, лучше всего объясняет геометрический смысл гауссовой кривизны.

Теорема 6.5.4. Если гауссова кривизна в области Ω ограничена снизу числом k : $k \leq K(s)$ для всех $s \in \Omega$, то σ является нерастягивающим отображением на некоторую окрестность точки q , то есть существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$d(\sigma(s_1), \sigma(s_2)) \leq d(s_1, s_2) \quad \text{для всех } s_1, s_2 \in B_\varepsilon(q).$$

Если гауссова кривизна в Ω ограничена сверху $k \geq K(s)$ для всех $s \in \Omega$, то σ является несжимающим отображением на некоторую

окрестность точки q :

$$d(\sigma(s_1), \sigma(s_2)) \geq d(s_1, s_2) \quad \text{для всех } s_1, s_2 \in B_\varepsilon(q).$$

Доказательство. Выберем нормальные координаты в окрестностях точек q и p так, чтобы σ переводило любую точку в точку с теми же координатами. Римановы метрики в Ω и Ω_k имеют вид

$$(6.19) \quad \langle V, V \rangle = \sqrt{v_x^2 + G(x, y)v_y^2} \quad \text{в } \Omega,$$

$$(6.20) \quad \langle V, V \rangle = \sqrt{v_x^2 + G_k(x, y)v_y^2} \quad \text{в } \Omega_k,$$

где G и G_k — метрические коэффициенты в Ω и Ω_k .

Величина $g(t) = \sqrt{G(t, y)}$ — это длина координатного векторного поля Y , являющегося полем Якоби вдоль координатной линии в Ω . То же верно для $g_k(t) = \sqrt{G_k(t, y)}$ в Ω_k .

Рассмотрим случай $k \geq K(s)$ для всех $s \in \Omega$; другой случай разбирается аналогично. Применив теорему сравнения Рауха 6.5.1 к Y и Y_k , заключаем, что $G(x, y) \geq G_k(x, y)$. Очевидным образом из (6.19) и (6.20) следует, что σ не увеличивает длин кривых. Остается выбрать достаточно малое ε , чтобы кратчайшая между любыми точками в $B_\varepsilon(q)$ содержалась в Ω_q (достаточно положить $\varepsilon = \frac{1}{2}r_q$, где r_q — радиус инъективности в q). \square

Упражнение 6.5.5. Докажите эту теорему используя лемму 6.4.7 и упражнение 6.4.10 вместо теоремы 6.5.1

Итак, упражнение 5.2.11 гарантирует, что каждая точка p области Ω имеет такую окрестность U , что между любыми двумя ее точками существует единственная кратчайшая.

Обозначим через Ω_k евклидову плоскость, если $k = 0$, сферу гауссовой кривизны k , если $k > 0$, и гиперболическую плоскость кривизны k , если $k < 0$.

Пусть a, b, c — три точки области U , а a', b', c' — такие точки в Ω_k , что $d(a, c) = d(a', c')$, $d(b, c) = d(b', c')$ и угол между кратчайшими $[ca]$ и $[cb]$ при вершине c равен углу между $[c'a']$ и $[c'b']$ при c' .

Из теоремы 6.5.4 и того, что σ сохраняет углы с вершиной p , немедленно следует, что риманова метрика в Ω удовлетворяет следующему варианту теоремы сравнения Картана–Александрова–Топоногова для малых треугольников:

Теорема 6.5.6. Пусть U , Ω_k и треугольники Δabc , $\Delta a'b'c'$ те же, что и выше. Тогда

$d(a, b) \geq d(a', b')$, если гауссова кривизна в Ω ограничена сверху: $k \geq K(s)$ для всех $s \in \Omega$, и

$d(a, b) \leq d(a', b')$, если гауссова кривизна в Ω ограничена снизу: $k \leq K(s)$ для всех $s \in \Omega$.

Доказательство. Способ построения отображения σ оставляет достаточно свободы, чтобы отобразить a в a' и b в b' . Теперь теорема следует из 6.5.4. \square

Упражнение 6.5.7. (i) Покажите, что если гауссова кривизна в области неотрицательна (неположительна), то каждый угол треугольника не больше (не меньше) соответствующего угла евклидова треугольника с теми же длинами сторон.

(ii) Покажите, что в области неотрицательности (неположительности) гауссовой кривизны сумма углов любого треугольника не менее (не более) π .

Свойства, справедливость которых утверждает теорема 6.5.6 (среди прочих) взяты в качестве (вариантов) определений общих пространств ограниченной (сверху или снизу) кривизны. Итак, мы подготовили необходимую мотивировку для дальнейших синтетических рассуждений, показав, что римановы многообразия ограниченной секционной кривизны являются пространствами с внутренней метрикой, кривизны которых (в смысле определений главы 4) имеют те же границы.

Пространство метрических пространств

В этой книге мы в основном обсуждали различные свойства и характеристики метрического пространства. Другими словами, в каждом конкретном случае мы изучали лишь одно метрическое пространство. Однако, может оказаться полезным рассматривать каждое пространство в качестве представителя некоторого класса похожих объектов. Такой класс можно было бы называть “пространством метрических пространств”. Подобная идея лежит в основании математического анализа: вместо того, чтобы рассуждать об отдельных числах, изучают всю вещественную прямую. Это привносит новые понятия, такие как непрерывность, производные и т.д., которые оказываются мощным средством, дающим новую информацию о первоначальных объектах — числах. Например, часто используемый метод доказательства неравенств — нахождение максимумов и минимумов, а эти понятия лишены смысла вне рассмотрения числовых множеств.

Другой пример использования такого “глобального” подхода дает теория выпуклых множеств в \mathbb{R}^n . Введение расстояния по Хаусдорфу (обсуждаемого ниже, в разделе 7.3.1) превращает множество всех компактных выпуклых множеств в метрическое пространство. Это позволяет применять “аналитическую” технику к выпуклым множествам так же, как к числам. Например, можно использовать максимумы и минимумы, поскольку пространство компактных выпуклых множеств ограничено компактно (как и \mathbb{R}), см. теорему 7.3.8. Кроме того, несложное рассуждение показывает, что многогранники плотны в этом пространстве, а это

позволяет распространить многие утверждения с многогранников на произвольные выпуклые множества “по непрерывности”.

В этой главе мы пойдем дальше в этом направлении и введем расстояние между произвольными метрическими пространствами. На самом деле мы определим даже несколько расстояний, пригодных для различных целей. Заранее сделаем два замечания. Во-первых, в большинстве случаев расстояние само по себе не столь важно, как топология, которую оно определяет. Рассматривая “пространство метрических пространств”, мы будем в основном изучать сходящиеся последовательности и подобные им понятия, не интересуясь численным значением расстояния. Во-вторых, чтобы можно было использовать топологическую структуру, необходимы непрерывные величины, свойства, сохраняющиеся при предельном переходе, и т.п. Чем тоньше топология, тем больше таких величин и свойств. Однако, в более тонкой топологии меньше сходящихся последовательностей и компактных множеств, что делает ее менее полезной. По этой причине могут понадобиться различные топологии. Это демонстрирует нам функциональный анализ, где каждый естественный класс функций сопровождается своей собственной топологией, а именно C^0 , C^1 , L^1 , L^2 и т.д.

Чтобы разжечь любопытство, начнем с почти сказочной истории — своего рода математической научной фантастики — на популярном уровне. Существовала знаменитая нерешенная проблема: всякая ли группа полиномиального роста является виртуально нильпотентной (поскольку это лишь сказка, то нет необходимости определять какие-либо понятия). Здесь изложена идея принадлежащего Громову решения этой задачи. Он предложил рассмотреть последовательность метрических пространств (G, hd) , где G — наша конечно порожденная группа с метрикой слов d , а h — положительные числа, стремящиеся к нулю. Применяв свой критерий предкомпактности пространства метрических пространств к определенным пространствам, Громов выделил подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пространству с внутренней метрикой вместе с действием группы на этом пространстве (читатель может проследить это на примере (\mathbb{Z}^2, hd) , где d — метрика слов при стандартном выборе двух образующих. Получится последовательность все более плотных решеток, сходящихся к \mathbb{R}^2 с нормой $\|(x, y)\| = |x| + |y|$). Оказывается, что предельное пространство является финслеровым многообразием. Таким образом, Громов смог свести проблему к рассмотрению группы изометрий многообразия, а в этом случае уже было известно, что ответ положительный.

7.1. Примеры

Начнем с нескольких примеров, пока что без формальных определений и доказательств. Не все из этих примеров охвачены понятиями,

обсуждаемыми в книге; некоторые из них будут использованы лишь для мотивации и сравнения.

7.1.1. Касательный конус выпуклого множества. Рассмотрим замкнутое выпуклое множество на плоскости. Если это множество по крайней мере двумерно, т.е. не содержится в прямой, то его граница представляет собой непрерывную кривую. Разбирая различные примеры, можно сделать ряд наблюдений, которые несложно формализовать и доказать. Есть два вида точек на выпуклой кривой. Есть точки, в которых кривая “гладкая” в том смысле, что она допускает единственную касательную прямую, и точки, где кривая “ломается” и имеет две различные полукасательные с разных сторон. Подобным образом и трехмерное выпуклое тело вблизи точки своей границы может выглядеть в первом приближении или как полупространство, или как двугранный угол с ребром, или как “острый” телесный угол. Более того, у двугранного угла есть определенная угловая мера, а телесные углы могут иметь различную форму. Все эти свойства первого приближения заключены в понятии *касательного конуса*, который определяется следующим образом.

Пусть X — выпуклое множество в \mathbb{R}^n , а $p \in X$. Для каждого $\lambda > 0$ рассмотрим гомотетию с коэффициентом λ и центром в p . Предполагая для удобства, что p — начало координат в \mathbb{R}^n , получим раздутое множество $\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$. Касательный конус множества X в точке p — это, по определению, предел таких раздутых множеств при $\lambda \rightarrow \infty$. Поскольку X выпукло, довольно просто определить, что означает слово “предел” в данном случае. А именно, семейство множеств $\{\lambda X\}$ возрастает в том смысле, что $\lambda_1 X \subset \lambda_2 X$, если $\lambda_1 < \lambda_2$ (это очевидно следует из выпуклости). Так что эти множества естественно “сходятся” к их объединению $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda X$. Удобнее иметь замкнутый конус, поэтому обычно рассматривают замыкание вместо простого объединения. Таким образом, касательный конус множества X в точке p определен как замыкание множества $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda X$, где гомотетии $X \mapsto \lambda X$ имеют своим центром p . Нетрудно проверить, что это множество на самом деле конус (т.е. состоит из лучей, исходящих из p , или, что то же самое, инвариантно относительно гомотетий). В действительности, это — наименьший выпуклый конус (с вершиной p), который содержит X . Заметим, что p может быть и внутренней точкой множества; в этом случае касательный конус — все пространство. Построение касательного конуса изображено на рисунке 7.1 (раздутые пространства имеют более светлый тон).

Касательный конус тесно связан с “пространством направлений”, введенным в разделе 3.6.6. А именно, луч, исходящий из p , содержится в касательном конусе тогда и только тогда, когда его направление

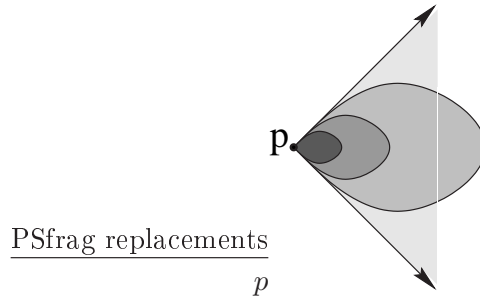


Рис. 7.1: Пространства с раздутой метрикой сходятся к касательному конусу.

принадлежит пространству направлений в точке p . Это дает другое определение пространства направлений. Оно удобнее во многих случаях, потому что некоторые свойства множества могут быть автоматически перенесены с множества на его касательный конус “по непрерывности”. Тривиальный пример — свойство выпуклости. Такое определение касательного конуса (и пространства направлений) может быть применено и к другим пространствам, а не только к выпуклым множествам; однако, для этого необходимо подходящее определение предела.

7.1.2. Асимптотический конус. Касательный конус отражает поведение множества в небольшой окрестности точки. Существует аналогичным образом определяемое понятие *асимптотического конуса*, который повторяет поведение множества “на бесконечности”. Асимптотический конус (замкнутого) выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in X$ — это предел гомотетичных множеств λX при $\lambda \rightarrow 0$ (гомотетии с центром в p). Как и в случае с касательным конусом, тут нет никаких проблем с определением предела. Поскольку $\{\lambda X\}$ — убывающее семейство множеств, то “предел” — это просто их пересечение, $\bigcap_{\lambda > 0} \lambda X$ (см. рисунок 7.2). Легко видеть, что асимптотический конус — это просто объединение всех лучей, исходящих из p и содержащихся в X . Форма асимптотического конуса не зависит от выбора точки p в том смысле, что асимптотические конусы при разном выборе p отличаются друг от друга лишь на параллельный перенос.

Грубо говоря, асимптотический конус — это то, как видно множество при рассмотрении его издали (в предположении, что при удалении наблюдателя зрительный образ множества сжимается гомотетично). Подобные ассоциации возникают и с касательным конусом: касательный конус в точке p — это то, что видит наблюдатель, рассматривая окрестность точки p под микроскопом. Поверхность Земли для нас выглядит плоской;

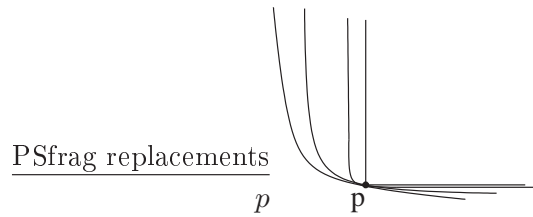


Рис. 7.2: Пространства со сжатыми метриками сходятся к асимптотическому конусу.

в самом деле, касательный конус сферы — плоскость (точнее, касательный конус шара — это полупространство).

В следующей главе (пункт 8.2) мы распространим определение асимптотического конуса на метрические пространства общего вида.

7.1.3. Асимптотический конус решетки. Рассмотрим группу \mathbb{Z}^2 , которая может быть представлена как решетка из точек с целыми координатами в \mathbb{R}^2 . В пункте 3.2.3 мы описали, как определить метрику слов на группе при произвольном выборе системы образующих. А именно, метрика слов — это внутренняя метрика графа Кэли этой группы. (Точнее, перенос этой метрики на саму группу, но в этом примере нам желательно сохранить граф.) Возьмем простейший набор образующих элементов, а именно $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда граф Кэли естественно отождествляется с сеткой из горизонтальных и вертикальных прямых, проходящих через точки с целыми координатами. Внутренняя метрика этого графа совпадает с метрикой, индуцированной метрикой плоскости.

Попробуем применить (неформально) к этому графу определение асимптотического конуса. Обозначим граф через X . Сжатое пространство λX представляет из себя сетку вертикальных и горизонтальных прямых, координаты которых кратны λ . Другими словами, эти прямые разбивают \mathbb{R}^2 на квадраты со сторонами длины λ . При λ , стремящемся к нулю, решетка становится все гуще и гуще, и естественно предположить, что ее предел должен содержать все точки плоскости. (Это рассуждение, основывающееся только на нашей интуиции, ибо у нас все еще нет подходящего определения предела.)

Однако этот предел, рассматриваемый как метрическое пространство, *не* является евклидовой плоскостью \mathbb{R}^2 , потому что расстояния на решетках существенно отличаются от евклидовых. В действительности, предел — это нормированное пространство \mathbb{R}_1^2 , которое представляет собой \mathbb{R}^2 с нормой $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$. В самом деле, изучая кратчайшие пути в решетке λX , можно заметить, что расстояние между двумя ее узлами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равно $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Это то же самое

расстояние, что и в \mathbb{R}_1^2 . А при малых λ расстояние между точками решетки, не являющимися узлами, лишь ненамного (не более, чем на 4λ) отличается от расстояния в \mathbb{R}_1^2 (поскольку для каждой точки решетки существует узел на расстоянии $\leq \lambda$ от нее). Так что если мы хотим, чтобы расстояния в решетках сходились (в любом смысле) к расстояниям в предельном пространстве, то мы должны в качестве последнего взять \mathbb{R}_1^2 .

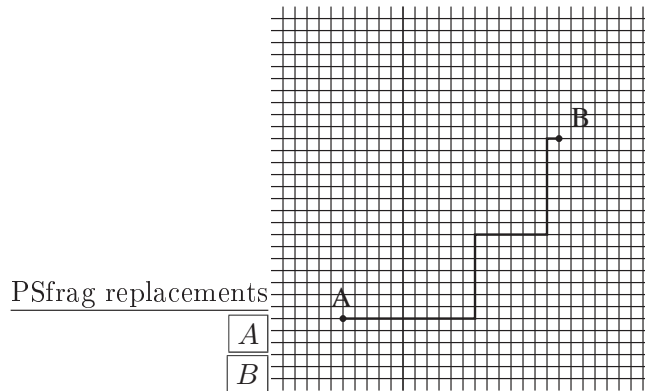


Рис. 7.3: Густая решетка и кратчайшая в ней.

В предыдущем примере мы использовали изометрическое вложение графа Кэли в \mathbb{R}^2 . При другом выборе порождающих элементов подобные вложения могут и не существовать, но асимптотический конус может быть разумным образом определен для любой метрики слов. На самом деле касательный конус всегда является двумерным нормированным пространством. Его единичный шар может быть отождествлен с многоугольником в \mathbb{R}^2 , полученным как выпуклая оболочка порождающего множества и множества элементов, обратных порождающим. Мы обсудим этот вопрос далее, в пункте 8.5.1.

7.1.4. Сходящиеся поверхности. Гладкие поверхности в \mathbb{R}^3 могут быть (по крайней мере локально) параметризованы областью $D \subset \mathbb{R}^2$, либо как графики гладких функций из D в R , либо как образы при вложениях D в \mathbb{R}^3 . Таким образом, топология на множестве поверхностей может быть индуцирована топологией на множестве отображений. Более детально, последовательность поверхностей сходится, если существует сходящаяся последовательность их параметризаций. Конечно, если поверхность покрыта несколькими кусками со своей параметризацией на каждом из них, то должны выполняться некоторые условия согласованности. В любом случае можно говорить, например, о C^k -сходимости поверхностей ($k = 0, 1, \dots$).

Замечание 7.1.1. Если некоторое свойство поверхности описывается в терминах производных вплоть до k -го порядка, то обычно выбирают по крайней мере C^k -топологию для того, чтобы сделать эту характеристику непрерывной. Однако, наложение геометрических ограничений иногда позволяет использовать более слабую топологию.

Рассмотрим, например, регулярные гладкие кривые на плоскости. Длина и кривизна (которые определены в терминах первых и вторых производных, соответственно) не являются непрерывными по отношению к C^0 топологии. Длина полунепрерывна снизу, а кривизна не полунепрерывна ни с одной стороны. Но если класс состоит лишь из *выпуклых* кривых (плоская кривая называется выпуклой, если она ограничивает выпуклое множество), то ситуация улучшается. А именно, на классе выпуклых регулярных кривых, наделенных C^0 топологией, длина непрерывна, а минимум кривизны полунепрерывен сверху.

Это частный случай более общего явления: выпуклость и нижние границы кривизны устойчивы относительно, скажем, предельного перехода в сравнительно слабой топологии (как C^0 -топологии в примере с выпуклыми кривыми).

Упражнение 7.1.2. Докажите утверждение из предыдущего замечания о регулярных кривых.

“Функциональная” сходимости, которая рассматривалась выше, не совсем подходит для наших целей, так как чаще всего мы имеем дело с произвольными метрическими пространствами, а не с подмножествами \mathbb{R}^n . Но можно изменить это понятие, используя следующие соображения. Если две поверхности параметризованы одной областью, то эти две параметризации задают взаимно-однозначное соответствие между точками поверхностей. Иными словами, они задают гомеоморфизм между поверхностями. Если поверхности достаточно близки, то под действием этого гомеоморфизма определенные структуры, такие как расстояния, метрические тензоры или их производные, меняются незначительно. На основании этого можно дать набросок определения, сказав, что два пространства близки друг к другу, если существует гомеоморфизм между ними, который “почти сохраняет” некоторую геометрическую характеристику, например, расстояние. Ниже мы дадим несколько точных определений подобного рода.

Однако, у этого подхода есть недостаток: он требует, чтобы пространства были гомеоморфными. Подчас это требование слишком ограничительно. Например, пусть X — стандартная двумерная сфера, а X_n — та же самая сфера, но с небольшой ручкой. (Пусть диаметр ручки меньше $1/n$.) С ростом n размер ручки становятся все меньше и меньше, а пространства X_n — все больше похожими на X (см. рисунок 7.4). Можно

сказать, что ручки сжимаются в точку, так что X_n сходятся к X . Но X_n не гомеоморфны X , так что в этом случае необходимо другое понятие сходимости.

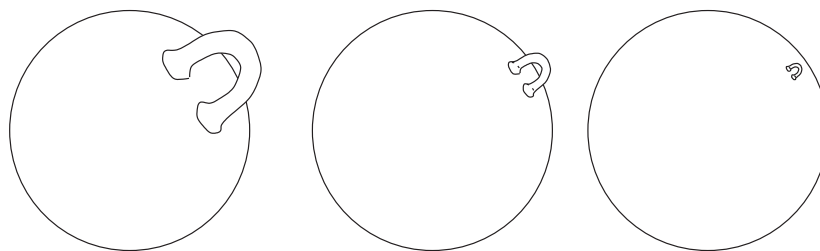


Рис. 7.4: Сферы с уменьшающимися ручками.

Более того, даже для двух гомеоморфных друг другу и выглядящих похожими пространств возможно, что их “похожесть” не реализуется гомеоморфизмом. Например, рассмотрим две сферы существенно различных радиусов, соединенные длинной тонкой трубкой. Можно приделать маленькую ручку или к большей, или меньшей из сфер; пусть X и Y — результаты таких приклеиваний (см. рисунок 7.5). Тогда X и Y гомеоморфны, но каждый гомеоморфизм (на самом деле — любое непрерывное отображение) из X в Y сильно искажает расстояния между какими-то точками, сколь бы малыми не были ручки. Тем не менее X и Y “близки” друг к другу в том же смысле, что и в предыдущем примере.

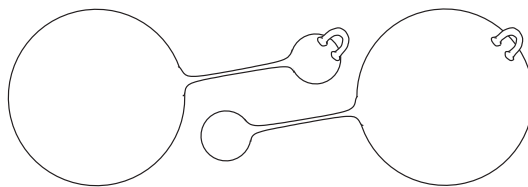


Рис. 7.5: Гомеоморфизм сильно изменяет расстояния.

Читатель, знакомый с расстоянием по Хаусдорфу, может заметить, что оно предоставляет способ формализации предшествующих примеров: расстояние между множествами в этих примерах мало, так как каждое из них содержится в малой окрестности другого в \mathbb{R}^3 . Однако, если мы рассмотрим две поверхности как метрические пространства с близкими внутренними метриками, то совсем не ясно, что эти метрики могут реализоваться близкими вложениями (даже если они вообще могут быть реализованы таким образом). Кроме того, внутренняя геометрия

поверхности довольно сложно связана с ее “зрительным образом” в \mathbb{R}^3 , и измерение расстояния между поверхностями в \mathbb{R}^3 на самом деле не слишком осмысленно. Тем не менее, измерение расстояния в объемлющем пространстве является шагом в правильном направлении. Ниже в этой главе мы введем очень важное понятие расстояния между метрическими пространствами по Громову-Хаусдорфу. Как подсказывает название, это понятие восходит к классическому расстоянию по Хаусдорфу.

7.1.5. Равномерная сходимость. Напомним, что последовательность $\{f_n\}$ вещественнозначных функций, заданных на множестве X , *сходится равномерно* к функции f , если

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Поскольку любая метрика на X является вещественнозначной функцией (определенной на $X \times X$), то понятие равномерной сходимости применимо к метрикам: последовательность $\{d_n\}$ метрик на X сходится равномерно к метрике d (обозначение: $d_n \rightrightarrows d$), если

$$\sup_{x, x' \in X} |d_n(x, x') - d(x, x')| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Мы уже видели (упражнение 2.4.19), что переход к равномерному пределу сохраняет свойство метрики быть внутренней: если все метрики d_n — внутренние, то предельная метрика d тоже будет внутренней. Тем не менее, равномерная сходимость — сравнительно слабый тип сходимости. Например, предел римановых метрик может не быть римановым.

Упражнение 7.1.3. Обозначим через D^2 стандартный единичный шар в \mathbb{R}^2 . Докажите, что метрика пространства \mathbb{R}_1^2 (то есть \mathbb{R}^2 с нормой $\|(x, y)\| = |x| + |y|$), суженная на D^2 , может быть получена как равномерный предел римановых метрик.

Подсказка. Заполните ячейки частой решетки из пункта 7.1.3.

На самом деле *любая* внутренняя метрика на D^2 может быть получена как равномерный предел римановых метрик. Ввиду этого кажется невероятным, что равномерная сходимость сохраняет некую информацию о кривизне. И все таки сохраняет: если кривизны сходящихся метрик равномерно ограничены снизу, то эта граница кривизн (в смысле Александрова) наследуется предельной метрикой! В действительности, это верно даже для более общего типа сходимости, а именно, для сходимости по Громову-Хаусдорфу. Позже мы докажем это утверждение.

Равномерная сходимость метрик имеет одно неестественное ограничение: метрики должны быть определены на одном и том же множестве. Из-за этого приходится считать различными идентичные (т. е. изометричные)

метрические пространства, если в их основе лежат разные множества. Чтобы избежать этого, можно ввести (предварительное) определение равномерной сходимости метрических пространств: последовательность $\{X_n\}$ метрических пространств сходится к метрическому пространству (X, d) , если существует такая последовательность $\{d_n\}$ метрик на X , что (X, d_n) изометрично X_n при всех n и $d_n \rightrightarrows d$.

Это определение “предварительное”, потому что его можно переформулировать в более удобном виде. Наше определение, говоря об изометричности пространств (X, d_n) и X_n , неявно включает в себя некоторое отображение — изометрию между X_n и (X, d_n) . Построить изометрию для двух пространств (про которые известно, что они изометричны) может быть непросто, тогда как метрика d_n тривиально восстанавливается по такой изометрии. Это наблюдение подсказывает, что в определении лучше иметь дело отображениями из X_n в X , чем с метриками на X .

Определение 7.1.4. Пусть X и Y — метрические пространства, а $f : X \rightarrow Y$ — произвольное отображение. *Искажение* f определяется равенством

$$\text{dis } f = \sup_{x_1, x_2 \in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)|,$$

где d_X и d_Y — метрики на X и Y .

Определение искажения похоже на определение растяжения липшицева отображения. Разница лишь в том, что растяжение характеризует *относительное*, а искажение — *абсолютное* изменение расстояний. Понятие искажения применимо и к разрывным отображениям.

Определение 7.1.5. Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ метрических пространств *равномерно сходится* к метрическому пространству X , если существуют такие гомеоморфизмы $f_n : X_n \rightarrow X$, что $\text{dis}(f_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Упражнение 7.1.6. Докажите, что определение 7.1.5 эквивалентно нашему предварительному определению равномерной сходимости.

Упражнение 7.1.7. Дайте такое определение расстояния между метрическими пространствами, чтобы сходимость относительно этого расстояния была равносильна равномерной сходимости в смысле определения 7.1.5.

Подсказка. Посмотрите в следующем параграфе определение расстояния по Липшицу.

7.2. Расстояние по Липшицу

Идея расстояния по Липшицу состоит в следующем: два метрических пространства X и Y близки друг к другу, если существует такой

гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$, что все отношения $d_Y(f(x), f(x'))/d_X(x, x')$ близки к 1. Другими словами, расстояние по Липшицу измеряет *относительное* различие между метриками. Заметим, что относительные различия и относительные погрешности — это именно то, о чем заботятся, когда дело касается метрики физической вселенной. Так, хорошим достижением является измерить расстояние от Земли до Солнца с точностью до тысячи миль, но измерять чью-либо квартиру с такой точностью — не очень хорошая идея.

Пусть X и Y — два метрических пространства. Напомним, что растяжение $\text{dil } f$ липшицева отображения $f: X \rightarrow Y$ определяется равенством

$$\text{dil } f = \sup_{x, x' \in X} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')},$$

где d_X и d_Y — метрики пространств X и Y . Гомеоморфизм f называется билипшицевым, если оба отображения, f и f^{-1} , — липшицевы.

Определение 7.2.1. *Расстоянием по Липшицу* d_L между метрическими пространствами X и Y называется величина

$$(7.1) \quad d_L(X, Y) = \inf_{f: X \rightarrow Y} \log(\max\{\text{dil}(f), \text{dil}(f^{-1})\}),$$

где точная нижняя грань берется по всем билипшицевым гомеоморфизмам $f: X \rightarrow Y$.

Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрических пространств *сходится по Липшицу* к пространству X , если $d_L(X_n, X) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если не существует билипшицева гомеоморфизма между X и Y , то полагаем $d_L(X, Y) = \infty$. Таким образом, расстояние по Липшицу не подходит для сравнения метрических пространств, которые не являются (билипшицево) гомеоморфными.

Пример 7.2.2. Пусть M — гладкое многообразие, а $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность финслеровых структур на M . Предположим, что она сходится к финслеровой структуре F в том смысле, что $F_n(v)/F(v) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех ненулевых векторов $v \in TM$ (напомним, что финслеровы структуры суть функции на TM). Тогда $d_L((M, d_n), (M, d)) \rightarrow 0$, где d_n и d — финслеровы метрики, соответствующие F_n и F .

Пример 7.2.3. Пусть $\{M_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — семейство гладких поверхностей в \mathbb{R}^3 , параметризованных отображениями $f_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, где Ω — область в \mathbb{R}^2 . Предположим, что наше семейство гладкое (по крайней мере класса C^1 , т.е. функция $F: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, определенная равенством $F(x, t) = f_t(x)$, является гладкой. Тогда $d_L(M_t, M_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Этот вывод может оказаться неверным, если семейство только непрерывно.

Теорема 7.2.4. *Функция d_L неотрицательна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника. Для компактных пространств $d_L(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда X и Y изометричны.*

Доказательство. Если $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то по крайней мере одно из растяжений $\text{dil } f$ и $\text{dil } f^{-1}$ больше или равно 1, поскольку f и f^{-1} не могут одновременно уменьшать расстояние. Следовательно $d_L(X, Y) \geq 0$. Симметричность d_L тривиальна.

Докажем теперь неравенство треугольника. Пусть X, Y, Z — метрические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — билипшицевы гомеоморфизмы. Тогда $h = g \circ f$ — билипшицев гомеоморфизм из X в Z . Более того, $\text{dil}(h) \leq \text{dil}(f) \cdot \text{dil}(g)$; следовательно $\log(\text{dil } h) \leq \log(\text{dil } f) + \log(\text{dil } g)$. Вместе с аналогичным неравенством для $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ это дает неравенство треугольника $d_L(X, Z) \leq d_L(X, Y) + d_L(Y, Z)$.

Если X и Y изометричны, то, подставляя изометрию $f: X \rightarrow Y$ в определение (7.1), убеждаемся, что $d_L(X, Y) = 0$. Обратное утверждение более содержательно. Из $d_L(X, Y) = 0$ следует, по определению d_L , что существует последовательность таких отображений $f_n: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, что $\text{dil } f_n \rightarrow 1$ и $\text{dil}(f_n^{-1}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку растяжения отображений f_n равномерно ограничены, то, по теореме Арцела–Асколи, некоторая подпоследовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к отображению $f: X \rightarrow Y$. Не умаляя общности, мы можем считать, что к f сходится сама последовательность f_n . Поскольку $\text{dil } f_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то $|f_n(x)f_n(x')|/|xx'| \rightarrow 1$ для всех $x, x' \in X$, следовательно, $|f(x)f(x')| = |xx'|$. Таким образом, отображение f является изометрическим. Аналогично, существует изометрическое отображение $g: Y \rightarrow X$. Их композиция $f \circ g$ является изометрическим отображением Y в себя. А поскольку Y компактно, то отображение $f \circ g$ биективно по теореме 1.6.14. Следовательно, f сюръективно и, значит, является изометрией. \square

Эта теорема говорит о том, что расстояние по Липшицу определяет метрику на “пространстве” классов изометричных между собой компактных метрических пространств. Это “пространство” — не очень хороший объект со строгой точки зрения теории множеств (как и “множество всех множеств”). Однако, мы будем ссылаться на это пространство в наших формулировках. Для нас это пространство — только набор элементов (каждый из которых — класс изометричных между собой метрических пространств), а не объект теории множеств, так что никаких теоретико-множественных парадоксов возникнуть не может. Более того, все наши утверждения об этом “пространстве метрических пространств” могут быть переформулированы в терминах его элементов (как и предыдущая теорема), так что можно воспринимать это пространство просто как средство сокращения формулировок.

Замечание 7.2.5. Можно пойти другим путем и оправдать выражение “пространство компактных метрических пространств”, используя следующее наблюдение: это — “пространство” мощности континуум, т.е. не может существовать более чем континуум попарно не изометричных компактных пространств. (Упражнение: докажите это.) Таким образом, выбирая по представителю из каждого класса изометричных пространств, получим выборку мощности континуум, которая представляет собой вполне законное множество.

Упражнение 7.2.6. Докажите, что сходимость по Липшицу компактных метрических пространств влечет их равномерную сходимость (см. определение 7.1.5).

Упражнение 7.2.7. Докажите, что на классе *конечных* метрических пространств (то есть состоящих каждое из конечного числа точек) сходимость по Липшицу эквивалентна равномерной сходимости.

Замечание 7.2.8. Эти два вида сходимости, вообще говоря, не эквивалентны. Существуют последовательности компактных метрических пространств, которые сходятся равномерно, но не сходятся по Липшицу (можете ли вы привести пример?).

7.3. Расстояние по Громову–Хаусдорфу

Расстояние по Громову–Хаусдорфу похоже на расстояние по Липшицу в том смысле, что это тоже расстояние между компактными метрическими пространствами, которые рассматриваются с точностью до изометрии. Однако оно определяет более слабую “топологию”; в частности, расстояние всегда конечно (и может быть сколь угодно малым) даже для не гомеоморфных пространств. Грубо говоря, различие между расстояниями по Липшицу и по Громову–Хаусдорфу аналогично различию между C^1 - и C^0 -нормами в функциональных пространствах.

7.3.1. Расстояние по Хаусдорфу. Для начала введем обычное расстояние по Хаусдорфу. Это расстояние между подмножествами одного метрического пространства, а не произвольными метрическими пространствами.

Обозначим через $U_r(S)$ r -окрестность множества S в метрическом пространстве, т.е. множество таких точек x , что $\text{dist}(x, S) < r$. Или, то же самое, $U_r(S) = \bigcup_{s \in S} B_r(s)$.

Определение 7.3.1. Пусть A и B — подмножества метрического пространства. *Расстоянием по Хаусдорфу* между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\}.$$

Следующее упражнение содержит удобную переформулировку этого определения.

Упражнение 7.3.2. Пусть A и B — подмножества метрического пространства, $r > 0$. Докажите, что

1. $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \text{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \text{dist}(b, A)\}$.
2. $d_H(A, B) \leq r$ тогда и только тогда, когда расстояния $\text{dist}(a, B) \leq r$ для всех $a \in A$ и $\text{dist}(b, A) \leq r$ для всех $b \in B$.
3. Покажите, что предыдущее утверждение станет неверным, если заменить \leq на $<$.

Предложение 7.3.3. Пусть X — метрическое пространство. Тогда

- (1) d_H — полуметрика на 2^X (множестве всех подмножеств пространства X).
- (2) $d_H(A, \bar{A}) = 0$ для любого $A \subset X$, где \bar{A} обозначает замыкание множества A .
- (3) Если A и B — замкнутые подмножества пространства X и $d_H(A, B) = 0$, то $A = B$.

Доказательство. 1. Неотрицательность и симметричность очевидны. Неравенство треугольника вытекает из следующего факта: для любого $A \subset X$ и любых $r_1, r_2 > 0$ выполняется $U_{r_1+r_2}(A) \subset U_{r_1}(U_{r_2}(A))$. Последнее в свою очередь непосредственно следует из неравенства треугольника в X .

2. Поскольку $A \subset \bar{A}$, имеем $\text{dist}(x, \bar{A}) = 0$ для всех $x \in A$. Для $x \in \bar{A}$ из определения замыкания следует, что $\text{dist}(x, A) = 0$. Следовательно, $d_H(A, \bar{A}) = 0$.

3. Предположим противное, т.е. что существует $x \in A \setminus B$. Поскольку B замкнуто, то существует такое число $r > 0$, что шар $B_r(x)$ не пересекается с B . Тогда $x \notin U_r(B)$; следовательно $d_H(A, B) \geq r > 0$. \square

Обозначим через $\mathfrak{M}(X)$ множество всех замкнутых подмножеств пространства X , снабженное метрикой Хаусдорфа. Предыдущее предложение говорит о том, что $\mathfrak{M}(X)$ действительно является метрическим пространством. Более того, каждый класс факторпространства $2^X/d_H$ может быть представлен замкнутым множеством, а значит $2^X/d_H$ естественно отождествляется с $\mathfrak{M}(X)$.

Упражнение 7.3.4. Пусть последовательность множеств $A_i \in \mathfrak{M}(X)$ сходится в метрике Хаусдорфа к множеству $A \in \mathfrak{M}(X)$ (более кратко: $A_i \rightarrow A$ в $\mathfrak{M}(X)$). Докажите, что

1. Множество A состоит из пределов всех таких сходящихся в X последовательностей $\{a_n\}$, что $a_n \in A_n$ для всех n .
2. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (C(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m))$, где C обозначает замыкание.

Упражнение 7.3.5. Пусть X — компактное метрическое пространство и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность его компактных подмножеств. Докажите, что

1. Если $A_{i+1} \subset A_i$ для всех i , то $\{A_i\}$ сходится в $\mathfrak{M}(X)$ к пересечению множеств $\bigcap_i A_i$.

2. Если $A_i \subset A_{i+1}$ при всех i , то $\{A_i\}$ сходится в $\mathfrak{M}(X)$ к замыканию объединения $\bigcup_i A_i$.

Упражнение 7.3.6. Пусть $A_i \rightarrow A$ в $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, причем все множества A_i выпуклы. Докажите, что тогда A выпукло. Другими словами, множество компактных выпуклых множеств замкнуто в $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 7.3.7. Если X полно, то $\mathfrak{M}(X)$ тоже полно.

Доказательство. Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в $\mathfrak{M}(X)$. Обозначим через S множество всех таких точек $x \in X$, что для любой окрестности U точки x выполняется $U \cap S_n \neq \emptyset$ для бесконечно многих n . Докажем, что тогда $S_n \rightarrow S$. Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть n_0 таково, что $d_H(S_n, S_m) < \varepsilon$ для всех $m, n \geq n_0$. Достаточно показать, что $d_H(S, S_n) < 2\varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.

1. Покажем, что $\text{dist}(x, S_n) < 2\varepsilon$ для любого $x \in S$. Существует такое число $m \geq n_0$, что $B_\varepsilon(x) \cap S_m \neq \emptyset$. Другими словами, существует такая точка $y \in S_m$, что $|xy| < \varepsilon$. Поскольку $d_H(S_m, S_n) < \varepsilon$, то $\text{dist}(y, S_n) < \varepsilon$, и следовательно, $\text{dist}(x, S_n) \leq |xy| + \text{dist}(y, S_n) < 2\varepsilon$.

2. Покажем, что $\text{dist}(x, S) < 2\varepsilon$ для любого $x \in S_n$. Пусть $n_1 = n$. Для каждого целого $k > 1$ выберем такой индекс n_k , что $n_k > n_{k+1}$ и $d_H(S_{n_k}, S_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^k$ для всех $p, q \geq n_k$. Определим последовательность точек $\{x_k\}$, где $x_k \in S_{n_k}$, следующим образом. Полагаем $x_1 = x$, и пусть x_{k+1} — такая точка из $S_{n_{k+1}}$, что $|x_k x_{k+1}| < \varepsilon/2^k$ для всех k . Такая точка найдется, так как $d_H(S_{n_k}, S_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^k$. Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k x_{k+1}| < 2\varepsilon < \infty$, последовательность $\{x_k\}$ является последовательностью Коши, и следовательно, сходится к некоторой точке $y \in X$. Тогда $|xy| = \lim |x x_n| \leq \sum |x_k x_{k+1}| < 2\varepsilon$. Поскольку $y \in S$ по построению, то $\text{dist}(x, S) < 2\varepsilon$. \square

Теорема 7.3.8 (Бляшке). Если X компактно, то и $\mathfrak{M}(X)$ компактно.

Доказательство. По предыдущему предложению, пространство $\mathfrak{M}(X)$ полно. Следовательно, достаточно доказать, что $\mathfrak{M}(X)$ вполне ограничено. Пусть S — конечная ε -сеть в X . Докажем, что тогда 2^S является ε -сетью в $\mathfrak{M}(X)$. Пусть $A \in \mathfrak{M}(X)$. Рассмотрим множество $S_A \in 2^S$, определенное условием

$$S_A = \{x \in S : \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Поскольку S является ε -сетью в X , то для каждого $y \in A$ найдется такая точка $x \in S$, что $|xy| \leq \varepsilon$. Поскольку $\text{dist}(x, A) \leq |xy| \leq \varepsilon$, эта точка x принадлежит S_A . Таким образом, $\text{dist}(y, S_A) \leq \varepsilon$ для всех $y \in A$. Так как $\text{dist}(x, A) \leq \varepsilon$ для всех $x \in S_A$ (по определению S_A), то $d_H(A, S_A) \leq \varepsilon$. Так как A произвольно, то этим доказано, что 2^S является ε -сетью в $\mathfrak{M}(X)$. \square

Замечание 7.3.9. В теории выпуклых множеств теоремой Бляшке обычно называют следующее утверждение: множество всех компактных *выпуклых* подмножеств, содержащихся в любом фиксированном замкнутом шаре пространства \mathbb{R}^n , компактно в метрике Хаусдорфа. Это следует из теоремы 7.3.8 и упражнения 7.3.6.

7.3.2. Расстояние по Громову–Хаусдорфу. Теперь мы готовы определить расстояние по Громову–Хаусдорфу между метрическими пространствами. В основе определения лежит следующая идея. Во-первых, расстояние между подпространствами одного метрического пространства должно быть не больше, чем расстояние между ними по Хаусдорфу. Иными словами, если два подпространства одного и того же пространства близки друг к другу по Хаусдорфу в объемлющем пространстве, то они должны быть близки друг к другу как абстрактные метрические пространства. Во-вторых, непременно хочется, чтобы расстояние между изометричными друг другу пространствами было нулевым. В действительности, расстояние по Громову–Хаусдорфу — это максимальное из расстояний, которые удовлетворяют этим двум требованиям.

Определение 7.3.10. Пусть X и Y — метрические пространства. *Расстояние по Громову–Хаусдорфу* между ними, обозначаемое $d_{GH}(X, Y)$, определяется следующим условием: для любого $r > 0$ расстояние $d_{GH}(X, Y) < r$ тогда и только тогда, когда существует такое метрическое пространство Z и его подпространства X' и Y' , изометричные X и Y , соответственно, что $d_H(X', Y') < r$. Иными словами, $d_{GH}(X, Y)$ — инфимум тех положительных чисел r , для которых существуют указанные Z , X' и Y' . Здесь через d_H обозначено расстояние по Хаусдорфу между подмножествами пространства Z .

Заметим, что в предыдущем определении множества X' и Y' рассматриваются с метриками, являющимися сужением на них метрики объемлющего пространства Z (в противоположность индуцированной внутренней метрике). Например, если X — двумерная сфера со стандартной метрикой постоянной кривизны 1, то нельзя брать в качестве $Z = \mathbb{R}^3$ и $X' = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, так как X и X' не будут изометричны.

То, что расстояние по Громову–Хаусдорфу между изометричными пространствами равно нулю, тривиально. Позднее мы покажем, что d_{GH}

является метрикой в том же смысле, что и d_L , т.е. это метрика на классах изометричных компактных пространств (теорема 7.3.30). Естественно говорить, что последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ (компактных) метрических пространств сходится по Громову–Хаусдорфу к (компактному) метрическому пространству X , если $d_{GH}(X_n, X) \rightarrow 0$. Для некомпактных пространств используется несколько более общее понятие сходимости; мы определим его в параграфе 8.1.

Пример 7.3.11. Если Y является ε -сетью в метрическом пространстве X , то $d_{GH}(X, Y) \leq \varepsilon$. В самом деле, можно взять $Z = X' = X$ и $Y' = Y$.

Замечание 7.3.12. Определение 7.3.10 имеет дело с громадным классом метрических пространств, а именно, со всеми пространствами Z , которые содержат подпространства изометричные X и Y . Можно сократить этот класс до дизъюнктивных объединений X и Y . Более точно, расстояние по Громову–Хаусдорфу между двумя метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) есть инфимум таких $r > 0$, что существует на дизъюнктивном объединении $X \cup Y$ (полу-)метрика d , сужения которой на X и Y совпадают с d_X и d_Y , и, кроме того, $d_H(X, Y) < r$ (в пространстве $(X \cup Y, d)$). Иными словами, $d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(X, Y)\}$, где инфимум берется по всем (полу-)метрикам на $X \cup Y$, продолжающим метрики X и Y .

Для доказательства просто отождествим $X \cup Y$ с $X' \cup Y' \subset Z$ (в обозначениях определения 7.3.10). Более формально, выберем изометрии $f: X \rightarrow X'$ и $g: Y \rightarrow Y'$, после чего определим расстояние между $x \in X$ и $y \in Y$ как $d(x, y) = d_Z(f(x), g(y))$. Это порождает такую полуметрику на $X \cup Y$, для которой $d_H(X, Y) < r$ (если $X' \cap Y' \neq \emptyset$, то может случиться, что $d(x, y) = 0$). Метрическое факторпространство $(X \cup Y)/d$ изометрично $X' \cup Y'$. Чтобы получить метрику (а не полуметрику) на $X \cup Y$, положим $d(x, y) = d_Z(f(x), g(y)) + \delta$, где δ — произвольная положительная константа. Тогда $d_H(X, Y) < r + \delta$.

Упражнение 7.3.13. Докажите, что если X и Y — ограниченные метрические пространства, то $d_{GH}(X, Y) < \infty$.

Подсказка. Выберем достаточно большое число $C > 0$ и положим $d(x, y) = C$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Упражнение 7.3.14. Пусть X и Y — метрические пространства, причем $\text{diam } X < \infty$. Докажите, что $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2}|\text{diam } X - \text{diam } Y|$.

Другими словами, диаметр, как функция на пространстве метрических пространств, является липшицевой функцией с константой 2.

Упражнение 7.3.15. Пусть P — метрическое пространство, состоящее из одной точки. Докажите, что тогда для любого метрического пространства X верно $d_{GH}(X, P) = \text{diam}(X)/2$.

Предложение 7.3.16. *Функция d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника, т. е.*

$$d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3)$$

для любых метрических пространств X_1, X_2, X_3 .

Доказательство. Пусть метрики d_{12} и d_{23} пространств $X_1 \cup X_2$ и $X_2 \cup X_3$ таковы, что их сужения на X_1, X_2 и X_3 , соответственно, совпадают с исходными метриками этих пространств. Определим расстояние между $x_1 \in X_1$ и $x_3 \in X_3$ условием $d_{13}(x_1, x_3) = \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x_1, x_2) + d_{23}(x_2, x_3)\}$. Легко проверить (упражнение!), что d_{13} , дополненное исходными метриками на X_1 и X_3 , удовлетворяет неравенству треугольника и, следовательно, дает метрику на $X_1 \cup X_3$. Из определения d_{13} следует, что $d_H(X_1, X_3) \leq d_H(X_1, X_2) + d_H(X_2, X_3)$, где расстояние $d_H(X_i, X_j)$ по Хаусдорфу относится к метрике d_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Беря инфимум по всем метрикам d_{12} и d_{23} , получаем требуемое неравенство $d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3)$. \square

7.3.3. Переформулировки. Непосредственное применение определения расстояния по Громову–Хаусдорфу требует построения нового метрического пространства Z (или метрики на $X \cup Y$) и проверки неравенства треугольника. Как читатель мог заметить, даже в простых ситуациях это может оказаться непростым делом. Было бы удобнее, если бы мы могли вычислять или оценивать $d_{GH}(X, Y)$, сравнивая между собой только расстояния в самих пространствах X и Y , как мы делали в случаях равномерного расстояния и расстояния по Липшицу. Мы приведем несколько критериев такого сорта. Первый и наиболее общий из них основан на понятии *соответствия*. Грубо говоря, наличие соответствия между двумя метрическими пространствами (или просто множествами) X и Y означает, что для каждой точки X есть одна или больше “соответствующих” точек в Y , и наоборот. Критерий, который мы собираемся доказать, заключается в следующем: $d_{GH}(X, Y) < r$ тогда и только тогда, когда существует такое соответствие между X и Y , что если $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ — пары соответствующих точек, то $|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| < 2r$. Ниже приведены точные определения и формулировки.

Определение 7.3.17. Пусть X и Y — два множества. *Соответствием* между X и Y называется множество $\mathfrak{R} \subset X \times Y$, удовлетворяющее следующему условию: для каждой точки $x \in X$ существует по крайней мере одна такой точка $y \in Y$, что $(x, y) \in \mathfrak{R}$, и аналогично для каждой точки $y \in Y$ существует такая $x \in X$, что $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Другими словами, соответствие — это просто такое отношение между точками из X и Y , что каждая точка из X или из Y находится в

отношении хотя бы с одной точкой второго множества. Если множество \mathfrak{R} ясно из контекста, то будем говорить, что x и y “соответствуют” друг другу, вместо того чтобы писать $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Пример 7.3.18. Всякое сюръективное отображение $f : X \rightarrow Y$ определяет соответствие \mathfrak{R} между X и Y следующим образом

$$\mathfrak{R} = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Мы будем называть это \mathfrak{R} *соответствием, ассоциированным с f* .

Не всякое соответствие ассоциировано с каким-либо отображением. Близкий аналог соответствия — “многозначное отображение”, при котором точка может иметь более чем один образ. Мы не будем обсуждать многозначные отображения, поскольку существует другой способ (приведенный в следующем примере) определить соответствие средствами (обычных) отображений.

Пример 7.3.19. Пусть $f : Z \rightarrow X$ и $g : Z \rightarrow Y$ — два сюръективных отображения из некоторого множества Z . Тогда мы можем определить соответствие \mathfrak{R} условием

$$\mathfrak{R} = \{(f(z), g(z)) : z \in Z\}.$$

Упражнение 7.3.20. Докажите, что любое соответствие может быть получено с помощью конструкции из примера 7.3.19.

Определение 7.3.21. Пусть \mathfrak{R} — соответствие между метрическими пространствами X и Y . Его *искажение* $\text{dis } \mathfrak{R}$ определяется равенством

$$\text{dis } \mathfrak{R} = \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| : (x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}\},$$

где d_X и d_Y — метрики пространств X и Y , соответственно.

Упражнение 7.3.22. Докажите, что для соответствия \mathfrak{R} , ассоциированного с отображением $f : X \rightarrow Y$ как в примере 7.3.18, выполняется $\text{dis } \mathfrak{R} = \text{dis } f$. (Определение искажения для отображений было дано в 7.1.4.)

Упражнение 7.3.23. Пусть соответствие \mathfrak{R} получено с помощью отображений $f : Z \rightarrow X$ и $g : Z \rightarrow Y$ как в примере 7.3.19. Докажите, что

$$\text{dis } \mathfrak{R} = \sup_{z, z' \in Z} |d_X(f(z), f(z')) - d_Y(g(z), g(z'))|.$$

Упражнение 7.3.24. Докажите, что искажение соответствия $\text{dis } \mathfrak{R}$ между метрическими пространствами X и Y равно нулю тогда и только тогда, когда соответствие \mathfrak{R} ассоциировано с изометричным отображением из X в Y .

Теорема 7.3.25. Для любых метрических пространств X и Y имеет место равенство

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathfrak{R}} (\text{dis } \mathfrak{R}),$$

где инфимум берется по всем соответствиям \mathfrak{R} между X и Y .

Иначе говоря, $d_{GH}(X, Y)$ равно инфимуму тех $r > 0$, для которых существует соответствие между X и Y с $\text{dis } \mathfrak{R} < 2r$.

Доказательство. 1. Докажем, что для любого $r > d_{GH}(X, Y)$ существует соответствие \mathfrak{R} с $\text{dis } \mathfrak{R} < 2r$. В самом деле, поскольку $d_{GH}(X, Y) < r$, то мы можем считать, что X и Y — подпространства некоторого метрического пространства Z и $d_H(X, Y) < r$ в Z . Определим

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, d(x, y) < r\},$$

где d является метрикой на Z . То, что \mathfrak{R} является соответствием, следует из того, что $d_H(X, Y) < r$. Требуемая оценка $\text{dis } \mathfrak{R} < 2r$ вытекает из неравенства треугольника: если $(x, y) \in \mathfrak{R}$ и $(x', y') \in \mathfrak{R}$, то

$$|d(x, x') - d(y, y')| \leq d(x, y) + d(x', y') < 2r.$$

2. Покажем, что $d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \text{dis } \mathfrak{R}$ для любого соответствия \mathfrak{R} . Пусть $\text{dis } \mathfrak{R} = 2r$. Чтобы избежать недоразумений, обозначим через d_X и d_Y метрики пространств X и Y , соответственно. Достаточно показать, что на дизъюнктном объединении $X \cup Y$ существует такая полуметрика d , что $d|_{X \times X} = d_X$, $d|_{Y \times Y} = d_Y$ и $d_H(X, Y) \leq r$ в $(X \cup Y, d)$. Идея состоит в том, чтобы в том случае, когда x и y соответствуют друг другу, расстояние между x и y положить равным r , а затем взять минимальную метрику d , порожденную этим условием. Формально это делается следующим образом: для $x \in X$ и $y \in Y$ определим

$$d(x, y) = \inf\{d_X(x, x') + r + d_Y(y', y) : (x', y') \in \mathfrak{R}\}$$

(расстояния внутри X и Y уже установлены; это — d_X и d_Y). Проверка неравенства треугольника для d и тот факт, что $d_H(X, Y) \leq r$, оставляются читателю в качестве упражнения. \square

Упражнение 7.3.26. Пусть X , Y и Z — метрические пространства, \mathfrak{R}_1 — соответствие между X и Y , а \mathfrak{R}_2 — между Y и Z . Композицией $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ соответствий \mathfrak{R}_1 и \mathfrak{R}_2 называется множество всех тех пар $(x, z) \in X \times Z$, для которых найдется такая точка $y \in Y$, что $(x, y) \in \mathfrak{R}_1$ и $(y, z) \in \mathfrak{R}_2$.

1. Докажите, что множество $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ является соответствием.
2. Докажите, что $\text{dis}(\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2) \leq \text{dis } \mathfrak{R}_1 + \text{dis } \mathfrak{R}_2$.
3. Используя предыдущее неравенство, дайте новое доказательство неравенства треугольника для расстояния по Громову–Хаусдорфу.

Приведенное ниже следствие снабжает нас новым техническим средством для работы с расстояниями по Громову–Хаусдорфу. Хотя оно не позволяет найти точное значение для расстояния, она предоставляет нам другую величину, которая отличается от расстояния не более, чем в два раза. Заметим, что оценка такого рода вполне достаточна для того, чтобы изучать *топологию* (пространства метрических пространств), индуцированную расстоянием по Громову–Хаусдорфу.

Определение 7.3.27. Рассмотрим два метрических пространства X , Y и число $\varepsilon > 0$. Отображение (возможно разрывное!) $f: X \rightarrow Y$ называется ε -изометрией, если $\text{dis } f \leq \varepsilon$ и образ $f(X)$ является ε -сетью в Y .

Следствие 7.3.28. Пусть X и Y — метрические пространства, $\varepsilon > 0$. Тогда

1. Если $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, то существует 2ε -изометрия из X в Y .
2. Если существует ε -изометрия из X в Y , то $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

Доказательство. 1. Пусть \mathfrak{R} — соответствие между X и Y с $\text{dis } \mathfrak{R} < 2\varepsilon$. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую точку $f(x) \in Y$, что $(x, f(x)) \in \mathfrak{R}$. Этим определено некоторое отображение $f: X \rightarrow Y$. Очевидно, что $\text{dil } f \leq \text{dil } \mathfrak{R} < 2\varepsilon$. Покажем, что $f(X)$ является 2ε -сетью в Y . Для точки $y \in Y$ рассмотрим такую точку $x \in X$, что $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Поскольку обе точки, y и $f(x)$, находятся в соответствии с x , то $d(y, f(x)) \leq d(x, x) + \text{dis } \mathfrak{R} < 2\varepsilon$. Следовательно, $\text{dist}(y, f(X)) < 2\varepsilon$.

2. Для ε -изометрии f определим $\mathfrak{R} \subset X \times Y$ как

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) \in X \times Y : d(y, f(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Множество \mathfrak{R} является соответствием, так как $f(X)$ является ε -сетью в Y . Если $(x, y) \in \mathfrak{R}$ и $(x', y') \in \mathfrak{R}$, то

$$\begin{aligned} |d(y, y') - d(x, x')| &\leq |d(f(x), f(x')) - d(x, x')| + d(y, f(x)) + d(y', f(x')) \\ &\leq \text{dis } f + \varepsilon + \varepsilon \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{dis } \mathfrak{R} \leq 3\varepsilon$, а по теореме 7.3.25 $d_{GH}(X, Y) \leq \frac{3}{2}\varepsilon < 2\varepsilon$. \square

Замечание 7.3.29. Важно то, что мы не требуем непрерывности ε -изометрий. Даже если два метрических пространства близки по Громову–Хаусдорфу, непрерывного отображения с малым искажением может не существовать: напомним пример со сферами, снабженными небольшими ручками, из параграфа 7.1.4.

Теперь мы готовы доказать аналог теоремы 7.2.4 для расстояний по Громову–Хаусдорфу. Заметим, что в отличие от расстояний по Липшицу, расстояния по Громову–Хаусдорфу определяют *конечную* метрику.

Теорема 7.3.30. *Расстояния по Громову–Хаусдорфу определяют конечную метрику на пространстве классов изометричных компактных пространств. Иначе говоря, оно неотрицательно, симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника; кроме того, $d_{GH}(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда X и Y изометричны.*

Доказательство. Мы уже доказали почти все эти утверждения, кроме одного, именно, что из равенства $d_{GH}(X, Y) = 0$ следует изометричность X и Y . Пусть $d_{GH}(X, Y) = 0$, причем метрические пространства X и Y компактны. По следствию 7.3.28 существует такая последовательность отображений $f_n : X \rightarrow Y$, что $\text{dis } f_n \rightarrow 0$. Выберем счетное плотное множество $S \subset X$. Используя канторов диагональный процесс, можно получить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ последовательности $\{f_n\}$, что для каждой точки $x \in S$ последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится в Y . Не умаляя общности, мы можем предположить, что это выполняется для исходной последовательности $\{f_n\}$. Далее, можно построить отображение $f : S \rightarrow Y$ как предел отображений f_n . А именно, положим $f(x) = \lim f_n(x)$ для каждого $x \in S$. Поскольку $|d(f_n(x), f_n(y)) - d(x, y)| \leq \text{dis } f_n \rightarrow 0$, то мы имеем $d(f(x), f(y)) = \lim d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y)$ для всех $x, y \in S$. Другими словами, f является сохраняющим расстояние отображением из S в Y . Затем f может быть продолжено до сохраняющего расстояния отображения из всего X в Y (предложение 1.5.9). Теперь мы можем завершить доказательство таким же способом, как в теореме 7.2.4. А именно, поскольку существует аналогичное сохраняющее расстояния отображение из Y в X , то отсюда следует, что X и Y изометричны. \square

Эта теорема позволяет нам рассматривать компактные метрические пространства как точки так называемого *пространства Громов–Хаусдорфа*. При этом не следует забывать, что изометричные между собой пространства представляют одну “точку”. Топология этого пространства (индуцированная метрикой Громов–Хаусдорфа) называется *топологией Громов–Хаусдорфа*. (Теоретико-множественное замечание, сделанное нами после теоремы 7.2.4 применимо и здесь.)

Упражнение 7.3.31. Докажите следующее обобщение теоремы 7.3.30. Если X и Y являются метрическими пространствами, $d_{GH}(X, Y) = 0$ и X компактно, а Y полно, то X и Y изометричны.

Подсказка. Покажите, что Y компактно. Чтобы это сделать, для каждого $\varepsilon > 0$ постройте конечную ε -сеть в Y .

7.4. Сходимость по Громову–Хаусдорфу

В этом параграфе мы рассмотрим последовательности компактных метрических пространств, сходящиеся в пространстве Громов–Хаусдорфа.

По определению, последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактных метрических пространств сходится к компактному метрическому пространству X , если $d_{GH}(X_n, X) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае мы будем писать $X_n \xrightarrow{GH} X$ и называть X *пределом по Громову–Хаусдорфу* последовательности $\{X_n\}$. Поскольку d_{GH} является метрическим пространством (теорема 7.3.30), то предел единственен с точностью до изометрии.

7.4.1. Примеры и свойства.

Пример 7.4.1 (сходимость по Хаусдорфу). Для подпространств одного и того же метрического пространства расстояние по Громову–Хаусдорфу по определению не превосходит расстояния по Хаусдорфу. Таким образом, сходимость по Хаусдорфу подмножеств данного пространства влечет сходимость по Громову–Хаусдорфу (но не наоборот).

Из следствия 7.3.28 вытекает такой критерий сходимости по Громову–Хаусдорфу: последовательность $\{X_n\}$ метрических пространств сходится к метрическому пространству X тогда и только тогда, когда существуют такие последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}$ и последовательность отображений $f_n: X_n \rightarrow X$ (или наоборот, $f_n: X \rightarrow X_n$), что каждое f_n является ε_n -изометрией и $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Это замечание включает и “функциональные” типы сходимости из нашего списка примеров.

Пример 7.4.2 (равномерная сходимость). Если последовательность метрических пространств X_n сходится равномерно (в смысле определения 7.1.5) к метрическому пространству X , то $X_n \xrightarrow{GH} X$.

Пример 7.4.3 (сходимость по Липшицу). Как мы заметили в упражнении 7.2.6, сходимость по Липшицу является частным случаем равномерной, а значит, и частным случаем сходимости по Громову–Хаусдорфу. Другими словами, топология Громова–Хаусдорфа слабее, чем топология Липшица.

Пример 7.4.4 (равномерная сходимость к полуметрике). Если последовательность $\{d_n\}$ метрик задана на фиксированном множестве X и равномерно сходится к некоторой функции $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, то d , очевидно, является полуметрикой, а факторпространство X/d (ср. с предложением 1.1.5) является пределом по Громову–Хаусдорфу пространств (X, d_n) .

В самом деле, искажения проекций $X \rightarrow X/d$ по отношению к метрикам d_n стремятся к нулю.

Заметим, что если X — конечное множество, то достаточно потребовать, чтобы выполнялось $d_n(x, y) \rightarrow d(x, y)$ для каждой пары $x, y \in X$, так как поточечная сходимость функций на конечном множестве влечет равномерную сходимость.

Упражнение 7.4.5. Докажите, что любая сходящаяся последовательность $\{X_n\}$ конечных метрических пространств фиксированной мощности N может быть представлена в таком виде. Иначе говоря, существует последовательность метрик $\{d_n\}$ на фиксированном множестве X , такая что (X, d_n) изометрично X_n и $\{d_n\}$ равномерно сходится к полуметрике.

В частности, предел последовательности $\{X_n\}$ является конечным пространством мощности не более N .

Упражнение 7.4.6. Докажите, что последовательность метрических пространств $\{X_n\}$ сходится к одноточечному пространству тогда и только тогда, когда $\text{diam}(X_n) \rightarrow 0$.

Следующее упражнение описывает общий вид последовательностей, сходящихся к конечным множествам.

Упражнение 7.4.7. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность метрических пространств, а X — конечное метрическое пространство мощности N , $X = \{x_i : 1 \leq i \leq N\}$.

1. Предположим, что $X_n \xrightarrow{GH} X$. Докажите, что тогда для всех достаточно больших n мощность X_n равна по крайней мере N .

2. Докажите, что $X_n \xrightarrow{GH} X$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее. Для всех достаточно больших n X_n может быть разложено в дизъюнктное объединение N таких непустых множеств $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,N}$, что для всех i, j

$$\text{diam}(X_{n,i}) \rightarrow 0, \quad \text{dist}(X_{n,i}, X_{n,j}) \rightarrow |x_i x_j| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Упражнение 7.4.8. Пусть N — фиксированное натуральное число. Докажите, что на классе конечных метрических пространств мощности N все три метрики: по Липшицу, равномерная и по Громову–Хаусдорфу определяют одну и ту же топологию. Дайте полное описание этой топологии.

Читатель может удивиться тому, что мы уделяем столько внимания тривиальному случаю конечных пространств. Одна из причин — это то, что конечные пространства образуют плотное множество в пространстве Громов–Хаусдорфа.

Пример 7.4.9. Любое компактное метрическое пространство X является пределом по Громову–Хаусдорфу последовательности конечных пространств. В самом деле, возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и выберем для каждого n конечную ε_n -сеть S_n в X . Тогда $S_n \xrightarrow{GH} X$ просто потому, что $d_{GH}(X, S_n) \leq d_H(X, S_n) \leq \varepsilon_n$.

Более того, выбирая подходящие ε -сети, можно, в сущности, свести сходимости произвольных метрических пространств к сходимости их конечных подмножеств. Обсудим это подробнее.

Определение 7.4.10. Пусть X и Y — компактные метрические пространства, $\varepsilon, \delta > 0$. Говорят, что X и Y являются (ε, δ) -аппроксимациями друг для друга, если существуют такие конечные наборы точек $\{x_i\}_{i=1}^N$ и $\{y_i\}_{i=1}^N$ в X и Y , соответственно, что

- (1) множество $\{x_i : 1 \leq i \leq N\}$ является ε -сетью в X , а множество $\{y_i : 1 \leq i \leq N\}$ — ε -сетью в Y .
- (2) $|d_X(x_i, x_j) - d_Y(y_i, y_j)| < \delta$ для всех $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

ε -Аппроксимация — это то же самое, что и $(\varepsilon, \varepsilon)$ -аппроксимация (т.е. δ опускается, если $\delta = \varepsilon$).

Предложение 7.4.11. Пусть X и Y — компактные метрические пространства.

- (1) Если Y является (ε, δ) -аппроксимацией для X , то $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon + \delta$.
- (2) Если $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, то Y является 5ε -аппроксимацией для X .

Доказательство. 1. Пусть $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^N$ и $Y_0 = \{y_i\}_{i=1}^N$ — конечные наборы, о которых шла речь в определении 7.4.10. Второе условие определения означает, что естественное соответствие $\{(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq N\}$ между X_0 и Y_0 имеет искажение меньше, чем δ . Следовательно $d_{GH}(X_0, Y_0) < \delta/2$. Поскольку X_0 и Y_0 являются ε -сетями в X и Y , соответственно, то $d_{GH}(X, X_0) \leq \varepsilon$ и $d_{GH}(Y, Y_0) \leq \varepsilon$. Теперь утверждение вытекает из неравенства треугольника для d_{GH} .

2. По следствию 7.3.28 существует 2ε -изометрия $f: X \rightarrow Y$. Пусть $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^N$ — ε -сеть в X ; положим $y_i = f(x_i)$. Тогда $|d(x_i, x_j) - d(y_i, y_j)| < 2\varepsilon < 5\varepsilon$ для всех i, j . Остается доказать, что $Y_0 = \{y_i : 1 \leq i \leq N\}$ является 5ε -сетью в Y . Возьмем $y \in Y$. Поскольку множество $f(X)$ является 2ε -сетью в Y , то существует такая точка $x \in X$, что $d(y, f(x)) \leq 2\varepsilon$. Поскольку X_0 является ε -сетью в X , то существует такая точка $x_i \in X_0$, что $d(x, x_i) \leq \varepsilon$. Теперь

$$\begin{aligned} d(y, y_i) &= d(y, f(x_i)) \leq d(y, f(x)) + d(f(x), f(x_i)) \\ &\leq 2\varepsilon + d(x, x_i) + \text{dis } f \leq 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon \leq 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{dist}(y, Y_0) \leq d(y, y_i) \leq 5\varepsilon$. \square

Это предложение дает критерий сходимости; именно, $X_n \xrightarrow{GH} X$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ пространство X_n является ε -аппроксимацией для X при всех достаточно больших n . Существует более элегантная формулировка такого сорта.

Предложение 7.4.12. Если пространства X и $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ компактны, то $X_n \xrightarrow{GH} X$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее

условие. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные ε -сети, S в X и S_n в каждом из X_n , что $S_n \xrightarrow{GH} S$.

Более того, эти ε -сети могут быть выбраны так, что для каждого достаточно большого n сеть S_n имеет ту же мощность, что и S .

Доказательство. Если такие ε -сети существуют, то X_n является ε -аппроксимацией для X при всех достаточно больших n . Тогда $X_n \xrightarrow{GH} X$ по предыдущему предложению. Чтобы доказать обратное, возьмем конечную $(\varepsilon/2)$ -сеть S в X и построим соответствующие сети S_n в X_n . Именно, выберем последовательность ε_n -аппроксимаций $f_n: X \rightarrow X_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$, и положим $S_n = f_n(S)$. Тогда $S_n \xrightarrow{GH} S$ и, как и в предыдущем предложении, S_n является ε -сетью в X_n для всех достаточно больших n . \square

Упомянем одно важное следствие этой конструкции. Пусть $X_n \xrightarrow{GH} X$ и S является конечным подмножеством X (не обязательно ε -сетью для малых ε). Как и в предыдущем доказательстве, построим множества $S_n \subset X_n$, соответствующие S . Тогда S_n сходятся к S ; т.е. расстояния в S_n сходятся к соответствующим расстояниям S . Из этого следует, что все (имеющие смысл) геометрические характеристики множеств S_n сходятся к аналогичным характеристикам S . Это дает нам способ доказательств некоторых утверждений, касающихся непрерывности в пространстве Громова–Хаусдорфа: если некоторое свойство пространств X_n может быть сформулировано на языке конечных наборов точек, то это свойство автоматически наследуется предельным пространством X .

Чтобы увидеть, как применить эту схему на практике, рассмотрим свойство метрики быть внутренней. У нас есть критерий существования середины (теорема 2.4.16), выражающий это свойство в терминах троек точек. Поскольку тройки точек в сходящихся пространствах соответствуют почти изометричным им тройкам в предельном пространстве, то предел компактных пространств с внутренней метрикой является пространством с внутренней метрикой. Мы повторим это доказательство более формально в параграфе 7.5 (см. теорему 7.5.1).

7.4.2. Теорема компактности. Поскольку топология Громова–Хаусдорфа довольно слабая (по сравнению, скажем, с топологией, индуцированной липшицевой метрикой), то можно ожидать, что в ней довольно много компактных множеств. В самом деле, многие естественные классы метрических пространств образуют (пред-)компактные множества в пространстве Громова–Хаусдорфа. В этом параграфе мы не доказываем конкретных утверждений подобного рода, а только даем общий критерий компактности.

Из предложения 7.4.12 следует, что элементы последовательности $\{X_n\}$, сходящейся в пространстве Грому–Хаусдорфа, должны содержать ε -сети равномерно ограниченной мощности (для каждого данного $\varepsilon > 0$). Следовательно, если класс \mathfrak{X} метрических пространств предкомпактен в топологии Грому–Хаусдорфа, то для каждого $\varepsilon > 0$ мощность минимальной ε -сети равномерно ограничена для всех элементов \mathfrak{X} . Из сказанного выше следует, что это свойство \mathfrak{X} , при условии, что диаметры его элементов равномерно ограничены, достаточно для предкомпактности. Формализуем сказанное.

Определение 7.4.13. Будем говорить, что класс \mathfrak{X} компактных метрических пространств *вполне равномерно ограничен*, если

- (1) Существует такая постоянная D , что $\text{diam } X \leq D$ для всех $X \in \mathfrak{X}$.
- (2) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что каждое $X \in \mathfrak{X}$ содержит ε -сеть, состоящую из не более, чем N точек.

Упражнение 7.4.14. Докажите, что если метрики всех элементов из \mathfrak{X} внутренние, то первое условие предыдущего определения избыточно (т.е. вытекает из второго).

Теорема 7.4.15. *Каждый вполне равномерно ограниченный класс \mathfrak{X} компактных метрических пространств предкомпактен в пространстве Грому–Хаусдорфа. То есть любая последовательность элементов из \mathfrak{X} содержит сходящуюся в себе подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть D и $N(\varepsilon)$ имеют тот же смысл, что и в определении 7.4.13. Положим $N_1 = N(1)$ и $N_k = N_{k-1} + N(1/k)$ для всех $k \geq 2$. Рассмотрим последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрических пространств из \mathfrak{X} . В каждом пространстве X_n рассмотрим объединение $S_n = \{x_{i,n}\}_{i=1}^{\infty} \subset X_n$ $(1/k)$ -сетей для всех $k \in \mathbb{N}$. Это — счетный всюду плотный набор, причем для каждого k первые N_k точек из S_n образуют $(1/k)$ -сеть в X_n . Все расстояния $|x_{i,n}x_{j,n}|$ не превышают D , т.е. принадлежат компактному интервалу. Таким образом, используя диагональный процесс Кантора, можно из $\{X_n\}$ выбрать подпоследовательность, в которой $\{|x_{i,n}x_{j,n}|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится для всех i, j . Чтобы упростить запись, будем считать, что все они сходятся и без перехода к подпоследовательности.

Теперь построим предельное пространство \bar{X} для $\{X_n\}$. Выберем произвольное счетное множество $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и определим полуметрику d на X равенством

$$d(x_i, x_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n,i}x_{n,j}|.$$

Конструкция факторпространства из предложения 1.1.5 дает нам метрическое пространство X/d . Обозначим через \bar{x}_i точку из X/d , являющуюся

проекцией точки x_i . Наше факторпространство может оказаться неполным, обозначим через \bar{X} пополнение X/d . Докажем, что $\{X_n\}$ сходится к \bar{X} .

Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $S^{(k)} = \{\bar{x}_i : 1 \leq i \leq N_k\} \subset \bar{X}$. Это — $(1/k)$ -сеть в \bar{X} . В самом деле, каждое множество $S_n^{(k)} = \{x_{i,n} : 1 \leq i \leq N_k\}$ является $(1/k)$ -сетью в соответствующем пространстве X_n . Следовательно, для каждого $x_{i,n} \in S_n$ существует такое $j \leq N_k$, что $|x_{i,n}x_{j,n}| \leq 1/k$. Поскольку N_k не зависит от n , то для каждого конкретного $i \in \mathbb{N}$ существует такое $j \leq N_k$, что $|x_{i,n}x_{j,n}| \leq 1/k$ для бесконечно большого числа индексов n . Переходя к пределу, получаем что $|\bar{x}_i\bar{x}_j| \leq 1/k$ для всех таких j . Таким образом, $S^{(k)}$ является $(1/k)$ -сетью в X/d и, следовательно, в \bar{X} . Поскольку \bar{X} полно и обладает $(1/k)$ -сетью для каждого $k \in \mathbb{N}$, то оно компактно.

Более того, множество $S^{(k)}$ является пределом последовательности множеств $S_n^{(k)}$ при $n \rightarrow \infty$ в топологии Громова–Хаусдорфа, так как это — конечные множества, состоящие из N_k точек (некоторые из которых могут совпадать), а расстояния сходятся. Так что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем $(1/k)$ -сеть в \bar{X} , которая является пределом по Громову–Хаусдорфу некоторых $(1/k)$ -сетей в пространствах X_n . Из предложения 7.4.12 следует, что $X_n \xrightarrow{GH} \bar{X}$. \square

Упражнение 7.4.16. Пусть M^n — компактное риманово многообразие. Докажите, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует ε -сеть в M , содержащая не более чем $\varepsilon^{-n}C(n) \text{Vol}(M)$ точек (для некоторой постоянной $C(n)$, не зависящей от M). Здесь Vol означает риманов объем.

Результат этого упражнения *не* означает, что любой класс компактных римановых n -многообразий с равномерно ограниченным объемом предкомпактен в топологии Громова–Хаусдорфа. Все дело в выражении “достаточно малый”: на самом деле свойство быть “малым” зависит от M .

Упражнение 7.4.17. Приведите пример такого семейства двумерных римановых многообразий, площади которых не более 1 и которое не является предкомпактным в топологии Громова–Хаусдорфа.

Информация. Здесь приведены (без доказательств) некоторые важные примеры предкомпактных классов римановых многообразий.

Ограниченный объем и радиус инъективности. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых $r, V > 0$ класс всех n -мерных римановых многообразий с объемами $\leq V$ и радиусами инъективности $\geq r$ предкомпактен.

Ограниченный диаметр и кривизна. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\kappa \in \mathbb{R}$, $D > 0$ класс всех n -мерных римановых многообразий с диаметром $\leq D$ и секционной кривизной $\geq \kappa$ предкомпактен. Мы докажем это в главе

10, как часть более общего утверждения о пространствах Александрова (теорема 10.7.2). Кроме того, то же самое верно, если вместо секционных кривизн ограничить кривизны Риччи.

7.5. Сходимость пространств с внутренней метрикой

Мы уже упоминали, что пределом по Громову–Хаусдорфу пространств с внутренней метрикой является пространство с внутренней метрикой. Иначе говоря, пространства с внутренней метрикой образуют замкнутое множество в топологии Громова–Хаусдорфа. Здесь мы сформулируем этот важный факт как теорему и дадим более подробное доказательство (которое не что иное, как формализация рассуждений, приведенных в конце пункта 7.4.1).

Теорема 7.5.1. *Если последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространств с внутренней метрикой сходится к полному метрическому пространству X : $X_n \xrightarrow{GH} X$, то X является пространством с внутренней метрикой.*

Доказательство. Согласно критерию того, что метрика полного пространства является внутренней (теорема 2.4.16), нам достаточно доказать, что любые две точки $x, y \in X$ имеют ε -середину для каждого $\varepsilon > 0$. Пусть n таково, что $d_{GH}(X, X_n) < \varepsilon/10$. Тогда, по теореме 7.3.25, существует такое соответствие \mathfrak{R} между X и X_n , что его искажение меньше, чем $\varepsilon/5$. Возьмем точки $\tilde{x}, \tilde{y} \in X_n$, соответствующие точкам x и y . Поскольку X_n является пространством с внутренней метрикой, существует $(\varepsilon/5)$ -середина $\tilde{z} \in X_n$ для \tilde{x} и \tilde{y} . Пусть $z \in X$ — точка, соответствующая точке \tilde{z} . Тогда

$$\left| |xz| - \frac{1}{2}|xy| \right| \leq \left| |\tilde{x}\tilde{z}| - \frac{1}{2}|\tilde{x}\tilde{y}| \right| + 2 \operatorname{dis} \mathfrak{R} < \varepsilon/5 + 2\varepsilon/5 < \varepsilon.$$

Аналогично, $\left| |yz| - \frac{1}{2}|xy| \right| < \varepsilon$. Таким образом, z является ε -серединой для x и y . \square

7.5.1. Первые примеры. При проверке сходимости пространств с внутренней метрикой следует быть очень внимательным, поскольку поиск расстояний в этом случае — дело тонкое и сложное. Это предупреждение мы поясним следующими примерами, которые должны помочь читателю понять, какого рода трудности могут возникнуть.

Упражнение 7.5.2. 1. Пусть X_n — сферы S^2 из которых удалены круги радиусов $1/n$. Докажите, что пространства X_n (рассматриваемые со своими внутренними метриками) сходятся к S^2 .

2. Пусть X_n получены таким же образом из S^1 . Покажите, что X_n не сходятся к S^1 .

Упражнение 7.5.3. 1. Пусть X — отрезок прямой в \mathbb{R}^3 и пусть X_n — граница его $(1/n)$ -окрестности (т.е. двумерная поверхность) с внутренней метрикой, индуцированной из \mathbb{R}^3 . Докажите, что $X_n \xrightarrow{GH} X$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Пусть X — плоский диск в \mathbb{R}^3 и пусть снова X_n — граница его $(1/n)$ -окрестности с ее внутренней метрикой. Докажите, что последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в смысле Громова–Хаусдорфа, но ее предел не изометричен X .

Упражнение 7.5.4. Обоснуйте сходимость “сфер с маленькими ручками”, описанную в параграфе 7.1.4. А именно, пусть X_n — это пространства с внутренней метрикой, полученные из стандартной единичной сферы следующим образом. Из сферы удаляется диск диаметра, меньшего $1/n$ и вместо него приклеивается ручка, (внутренний!) диаметр которой меньше, чем $1/n$. Докажите, что $X_n \xrightarrow{GH} S^2$.

Любое компактное метрическое пространство может быть получено как предел конечных пространств (пример 7.4.9), однако конечные пространства (кроме одноточечного пространства) не могут нести внутренней метрики. Для пространств с внутренней метрикой роль, аналогичную роли конечных (нульмерных) пространств, играют одномерные пространства, т.е. графы. Напомним, что конечный метрический граф — это пространство с внутренней метрикой, полученное путем склеивания нескольких пространств, каждое из которых изометрично отрезку прямой. При этом требуется, чтобы общими точками отрезков были только их концы. Равносильно, конечный метрический граф — это конечный топологический граф, снабженный внутренней метрикой.

Предложение 7.5.5. *Всякое компактное пространство с внутренней метрикой можно получить как предел конечных графов.*

Доказательство. Пусть X — пространство с внутренней метрикой. Возьмем маленькие положительные числа ε и δ (где δ много меньше, чем ε) и выберем конечную δ -сеть в X . Затем рассмотрим следующий граф G : сеть S образует множество вершин графа G и две точки $x, y \in S$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $|xy| < \varepsilon$, причем длину этого ребра полагаем равной $|xy|$.

Покажем, что если δ достаточно мало, то G является ε -аппроксимацией для X (сравните с определением 7.4.10), скажем, достаточно считать, что $\delta < \frac{1}{4}\varepsilon^2/\text{diam}(X)$. Рассматриваем S и как подмножество X , и как подмножество G . Очевидно, S является ε -сетью в обоих пространствах, а $|xy|_G \geq |xy|$ для всех $x, y \in S$, где $|\cdot|_G$ обозначает расстояние в G . Остается показать, что $|xy|_G \leq |xy| + \varepsilon$.

Обозначим через γ кратчайшую в X , соединяющую x и y . Выберем n точек x_1, \dots, x_n , где $n \leq 2L(\gamma)/\varepsilon$, разбивающих γ на интервалы длины

не более $\varepsilon/2$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ существует такая точка $y_i \in S$, что $|x_i y_i| \leq \delta$. Кроме того, положим $x_0 = y_0 = x$ и $x_{n+1} = y_{n+1} = y$. Заметим, что $|y_i y_{i+1}| \leq |x_i x_{i+1}| + 2\delta < \varepsilon$ для всех $i = 0, \dots, n$. В частности, при условии, что $\delta < \varepsilon/4$, точки y_i и y_{i+1} соединены в графе G ребро. Тогда

$$|xy|_G \leq \sum_{i=0}^n |y_i y_{i+1}| \leq \sum_{i=0}^n |y_i y_{i+1}| + 2\delta n = |xy| + 2\delta n.$$

Напомним, что $n \leq 2L(\gamma)/\varepsilon \leq 2 \operatorname{diam}(X)/\varepsilon$; следовательно

$$|xy|_G \leq |xy| + \delta \cdot \frac{4 \operatorname{diam}(X)}{\varepsilon} < |xy| + \varepsilon,$$

если только $\delta < \frac{1}{4}\varepsilon^2/\operatorname{diam}(X)$.

Таким образом, у нас есть конечный граф, являющийся ε -аппроксимацией X . Устремляя ε к нулю, получим последовательность графов, сходящихся к X . \square

Упражнение 7.5.6. Докажите, что всякое компактное пространство с внутренней метрикой X может быть представлено как предел по Громову–Хаусдорфу конечных графов, изометрично вложенных в X , т.е. топологических графов, вложенных в X и снабженных индуцированной внутренней метрикой.

Подсказка. Используйте ту же конструкцию, что и в предыдущем доказательстве, но проводите ребра в X как кратчайшие, добавляя новые вершины, когда эти кратчайшие пересекаются. Чтобы избежать патологических случаев, когда необходимо добавлять бесконечное число вершин, покажите, что кратчайшие можно выбирать таким образом, что пересечение любых двух из них пусто, одна точка или интервалы на обеих кратчайших.

Заметим, что число вершин и ребер графов, построенных в доказательстве предложения 7.5.5, стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Другими словами, графы становятся все сложнее и сложнее. Это не дефект этой конкретной конструкции, а следствие общего препятствия, см. следующее упражнение.

Упражнение 7.5.7. 1. Пусть N — натуральное число и $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность графов, имеющих не более N ребер каждый. Докажите, что если предел $\{X_n\}$ существует, то он является конечным графом.

2. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность конечных графов, имеющих не более N вершин каждый. Докажите, что если предел $\{X_n\}$ существует, то он является (возможно бесконечным) графом.

7.5.2. Пределы в топологии Громова–Хаусдорфа. Этот пункт состоит из упражнений, некоторые из которых довольно трудные. Они демонстрируют, что может и что не может происходить при переходе к пределу по Громову–Хаусдорфу в случае пространств с внутренней метрикой.

Общая закономерность: в размерностях 1 и 2 можно ожидать хороших топологических соотношений между сходящимися пространствами и их пределом. В бóльших размерностях могут существовать связи между фундаментальными группами, но кроме этого ничего сказать нельзя.

Первое упражнение — это общий факт о сходимости по Громову–Хаусдорфу (не характерный для пространств с внутренней метрикой). Чтобы лучше понять его, опять напомним сферы с исчезающими ручками из параграфа 7.1.4. Не существует непрерывного отображения с небольшим искажением из сферы в сферу с небольшой ручкой, но существует такое отображение в обратном направлении: просто спроектируйте эту поверхность на сферу.

Упражнение 7.5.8. (а) Пусть X — единичный шар в \mathbb{R}^n , $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность метрических компактов, причем $X_n \xrightarrow{GH} X$. Докажите, что существует последовательность таких *непрерывных* отображений $f_n : X_n \rightarrow X$, что f_n являются ε_n -изометриями для некоторой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Докажите то же самое, если X — это

(b) единичная окружность S^1 ;

(c) сфера S^{m-1} ;

(d) n -мерный тор $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$;

(e) метрическое пространство гомеоморфное одному из перечисленных выше;

(f) метрическое пространство, гомеоморфное компактному гладкому многообразию.

(g) Докажите то же самое при более слабых (настолько, насколько это возможно) топологических ограничениях на X .

Подсказка. Воспользуйтесь следствием 7.3.28, чтобы получить последовательность (возможно разрывных) отображений, а затем приблизьте эти отображения непрерывными.

Упражнение 7.5.9. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность компактных пространств с внутренней метрикой, $X_n \xrightarrow{GH} S^1$. Докажите, что пространства X_n не односвязны при всех достаточно больших n .

Подсказка. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность отображений из предыдущего упражнения. Постройте “почти поднятие” окружности в X_n , а именно, замкнутую кривую в X_n , которая, в некотором смысле, отображается на

окружность “почти изометрично”. А затем покажите, что эта кривая не стягиваема.

Замечание 7.5.10. Существенно, что пространства X_n в последнем упражнении имеют внутренние метрики. Чтобы понять причину, рассмотрим последовательность $\{X_n\}$, где X_n — дуга окружности S^1 длины $2\pi - \frac{1}{n}$, снабженная сужением на нее метрики окружности (не внутренней).

Упражнение 7.5.11. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность компактных локально односвязных пространств с внутренней метрикой, $X_n \xrightarrow{GH} X$ и пусть f_n — отображения из упражнения 7.5.8. Докажите, что при всех достаточно больших n отображения f_n индуцируют сюръективный гомоморфизм фундаментальных групп.

В частности, если пространства X_n односвязны, то и X односвязно.

Подсказка. Смотрите предыдущее упражнение.

Упражнение 7.5.12. Пусть $\{B_n\}$ — последовательность пространств с внутренней метрикой, гомеоморфных стандартному единичному двумерному кругу B , причем $B_n \xrightarrow{GH} B$. Тогда для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого n найдется такая точка $p_n \in B_n$, что $\text{dist}(p_n, \partial B_n) > 1 - \varepsilon$.

Подсказка. Докажите, что в B_n существует жорданова кривая, образ которой в B близок (в смысле равномерной метрики) к ∂B . Эта кривая ограничивает область в B_n . Внутри этой области должна существовать точка, соответствующая центру B в смысле аппроксимации по Громову–Хаусдорфу. Эту точку можно взять в качестве p_n .

Упражнение 7.5.13. Докажите, что последовательность пространств с внутренней метрикой, гомеоморфных S^2 , не может сходиться к

- (a) стандартному двумерному диску B ;
- (b) пространству, гомеоморфному B .

Упражнение 7.5.14. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность пространств с внутренней метрикой, гомеоморфных S^2 и сходящихся по Громову–Хаусдорфу к пространству X , также гомеоморфному S^2 . Докажите, что тогда существует последовательность гомеоморфизмов $f_n : X_n \rightarrow X$ с $\text{dis}(f_n) \rightarrow 0$.

Упражнение 7.5.15. 1. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность пространств с внутренней метрикой, гомеоморфных S^2 и сходящихся к некоторому пространству X . Докажите, что X не может содержать подмножества, гомеоморфного трехмерному диску.

2. Докажите то же самое для последовательности $\{X_n\}$ компактных двумерных многообразий с внутренней метрикой, при условии, что их роды (число ручек и пленок) равномерно ограничены.

3. Покажите, что без условия равномерной ограниченности рода, предел $\{X_n\}$ может быть любым компактным пространством с внутренней метрикой. (Сравните с предложением 7.5.5 и упражнением 7.5.7.)

Подсказка к 1 и 2. Существует граф, который может (соответственно, любой граф может) быть топологически вложен в трехмерный диск, но не в X_n .

Большинство свойств, приведенных в этой группе упражнений, выполняются лишь в двумерном случае. Ниже приведены некоторые контрпримеры к их многомерным аналогам.

Упражнение 7.5.16. Пусть B — стандартный трехмерный шар. Покажите, что для любого данного $\varepsilon > 0$ существует пространство B' с внутренней метрикой, гомеоморфное B и такое, что $d_{GH}(B, B') < \varepsilon$, а $\partial B'$ является ε -сетью в B' (сравните с упражнением 7.5.12).

Подсказка. Вдавите границу внутрь шара таким образом, чтобы она стала ε -сетью, но внутренние расстояния в шаре изменились бы не сильно.

Упражнение 7.5.17. Постройте последовательность $\{X_n\}$ пространств с внутренней метрикой, гомеоморфных S^3 и сходящихся к трехмерному шару (сравните с упражнением 7.5.13).

Подсказка. Рассмотрите удвоение пространства B' из предыдущего упражнения (т.е. результат склеивания двух изометричных копий B' вдоль изометрии границ).

Упражнение 7.5.18. Постройте последовательность $\{X_n\}$ пространств с внутренней метрикой, гомеоморфных S^3 и таких, что $X_n \xrightarrow{GH} S^3$, но не существует гомеоморфизма из X_n в S^3 с искажением меньшим, чем $1/10$ (сравните с упражнением 7.5.15).

Геометрия крупного масштаба

Чтобы получить представление, о чем пойдет речь в этой главе, вообразите себе измерительный инструмент, который способен измерять расстояния, скажем, с точностью до одного километра. Такой прибор бесполезен для инженера, проектирующего кузов автомобиля, однако он превосходен для изучения геометрии солнечной системы. В этой главе мы рассматриваем как раз такие метрические свойства, для которых наш измерительный прибор был бы в самый раз. Иными словами, мы собираемся не различать две метрики, если расстояния в них отличаются не более, чем на некоторую постоянную величину. Точнее говоря, мы будем исследовать те свойства, которые одинаковы у пространств, находящихся на конечном расстоянии друг от друга в метрике Громова–Хаусдорфа. Например, евклидово пространство и целочисленная решетка в нем (с метрикой, являющейся сужением евклидовой метрики на решетку) выглядят с этой точки зрения совершенно одинаковыми. Конечно, никакие локальные свойства пространств не выживают при такой подмене, но многие глобальные и асимптотические свойства сохраняются.

В некоторых случаях мы будем допускать еще менее точное “измерение расстояний”. Например, рассмотрим измерительный прибор, который может ошибаться в десять раз по сравнению с истинным расстоянием и, кроме этого, допускать погрешность в один километр. Удивительно, но такой инструмент позволяет, например, отличить евклидову плоскость от плоскости Лобачевского. (Вопрос такого рода, касающейся физической вселенной, — это известная проблема современной космологии и физики. Увы, наши реальные приборы еще не столь хороши.)

8.1. Пределы по Громову–Хаусдорфу для некомпактных пространств

Обычная сходимость в метрике по Громову–Хаусдорфу не слишком полезна в случае некомпактных пространств. Здесь прослеживается явная аналогия с равномерной сходимостью функций в фиксированной области задания. Если область компактна, то равномерная сходимость является удобным и широко используемым понятием, но она становится слишком ограничительным требованием при рассмотрении некомпактных областей задания. Например, последовательность $\{\lambda_n f\}$, где f — непрерывная функция и $\{\lambda_n\}$ — сходящаяся последовательность вещественных чисел, может не сходиться равномерно просто в силу неограниченности f . В таких случаях вместо равномерной сходимости используется менее ограничительное понятие равномерной сходимости на компактах: последовательность функций сходится тогда и только тогда, когда она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве области задания.

Такой же подход используется в случае сходимости по Громову–Хаусдорфу для некомпактных метрических пространств. Грубо говоря, последовательность метрических пространств $\{X_n\}$ сходится к пространству X , если для каждого $r > 0$ шары радиуса r в X_n с центрами в некоторой фиксированной точке сходятся (как компактные метрические пространства) к шару радиуса r в X . Настоящее определение (см. ниже, определение 8.1.1) сложнее, но в большинстве случаев оно оказывается равносильным этому описанию.

Чтобы понять отличие этого подхода от обычной сходимости по Громову–Хаусдорфу, рассмотрим последовательность евклидовых сфер с неограниченно возрастающими радиусами. Для фиксированного $r > 0$ множества в этих сферах, имеющие диаметры, не превосходящие фиксированное число r , будут выглядеть все более и более похожими на подмножества евклидовой плоскости, но сами сферы не становятся близкими к плоскости в каком либо смысле. На самом деле последовательность этих сфер не имеет предела в смысле обычной сходимости по Громову–Хаусдорфу, но она сходится к плоскости в смысле более общего определения, которое мы сейчас сформулируем.

Определение 8.1.1. *Пунктированным метрическим пространством* (или пространством с отмеченной точкой) называется пара (X, p) , состоящая из метрического пространства X и точки $p \in X$.

Говорят, что последовательность $\{(X_n, p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ пунктированных метрических пространств сходится по Громову–Хаусдорфу к пунктированному метрическому пространству (X, p) , если выполняются следующие условия: для каждого $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_0 , что для

каждого $n > n_0$ найдется (не обязательно непрерывное) отображение $f : B_r(p_n) \rightarrow X$ такое, что:

- (1) $f(p_n) = p$;
- (2) $\text{dis } f < \varepsilon$;
- (3) ε -окрестность множества $f(B_r(p_n))$ содержит шар $B_{r-\varepsilon}(p)$.

Мы будем использовать обозначение $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$ для такой сходимости.

Упражнение 8.1.2. Докажите, что для компактных метрических пространств сходимость пунктированных пространств и обычная сходимость по Громову–Хаусдорфу равносильны в следующем смысле:

1. Из $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$ следует, что $X_n \xrightarrow{GH} X$.
2. Если $X_n \xrightarrow{GH} X$ и $p \in X$, то в каждом X_n можно выбрать точку p_n так, что $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$.

Первое условие приведенного выше определения говорит о том, что множество $f(B_r(p_n))$ содержится в шаре радиуса $r + \varepsilon$ с центром в p . Отсюда и из третьего условия вытекает (по следствию 7.3.28), что шар $B_r(p_n)$ в X_n лежит на расстоянии порядка ε от некоторого подмножества X , содержащегося в шаре радиуса $r + \varepsilon$ и содержащего шар радиуса $r - \varepsilon$; оба шара — с центром в p .

Если X — пространство с внутренней метрикой, то последнее заключение остается верным для шаров радиуса r вместо неизвестного подмножества. Другими словами, для каждого $r > 0$ шары в X_n радиуса r с центрами в p_n сходятся (в метрике Громов–Хаусдорфа) к шару в X радиуса r с центром в p . В общем случае (то есть, если метрика не обязательно внутренняя) такое упрощение неправомерно (см. упражнения ниже).

Упражнение 8.1.3. Пусть $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$, где X — пространство с внутренней метрикой. Докажите, что $B_r(p_n) \xrightarrow{GH} B_r(p)$ при любом $r > 0$.

Упражнение 8.1.4. Покажите, что утверждение предыдущего упражнения становится неверным, без предположения, что X — пространство с внутренней метрикой. Для этого постройте такую последовательность $\{X_n\}$ компактных метрических пространств, сходящуюся к компактному метрическому пространству X , что при этом не существует последовательности замкнутых единичных шаров в X_n , сходящихся к замкнутому единичному шару в X .

Сходимость шаров не влечет сама по себе сходимости пунктированных пространств. Первое условие из определения 8.1.1 несет дополнительную информацию, которая ставит точки p_n и p в особое положение. Грубо говоря, должны сходиться не только шары, но, одновременно, и их выделенные центры.

Упражнение 8.1.5. Придумайте такое метрическое пространство X , чтобы для двух точек p, q в нем шары $B_r(p)$ и $B_r(q)$ были изометричны для каждого $r > 0$, но не существовало бы изометрии X на себя, переводящей p в q .

Подсказка: поищите такой пример среди конечных пространств.

Пусть X, p и q — как в последнем упражнении. Положим $X_n = X$ и $p_n = q$ для всех $n \geq 1$. Докажите, что последовательность $\{(X_n, p_n)\}$ пунктированных пространств не сходится к (X, p) несмотря на то, что $B_r(p_n) \xrightarrow{GH} B_r(p)$ для каждого $r > 0$.

Ясно, что если последовательность пунктированных метрических пространств сходится к пунктированному пространству (X, p) , то она сходится и к его пополнению. Поэтому мы будем в качестве пределов по Громову–Хаусдорфу рассматривать только полные пространства. Тогда, как и при обычной сходимости, предел по Громову–Хаусдорфу будет по существу единственен.

Определение 8.1.6. Два пунктированных метрических пространства (X, p) и (X', p') называются *изометричными*, если существует такая изометрия $f : X \rightarrow X'$, что $f(p) = p'$. Такое отображение f называется *изометрией пунктированных пространств* из (X, p) на (X', p') .

Теорема 8.1.7. Пусть (X, p) и (X', p') — два (полных) пространства, являющиеся пределами по Громову–Хаусдорфу одной и той же последовательности $\{(X_n, p_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что X ограничено компактно. Тогда (X, p) и (X', p') изометричны.

Доказательство. Мы дадим здесь только набросок доказательства; его детали аналогичны деталям доказательства теоремы 7.3.30. Зафиксируем $r > 0$ и $\varepsilon > 0$, и рассмотрим отображение, существование которого гарантируется определением 8.1.1. По этому отображению найдем такое соответствие $\mathfrak{A}_{r,\varepsilon}$ между некоторыми множествами $Y_{r,\varepsilon} \subset X$ и $Y'_{r,\varepsilon} \subset X'$, что а) $Y_{r,\varepsilon}$ и $Y'_{r,\varepsilon}$ содержат шары радиуса $r - \varepsilon$ и содержатся в шарах радиуса $r + \varepsilon$; б) центрами этих шаров являются точки p и p' , соответственно; в) точки p и p' соответствуют друг другу и д) $\text{dis } \mathfrak{A}_{r,\varepsilon} < \varepsilon$.

Сопоставив каждой точке множества Y_ε одну из соответствующих ей точек, мы получим отображение $f_{r,\varepsilon} : Y_{r,\varepsilon} \rightarrow Y'_{r,\varepsilon}$, переводящее p в p' и с искажением $< \varepsilon$. Используя канторов диагональный процесс сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$ и затем при $r \rightarrow \infty$, можно получить сохраняющее расстояния отображение из всюду плотного подмножества X в X' . Последнее отображение распространяется до сохраняющего расстояния отображения $f : X \rightarrow X'$ такого, что $f(p) = p'$. Так как f сохраняет

расстояния, оно переводит каждый шар $B_r(p) \subset X$ в соответствующий шар $B_r(p') \subset X'$.

Кроме того, образы при отображениях $f_{r,\varepsilon}$ являются ε -сетями в соответствующих подмножествах пространства X' . Отсюда следует, что шары $B_r(p') \subset X'$ тоже компактны (сравните с упражнением 7.3.31). Поэтому аналогичное сохраняющее расстояния отображение $f' : X' \rightarrow X$ тоже существует. Отсюда, ввиду компактности шаров, следует, что для каждого $r > 0$ сужение f на $B_r(p)$ является изометрией на $B_r(p')$. Следовательно f — изометрия на X' . \square

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые пунктированные пространства ограничено компактны. Это свойство, как показывает следующее упражнение, сохраняется при предельном переходе.

Упражнение 8.1.8. Предположим, что $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$, где пространства X_n ограничено компактны, а X — полное. Докажите, что тогда X тоже ограничено компактно.

Большей части свойств сходимости по Громову–Хаусдорфу компактных пространств соответствуют их “двойники” для сходимости пунктированных пространств. Наиболее важные из них содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 8.1.9. Пусть $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$, где X_n — пространства с внутренней метрикой, а X — полное. Тогда метрика пространства X — тоже внутренняя.

Доказательство. Доказательство — точно такое же, как теоремы 7.5.1. \square

Следующая теорема представляет собой версию теоремы о компактности для сходимости пунктированных пространств.

Теорема 8.1.10. Пусть \mathfrak{X} — некоторый класс пунктированных метрических пространств. Предположим, что для каждого $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(r, \varepsilon)$, что для каждого $(X, p) \in \mathfrak{X}$ шара $B_r(p) \subset X$ найдется ε -сеть из не более, чем $N(r, \varepsilon)$ точек. Тогда класс \mathfrak{X} предкомпактен в том смысле, что любая последовательность пространств из \mathfrak{X} содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.4.15. Как и там, придется применить канторов диагональный процесс дважды, сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем — при $r \rightarrow \infty$. \square

8.2. Касательный и асимптотический конусы

В этом параграфе мы обобщим обсуждавшиеся в параграфе 7.1 понятия касательного и асимптотического конусов, на случай абстрактных метрических пространств.

Напомним, что по метрическому пространству X и числу $\lambda > 0$ можно построить “гомотетичное” ему метрическое пространство λX , которое представляет собой то же самое множество, но с метрикой, полученной из исходной умножением на λ . В случае пунктированного пространства (X, p) изменение масштаба естественно приводит к пунктированному пространству $(\lambda X, p)$.

Определение 8.2.1. Пунктированное метрическое пространство (X, p) называется *конусом* если оно инвариантно относительно изменения масштаба, то есть, если для любого $\lambda > 0$ пространства $(\lambda X, p)$ и (X, p) изометричны как пунктированные пространства.

Заметим, что не всякий конус является определенным в пункте 3.6.2 конусом над метрическим пространством.

8.2.1. Касательный конус. Касательный конус — локальное понятие, и оно не относится к геометрии крупного масштаба. Тем не менее мы рассмотрим его здесь, так как его определение в некотором смысле аналогично определению асимптотического конуса.

Определение 8.2.2. Пусть X — (ограничено компактное) метрическое пространство, $p \in X$. Если существует предел по Громову–Хаусдорфу пунктированных пространств $(\lambda X, p)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то он называется *касательным конусом по Громову–Хаусдорфу* пространства X в точке p .

Как обычно, “предел при $\lambda \rightarrow \infty$ ” понимается как предел по любой, стремящейся к бесконечности, последовательности значений λ (предел должен существовать для каждой такой последовательности и не зависеть от ее выбора).

Отметим, что касательный конус является пунктированным метрическим пространством. Его особая точка (ее естественный “прародитель” — точка p) называется вершиной конуса. Касательный конус является конусом в том смысле, что он изометричен своему образу при любом изменении масштаба (имеется в виду изометрия пунктированных пространств). Касательный конус является локальным инвариантом исходного пространства: он полностью определяется сколь угодно малой окрестностью точки.

Точнее, если U — окрестность точки $p \subset X$, то касательные конусы пространств U и X в точке p изометричны. Это немедленно следует из определения.

Касательный конус является конусом в смысле определения 8.2.1. Это вытекает из следующего простого наблюдения:

Упражнение 8.2.3. Пусть $\{(X_n, p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность пунктированных метрических пространств, и $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (X, p)$. Докажите, что $(\lambda X_n, p_n) \xrightarrow{GH} (\lambda X, p)$ для любого $\lambda > 0$.

Упражнение 8.2.4. Пусть M — n -мерное риманово многообразие. Докажите, что касательный конус в любой точке пространства M существует и изометричен \mathbb{R}^n .

Упражнение 8.2.5. Докажите, что касательный конус выпуклого множества, как он был определен в пункте 7.1.1, является также касательным конусом по Громову–Хаусдорфу.

Замечание 8.2.6. В пункте 3.6.6 мы ввели другую локальную конструкцию, пространство направлений в точке. На самом деле для “хороших” пространств эти две конструкции несут одну и ту же информацию; кроме того касательный конус по Громову–Хаусдорфу оказывается не чем иным, как конусом над пространством направлений.

8.2.2. Асимптотический конус.

Определение 8.2.7. Пусть X — (ограничено компактное) метрическое пространство и $p \in X$. Предел по Громову–Хаусдорфу пунктированных пространств $(\lambda X, p)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если только он существует, называется *асимптотическим конусом по Громову–Хаусдорфу* пространства X , или *конусом пространства X на бесконечности*.

Предложение 8.2.8. *Асимптотический конус не зависит от выбора отправной точки p .*

Доказательство. Пусть (C, o) — асимптотический конус пространства X , построенный по точке $p \in X$, и пусть $p' \in X$ — другая точка. Нам надо доказать, что $(\lambda X, p') \rightarrow (C, o)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Пусть $f: \lambda X \rightarrow C$ — отображение из определения 8.1.1 сходимости пунктированных пространств (для некоторого $\varepsilon > 0$). заменим f на отображение $f': \lambda X \rightarrow C$, определенное следующим образом: $f'(x) = f(x)$ при всех $x \neq p'$, и $f'(p') = o$. Мы сдвинули образ одной точки на расстояние, не превосходящее $\lambda|pp'| + \varepsilon$; следовательно, требования из определения 8.1.1 остаются выполненными и для p' вместо p , но с заменой ε на $2\varepsilon + \lambda|pp'|$ (проверьте это!). Так как ε и λ можно взять сколь угодно малыми при фиксированном $|pp'|$, то немедленно получаем требуемую сходимость. \square

Упражнение 8.2.9. Докажите, что асимптотический конус выпуклого множества, как он был определен в пункте 7.1.2, является и асимптотическим конусом по Громову–Хаусдорфу.

Упражнение 8.2.10. Пусть X и Y — метрические пространства, причем $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Докажите, что если X имеет асимптотический конус, то его имеет и Y , причем эти конусы изометричны.

В частности, если метрическое пространство X лежит на конечном расстоянии по Громову–Хаусдорфу от некоторого конуса Y , то Y является асимптотическим конусом для X .

Упражнение 8.2.11. Докажите, что решетка, описанная в пункте 7.1.3, имеет асимптотический конус, который изометричен \mathbb{R}_1^2 .

Следующее упражнение обобщает последнее. Дальнейшие обобщения читатель найдет в пункте 8.5.1.

Упражнение 8.2.12. Рассмотрим группу \mathbb{Z}^n и симметричное конечное множество S ее образующих. Пусть d — метрика слов, порожденная S , а $\|\cdot\|$ — такая норма в \mathbb{R}^n , что ее единичный шар является выпуклой оболочкой множества S . Докажите, что существует такая постоянная C (зависящая от S), что

$$\|x - y\| \leq d(x, y) \leq \|x - y\| + C$$

для всех $x, y \in \mathbb{Z}^n$.

В частности, расстояние по Громову–Хаусдорфу между (\mathbb{Z}^n, d) и нормированным пространством $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ конечно (не превосходит C), и, следовательно, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ является асимптотическим конусом для (\mathbb{Z}^n, d) .

Следующее упражнение показывает, что существование асимптотического конуса — не столь уж общее явление, как можно было бы подумать.

Упражнение 8.2.13. Докажите, что гиперболическая плоскость \mathbb{H}^2 не имеет асимптотического конуса.

Подсказка: последовательность шаров $\frac{1}{n}B_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{H}^2$, не является равномерно вполне ограниченной.

Попросту говоря, причина, почему гиперболическая плоскость не имеет асимптотического конуса, состоит в том, что метрические шары радиусов, стремящихся к бесконечности, растут слишком быстро. Существуют другие конструкции, позволяющие проследить асимптотические свойства таких “быстро растущих” пространств в случаях, когда асимптотический конус по Громову–Хаусдорфу невозможно использовать. Один из возможных подходов состоит в использовании, вместо сходимости по Громову–Хаусдорфу, слабых пределов. Мы не будем обсуждать в этой книге такие обобщения предела. Упомянем только, что “обобщенным” асимптотическим конусом гиперболической плоскости оказывается бесконечное (и даже не локально конечное) дерево.

Той же цели служит другая конструкция, так называемая идеальная граница пространства; в частном случае гиперболической плоскости она кратко описана в пункте 5.3.3. В то время как асимптотический конус можно представлять себе как “касательный конус на бесконечности”, идеальная граница является своего рода “пространством направлений” на бесконечности.

8.3. Квази-изометрии

8.3.1. Определение и первые примеры. Квази-изометрии — это аналог билипшицевых отображений в ситуации крупных масштабов. Два метрические пространства считаются квази-изометричными, если они билипшицево эквивалентны с точностью до конечных расстояний в метрике Громова–Хаусдорфа. Строго это можно сформулировать следующим образом:

Определение 8.3.1. Метрические пространства X и Y называются *квази-изометричными*, если найдутся такие метрические пространства X' и Y' , что $d_{GH}(X, X') < \infty$, $d_{GH}(Y, Y') < \infty$, а пространства X' и Y' — билипшицево гомеоморфны (то есть между ними существует билипшицев гомеоморфизм).

Мы увидим вскоре, что X' и Y' достаточно искать среди подмножеств пространств X и Y , более того, среди *разделенных сетей*.

Напомним, что подмножество S метрического пространства X называется ρ -сетью, если расстояние по Хаусдорфу между S и X не превосходит ρ .

Определение 8.3.2. Пусть X — метрическое пространство. Множество $S \subset X$ называется *сетью* в X , если расстояние по Хаусдорфу между X и S конечно. Другими словами, если S является ρ -сетью в X для достаточно больших ρ .

Разделенной сетью называется сеть, которая является ε -разделенной для некоторого $\varepsilon > 0$ (напомним, что сеть называется ε -разделенной, если $|xy| \geq \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in S$).

Каждое метрическое пространство X содержит ε -разделенную сеть для любого ε . Действительно, по лемме Цорна существует максимальное по включению ε -разделенное подмножество $S \subset X$. Максимальность означает, что если $S \subsetneq S'$, то множество S' не является ε -разделенным. Такое S будет ε -сетью; действительно, если найдется точка $x \in X$, для которой $\text{dist}(x, S) \geq \varepsilon$, то множество $S' = S \cup \{x\}$ тоже является ε -разделенным, что противоречит максимальнойности S .

Пусть X, Y, X', Y' — пространства из определения 8.3.1. Так как $d_{GH}(X, X') < \infty$ и $d_{GH}(Y, Y') < \infty$, то найдутся отображения $f_1: X \rightarrow$

X' и $f_2: Y' \rightarrow Y$, имеющие конечные искажения и такие, что образы $f_1(X)$ и $f_2(Y')$ являются сетями в X' и Y , соответственно. Пусть $g: X' \rightarrow Y'$ — билипшицев гомеоморфизм, и $\lambda = \max\{\text{dil } g, \text{dil } g^{-1}\}$. Определим отображение f из X в Y равенством $f = f_2 \circ g \circ f_1$. Тогда

$$(8.1) \quad \frac{1}{\lambda}|xy| - C \leq |f(x)f(y)| \leq \lambda|xy| + C$$

для всех $x, y \in X$, где $C = \text{dis}(f_2) + \lambda \text{dis}(f_1)$.

Определение 8.3.3. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *квази-изометрией*, если существуют такие постоянные $C \geq 0$ и $\lambda \geq 1$, что неравенство (8.1) выполняется для всех $x, y \in X$.

Заметим, что построенная выше квази-изометрия $f: X \rightarrow Y$ обладает дополнительным свойством: образ $f(X)$ является сетью в Y . Более того, образ любой сети в X является сетью в Y . Чтобы это доказать, заметим, что каждое из отображений f_1, f_2 и g переводит сеть снова в сеть.

Теперь выберем Δ -разделенную сеть $S \in X$ для достаточно большого Δ , именно, $\Delta > (2\lambda + 1)C$, где λ и C — те же, что в (8.1). Тогда из (8.1) следует, что

$$\frac{1}{2\lambda}|xy| \leq |f(x)f(y)| \leq (\lambda + 1)|xy|$$

для всех $x, y \in S$. Следовательно, f является билипшицевым гомеоморфизмом между S и $f(S)$. Теперь заметим, что вместо X' и Y' in определении 8.3.1 можно использовать S и $f(S)$. Тем самым мы доказали следующее

Предложение 8.3.4. Для любых метрических пространств X и Y следующие три утверждения равносильны:

- (i) X и Y — квази-изометричны;
- (ii) существует такая квази-изометрия $f: X \rightarrow Y$, что образ $f(X)$ является сетью в Y ;
- (iii) X и Y содержат билипшицев гомеоморфные разделенные сети.

□

Следствие 8.3.5. Квази-изометричность является отношением эквивалентности.

Доказательство. Симметричность есть очевидное следствие определения. Транзитивность следует из пункта (ii) предыдущего предложения. □

Пример 8.3.6. Евклидовы пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не квази-изометричны при $m \neq n$. Чтобы доказать это, рассмотрим разделенную сеть S в \mathbb{R}^n и для каждого $R > 0$ обозначим через $N(R)$ число элементов из S , содержащихся в шаре радиуса R с центром в нуле. Так как S является разделенной сетью, скажем, ε -разделенной r -сетью, то шары радиуса $(\varepsilon/2)$ с центрами в точках множества S попарно не пересекаются, а

шары радиуса r покрывают все пространство. Так как объем шара пропорционален n -ой степени его радиуса, это приводит к следующей оценке для $N(R)$:

$$\frac{(R-r)^n}{r^n} \leq N(R) \leq \frac{(R+\varepsilon/2)^n}{(\varepsilon/2)^n},$$

или, попросту

$$cR^n \leq N(R) \leq CR^n$$

для всех достаточно больших R . Здесь c и C — некоторые положительные постоянные. Такое свойство сети очевидно сохраняется при билипшицевых отображениях, однако никакая разделенная сеть в \mathbb{R}^m не обладает таким свойством, если $m \neq n$ (ибо по таким же причинам соответствующая величина для \mathbb{R}^m заключена между cR^m и CR^m).

Аналогично, евклидово пространства не квази-изометрично ни гиперболической плоскости ни гиперболическому пространству, ибо площади (или объемы) гиперболических шаров растут экспоненциально, когда радиусы идут к бесконечности.

Упражнение 8.3.7. Докажите, что гиперболические пространства \mathbb{H}^m и \mathbb{H}^n не квази-изометричны, если $m \neq n$.

Подсказка: предположив, что они квази-изометричны, докажите, что найдется *непрерывная* квази-изометрия из \mathbb{H}^m в \mathbb{H}^n . После этого рассмотрите сужение этой квази-изометрия на сферы большого радиуса в \mathbb{H}^m (в предположении, что $m > n$).

8.3.2. Группы и орбиты. В параграфе 3.3 мы уже обсуждали метрики, инвариантные относительно действия группы; ниже мы рассмотрим это понятие в новом контексте.

Пусть G — группа, X — множество, а $\varphi : G \times X \rightarrow X$ действие группы G на X (см. определение 3.3.5). Как обычно, будем писать $g(x)$ вместо $\varphi(g, x)$. Говорят, что метрика d на X G -инвариантна (относительно этого действия), если G действует изометриями, то есть $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ для всех $x, y \in X$, $g \in G$. Мы будем рассматривать только действия изометриями, или, что то же самое, только G -инвариантные метрики).

Говорят, что действие группы *кокомпактно*, если факторпространство X/G компактно, и говорят, что действие *коограниченно*, если X/G ограничено. Ясно, что если X ограничено компактно (в частности, если X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой), то каждое коограниченное действие группы на X кокомпактно. *Орбитой* точки $x \in X$ под действием группы G называется множество $\{gx : g \in G\}$; орбита обозначается через Gx .

Упражнение 8.3.8. Докажите, что орбита точки является сетью тогда и только тогда, когда действие коограниченно.

Важным примером действия группы является ее действие на самой себе путем умножения. Именно, положим $X = G$ и определим действие формулой $g(h) = gh$ для всех $g, h \in G$. Метрики G , инвариантные относительно такого действия, называются *левоинвариантными* метриками (это название отражает тот факт, что группа действует умножением слева). Если группа G абелева, приставку “лево” можно опустить. Заметим, что метрики слов, которые обсуждались в пункте 3.2.3, являлись левоинвариантными.

Левоинвариантная метрика на G полностью определяется расстояниями от ее элементов до единицы группы. Действительно, если $|g| = d(e, g)$, то $d(g, g_1) = |g^{-1}g_1|$. Обратно, функция $|\cdot|: G \rightarrow \mathbb{R}$ задает метрику тогда и только тогда, когда

- (1) $|e| = 0$, $|g| > 0$ для всех $g \neq 0$;
- (2) $|g^{-1}| = |g|$ для всех g ;
- (3) $|g_1g_2| \leq |g_1| + |g_2|$.

(Тривиальное упражнение.)

Отметим, что эти условия на $|\cdot|$ очень похожи на определение нормы на векторном пространстве, но все же отличны от него. В случае метрики слов соответствующая функция $|\cdot|$ является длиной самого короткого слова, представляющего данный элемент.

Теперь мы укажем более общий источник примеров левоинвариантных метрик на группе. Пусть X — произвольное множество, на котором действует группа G . Предположим, что это действие свободно, то есть $g(x) \neq x$ для всех $x \in X$ и $g \in G$, кроме $g = e$. Тогда равенство

$$(8.2) \quad d_G(g_1, g_2) = d_X(g_1(x), g_2(x))$$

определяет, для каждой G -инвариантной метрики d_X на X и каждой точки $x \in X$, левоинвариантную метрику d_G на G . Это можно истолковать следующим образом: мы отождествляем G с орбитой Gx и берем сужение метрики d на Gx . Определенную так метрику d_G мы будем называть *метрикой орбиты*.

Упражнение 8.3.9. Пусть X , d_X и G — те же, что и выше, x_1 и x_2 — точки в X , а d_1 и d_2 — соответствующие метрики орбит. Докажите, что функция $d_1 - d_2$ ограничена.

Эта конструкция становится более интересной, если мы ограничимся только внутренними метриками на X . Предположим, что действие группы G свободно и *вполне разрывно* или, что равносильно, проектирование $p: X \rightarrow X/G$ является накрытием (накрытия для внутренних метрик обсуждались в пункте 3.4.2). Тогда мы имеем естественное взаимно-однозначное соответствие между внутренними метриками на X/G и G -инвариантными внутренними метриками на X (см. предложение 3.4.16).

Таким образом, для любой внутренней метрики на X/G и точки $y \in X/G$ можно определить левоинвариантную метрику на G , выбрав любую точку $x \in p^{-1}y$ и взяв соответствующую метрику орбиты. Отметим, что результат не зависит от выбора точки x (с точностью до внутренних автоморфизмов). Так как орбита — это в точности множество $p^{-1}(y)$, то группа с такой метрикой изометрична множеству $p^{-1}(y)$ с метрикой, являющейся сужением метрики X на это множество. Если действие группы кокомпактно, то $p^{-1}(y)$ является сетью в X , так что расстояние по Громову–Хаусдорфу между X и группой конечно (и тем самым можно заменить X на эту группу во всех построениях крупномасштабной геометрии).

Упражнение 8.3.10. Докажите только что сформулированное утверждение: орбита кокомпактного действия является разделенной сетью (разумеется, в предположениях, что группа действует изометриями, свободно и вполне разрывно, а X — пространство с внутренней метрикой).

Пример 8.3.11. Метрика слов (см. пункт 3.2.3) всегда может быть представлена как метрика орбиты на пространстве с внутренней метрикой. Чтобы построить таким путем метрику слов на группе G , достаточно взять в качестве X граф Кэли группы (на нем действие группы G определяется очевидным образом) и выбрать единицу группы в качестве начальной точки орбиты.

Метрику орбиты можно построить и другим способом, взяв в качестве отправной точки факторпространство. Пусть Y — пространство с внутренней метрикой; предположим, что Y локально односвязно. Тогда существует универсальное накрытие $p: X \rightarrow Y$. Кроме того, фундаментальная группа пространства Y естественно действует на X изометриями (как группа преобразований скольжения). Таким образом, каждая внутренняя метрика на Y и точка $y \in Y$ определяют левоинвариантную метрику на фундаментальной группе $\pi_1(Y, y)$, а именно, сужение на орбиту $p^{-1}(y)$ метрики пространства X . Ниже мы даем другое описание этой метрики.

Определение 8.3.12. Пусть Y — как выше, $y \in Y$, $g \in \pi_1(Y, y)$. Определим *длину* элемента g равенством

$$\text{длина}(g) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ — петля, представляющая } g \in \pi_1(Y, y)\}.$$

Расстояние между двумя элементами $g_1, g_2 \in \pi_1(Y, y)$ определим как длину элемента $g_1^{-1}g_2$.

Упражнение 8.3.13. Докажите, что приведенное выше определение задает ту же самую метрику на $\pi_1(Y, y)$, что и конструкция, связанная с универсальным накрытием.

Замечание 8.3.14. Такое же построение можно применить к другим накрытиям, отличным от универсального; однако необходимо потребовать, чтобы накрытие было регулярным. (Это необходимо, чтобы представить Y как факторпространство группы преобразований скольжения.) В этом случае группа преобразований скольжения оказывается факторгруппой группы $\pi_1(Y)$.

Мы увидим вскоре, что для кокомпактного действия данной (конечно-порожденной) группы все возможные метрики орбит билипшицево эквивалентны друг другу.

Другими словами, квази-изометрический класс метрики на группе зависит только от группы, но не от пространства с внутренней метрикой и не от действия, используемого, чтобы построить метрику. Из этого вытекает такое замечательное следствие: *если фундаментальные группы двух компактных пространств с внутренней метрикой изоморфны, то их универсальные накрывающие пространства квази-изометричны.* Действительно, каждое универсальное накрывающее пространство лежит на конечном расстоянии (по Громову-Хаусдорфу) от соответствующей фундаментальной группы, снабженной метрикой орбиты, и две такие метрики билипшицево эквивалентны (как мы докажем ниже).

Так как все метрики на фиксированной группе билипшицево эквивалентны, мы имеем право говорить о квази-изометрии между абстрактными конечно порожденными группами, вообще не указывая конкретную метрику. Именно, две группы квази-изометричны, если они становятся квази-изометричными, будучи снабженными какими-нибудь метриками слов.

Пример 8.3.15. Свободные группы F_2 и F_3 с двумя и тремя образующими (снабженные, например, метриками слов) квази-изометричны. (Для сравнения: \mathbb{Z}^m и \mathbb{Z}^n не квази-изометричны, если $m \neq n$, как мы это видели в примере 8.3.6.)

Чтобы это доказать, напомним, что F_2 является фундаментальной группой букета из двух окружностей (например, единичной длины). Этот букет X допускает двулистное накрытие графом Y , состоящим из трех окружностей S_1, S_2, S_3 , соединенных в цепь: S_1 имеет одну общую точку с S_2 , а S_2 имеет одну общую точку с S_3 , причем $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Метрически Y — это окружность длины 2, приклеенная к двум окружностям длины 1; меньшие окружности приклеены к противоположным точкам большей окружности. Описание накрывающего отображения из Y в X мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Так как Y является накрытием для X , универсальное накрывающее пространство для Y совпадает с таковым для X . Это накрывающее пространство квази-изометрично как фундаментальной группе $\pi_1(X) \cong$

F_2 так и $\pi_1(Y) \cong F_3$. (Последняя группа изоморфна F_3 , так как Y гомотопически эквивалентно букету из трех окружностей. Чтобы увидеть это, достаточно стянуть ребра.) Тем самым F_2 и F_3 квази-изометричны.

Упражнение 8.3.16. Постройте явную квази-изометрию из F_2 на сеть в F_3 .

Упражнение 8.3.17. Докажите, что все свободные группы F_n , $n \in \mathbb{N}$, квази-изометричны между собой.

Теперь мы переходим к обещанному доказательству заявленной выше эквивалентности между метриками орбиты. Начнем со случая метрик слов.

Предложение 8.3.18. Пусть G — конечно порожденная группа. Тогда все метрики слов на G билипшицево эквивалентны друг другу.

Доказательство. Пусть $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ — функционалы расстояния до единицы для двух метрик слов, заданных с помощью наборов образующих S_1 и S_2 , соответственно. Напомним, что множества S_1 и S_2 должны быть конечными. Пусть $g_1 \dots g_n$ — кратчайшее слово в системе образующих S_1 , представляющее данный элемент $g \in G$. Тогда $|g|_1 = n$ и

$$|g|_2 = |g_1 \dots g_n|_2 \leq |g_1|_2 + \dots + |g_n|_2 \leq C_1 n = C_1 |g|_1,$$

где $C_1 = \max_{h \in S_1} |h|_2$. (Заметим, что мы еще не использовали условие, что $|\cdot|_2$ — метрика слов.) Аналогично, $|g|_1 \leq C_2 |g|_2$ для некоторой постоянной C_2 , не зависящей от g . Значит $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ билипшицево эквивалентны. \square

Теорема 8.3.19. Пусть G — конечно порожденная группа и d — метрика орбиты свободного кокомпактного действия группы G изометриями на пространстве с внутренней метрикой X . Тогда d билипшицево эквивалентна метрике слов.

В частности, все такие метрики орбит на G билипшицево эквивалентны друг другу.

Следствие 8.3.20. Все пространства X с внутренней метрикой, допускающие свободное вполне разрывное кокомпактное действие данной группы G , квази-изометричны друг другу и квази-изометричны группе G , снабженной любой метрикой слов.

В частности, если Y — пространство с внутренней метрикой и X — его универсальное накрывающее с метрикой, поднятой из Y , то X квази-изометрично группе $\pi_1(Y)$ с любой метрикой слов.

Доказательство. Доказательство теоремы] Обозначим через $|\cdot|$ расстояние в метрике d до единицы. Если $|\cdot|_w$ — метрика слов, то, аналогично доказательству предыдущей теоремы, $|\cdot| \leq C|\cdot|_w$ для некоторой постоянной C . Таким образом, достаточно доказать, что $|\cdot|_w \leq C|\cdot|$ для *некоторой* метрики слов $|\cdot|_w$ и некоторой постоянной C . Пусть $x \in G$ — та точка, орбита которой использовалась при задании метрики d (то есть $d(g, h) = d_X(gx, hx)$ для всех $g, h \in G$). Так как действие кокомпактно, то пространство X — локально компактно и полно, а орбита Gx является разделенной сетью. Следовательно, каждый метрический шар в X содержит не более, чем конечное число точек орбиты. Тем самым каждый шар в (G, d) — конечное множество.

Пусть D — такое число, что орбита Gx является D -сетью в X . Выберем столь большое число r , что $r > 2D + 1$ и шар радиуса r в (G, d) с центром в единице содержит все образующие. Мы можем считать, что сам этот шар взят в качестве множества S образующих, определяющих метрику слов $|\cdot|_w$. (Поскольку уже было доказано, что все метрики слов эквивалентны, мы имеем право сами выбрать метрику слов, которую будем сравнивать с d ; тем самым мы докажем, что d билипшицево эквивалентна каждой метрике слов.)

Зафиксируем $g \in G$ и пусть γ — кратчайшая в X , соединяющая x с gx . Мы собираемся показать, что $|g|_w \leq C|g| = C \cdot L(\gamma)$, где постоянная C не зависит от g . Разобьем γ на участки не длиннее 1 точками x_1, \dots, x_n , где $n \leq L(\gamma) \leq n + 1$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ найдем такую точку $y_i \in Gx$, что $d_X(x_i, y_i) \leq D$. Кроме того, положим $y_0 = x$ и $y_{n+1} = Gx$. Пусть элемент $g_i \in G$ таков, что $g_i x = y_i$ (заметим, что $g_0 = e$ и $g_{n+1} = g$). Положим $h_i = g_i g_{i-1}^{-1}$. Тогда $h_i x_{i-1} = y_i$; откуда $|h_i| = d_X(x_{i-1}, x_i) \leq 2D + 1$. Следовательно h_i принадлежит нашему множеству образующих (напомним, что это множество — шар радиуса r в G , причем $r > 2D + 1$). С другой стороны, произведение (слово) $h_1 \dots h_{n+1}$ равно g ; следовательно $|g|_w \leq n + 1$.

Таким образом $|g|_w \leq L(\gamma) + 1 = |g| + 1$. Так как расстояния $|g|$ равномерно отделены от нуля (то есть найдется такое $\varepsilon > 0$, что $|g| \geq \varepsilon$ для всех $g \in G$), то эту оценку можно переписать в форме $|g|_w \leq C|g|$, а именно, $|g|_w \leq (1 + 1/\varepsilon)|g|$. \square

Замечание 8.3.21. Условие, что действие группы — свободное, можно опустить. Однако при этом метрика орбиты перестает быть метрикой; она будет только полуметрикой. Вследствие этого, она не будет больше билипшицево эквивалентной метрике слов, однако она остается ей квази-изометричной. Доказательство — почти такое же самое, с очевидными изменениями.

Предположение, что данная метрика является метрикой орбиты некоторого действия, кажется труднопроверяемым и несколько ограничительным (и, кроме того, это не условие “крупного масштаба”). Можно указать ряд условий, его заменяющих; одно из таких условий содержится в следующем упражнении.

Упражнение 8.3.22. Докажите следующее, немного менее общее, чем теорема 8.3.19, утверждение. Пусть d — левоинвариантная метрика на такой конечно-порожденной группе G , что каждый шар в метрике d является конечным множеством. Предположим еще, что существует постоянная $C > 0$, удовлетворяющая условиям: для любых $x, y \in G$ найдется такой элемент $z \in G$, что $d(x, z) < \frac{1}{2}d(x, y) + C$ и $d(y, z) < \frac{1}{2}d(x, y) + C$. Тогда метрика d билипшицево эквивалентна метрике слов.

8.4. Гиперболические по Громову пространства

В этом параграфе мы будем иметь дело с геометрией, рассматриваемой, так сказать, “с высоты птичьего полета”; это означает, что мы будем изучать метрические пространства, пользуясь грубым измерением расстояний (крупномасштабная геометрия) и игнорируя все, что связано с расстояниями, меньшими некоторого определенного значения. При таком подходе пространство может быть заменено его дискретным подмножеством, образующим ϵ -сеть и имеющим дискретную топологию; следовательно, все локальные топологические свойства несущественны для наших рассуждений. Модельным примером такой ситуации служит универсальное накрывающее компактного пространства X ; это универсальное накрывающее может быть заменено на фундаментальную группу X с индуцированной на ней метрикой. В основном мы будем иметь дело с δ -гиперболичностью — аналогом пространств строго отрицательной кривизны в геометрии крупного масштаба, введенный Громовым. Грубо говоря, δ -гиперболичность отражает относящиеся к геометрии крупного масштаба свойства гиперболической плоскости (или, более общо, такие свойства пространств кривизны, ограниченной сверху отрицательным числом; такие пространства мы будем обсуждать в главе 9).

8.4.1. δ -гиперболичность. Напомним, что треугольник $\Delta a_1 a_2 a_3$ в гиперболической плоскости обладает следующим свойством: найдется такая точка c (“центр”), что все расстояния от этой точки до сторон треугольника меньше, чем 1 (см. пункт 5.3.5). Таким образом, с точки зрения геометрии крупного масштаба любой треугольник является “тощим”: он выглядит так, как будто все его стороны проходят через точку c , а весь треугольник напоминает букет из трех отрезков $[ca_1]$, $[ca_2]$, $[ca_3]$. Другими словами, каждая сторона треугольника принадлежит 1-окрестности

объединения двух других сторон. Именно это свойство можно положить в основу определения гиперболичности в крупномасштабной геометрии.

Определение 8.4.1. Говорят, что пространство (X, d) со строго внутренней метрикой d является δ -гиперболическим, $\delta \geq 0$, если все треугольники в (X, d) обладают следующим свойством: каждая сторона треугольника принадлежит δ -окрестности объединения двух других сторон.

В этом параграфе мы всегда предполагаем, не оговаривая этого специально, что *все конструкции относятся к δ -гиперболическому пространству (X, d)* . Ясно, что δ -гиперболическое пространство с внутренней метрикой является также δ' -гиперболическим для всех $\delta' \geq \delta$. Следуя нашей идеологии крупного масштаба, мы не будем фиксировать конкретное значение δ . Именно, пространство называется *гиперболическим по Громову*, если оно δ -гиперболическое при некотором значении $\delta > 0$.

Отметим, что из нашего определения следует в частности, что кратчайшие, соединяющие две точки в δ -гиперболическом пространстве, проходят на расстоянии друг от друга, не превосходящем δ (это сразу следует из того, что двуугольник, образованный такими кратчайшими, можно рассматривать как вырожденный треугольник, у которого совпали две вершины). Более того, справедливо следующее предложение (его доказательство мы оставляем читателям в качестве упражнения).

Лемма 8.4.2. *Кратчайшая $[ab]$ принадлежит $(\delta + d(b, c))$ -окрестности кратчайшей $[ac]$.*

Набору из трех точек p, q, r сопоставим следующую величину:

$$(p, q)_r = \frac{1}{2}(d(r, p) + d(r, q) - d(p, q)).$$

Таким образом, $(p, q)_r$ измеряет “в какой мере неравенство треугольника в случае треугольника Δprq отличается от равенства”. Будем называть треугольник Δprq δ -вырожденным, если для него неравенство треугольника близко к равенству в том смысле, что $(p, q)_r \leq \delta$.

Рассмотрим точку p на стороне $[bc]$ треугольника Δabc в гиперболическом по Громову пространстве. Из определения немедленно следует, что по крайней мере один из треугольников Δapb и Δapc является δ -вырожденным; другими словами, верно следующее неравенство:

$$(8.3) \quad 0 \geq \min((a, b)_p, (a, c)_p) - \delta.$$

Теперь заметим, что в δ -гиперболическом пространстве дефицит $(b, c)_a$ примерно равен расстоянию от a до $[bc]$. Действительно, очевидно, что по неравенству треугольника $(b, c)_a \leq d(a, [bc])$. Если двигать непрерывно точку p вдоль $[bc]$ от b к c , то найдется такое положение точки p , что оба треугольника Δpac и Δpbc будут δ -вырожденными.

Следовательно

$$\begin{aligned} 2\delta &\geq d(b, p) + d(p, a) - d(a, b), \\ 2\delta &\geq d(c, p) + d(p, a) - d(a, c). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства между собой и (используя равенства

$$\begin{aligned} d(b, p) + d(p, c) = d(b, c) = d(a, c) + d(a, b) - 2(b, c)_a, \\ d(a, [bc]) \leq d(a, p)), \end{aligned}$$

мы получаем $d(a, [bc]) \leq (b, c)_a + 2\delta$ и, следовательно,

$$(8.4) \quad (b, c)_a \leq d(a, [bc]) \leq (b, c)_a + 2\delta.$$

Теперь, рассуждая как при доказательстве неравенства (8.4), можно доказать следующую полезную лемму.

Лемма 8.4.3. Пусть $[ab]$ и $[ac]$ — две кратчайшие. Пусть $b' \in [ab]$ и $c' \in [ac]$ удовлетворяют условиям $d(a, b') = d(a, c') \leq (b, c)_a$. Тогда $d(b', c') \leq 3\delta$. Кроме того, найдется такая точка $p \in [bc]$, что $[bp]$ лежит в δ -окрестности кратчайшей $[ba]$, а $[cp]$ лежит в δ -окрестности $[ca]$.

Упражнение 8.4.4. Докажите эту лемму.

Хотя доказательство этой леммы несложно, ее геометрический смысл поистине замечателен. Действительно, рассмотрим две кратчайшие $[ab]$ и $[ac]$ длины R и с общим началом. Будем думать о точке a как о начальной точке (центре), а число R считаем очень большим (по сравнению с δ). Предположим для простоты, что расстояние между b и c тоже равно R . Такие кратчайшие в евклидовой плоскости образовывали бы между собой угол в 60 градусов. Но в δ -гиперболическом пространстве они по крайней мере полпути идут очень близко друг от друга (на расстоянии не превышающем 3δ)!

Кроме того, кратчайшая $[bc]$ представляет собой очень причудливый путь: сначала она идет рядом (на расстоянии, не превышающем δ) с радиальной кратчайшей $[ba]$; затем $[ba]$ и $[ca]$ оказываются (в некоторой точке) очень близко друг к другу, после чего кратчайшая $[bc]$ “поворачивает назад” и идет вдоль $[ac]$ (на расстоянии порядка δ). Мы советуем читателю хорошо разобраться в этой ситуации, так как такое поведение кратчайших будет много раз использоваться в дальнейшем (в частности, при доказательстве леммы Морса).

Используя неравенства (8.4), которые были выведены только на основе неравенства (8.3), легко показать, что гиперболичность по Громову следует только из неравенства (8.3).

Упражнение 8.4.5. Пусть метрика d пространства X — строго внутренняя. Покажите, что если неравенство (8.3) выполняется для всех треугольников $\Delta a_1 a_2 a_3$ при любом выборе точки $p \in [a_2 a_3]$, то пространство (X, d) — гиперболическое по Громову.

Рассмотрим треугольник $\triangle abc$ и точку p (в δ -гиперболическом пространстве). Так как $[bc]$ содержится в δ -окрестности объединения сторон $[ab]$ и $[ac]$, то $d(p, [bc]) \geq \min(d(p, [ab]), d(p, [ac])) - \delta$. Комбинируя это с неравенством (8.4), мы получаем неравенство

$$(8.5) \quad (b, c)_p \geq \min((a, b)_p, (a, c)_p) - 3\delta.$$

Заметим, что левую часть неравенства (8.3) (то есть 0) можно представить в виде $(b, c)_p$ (так как предполагается, что в (8.3) точка p принадлежит $[bc]$), и, следовательно, из неравенства (8.5) в свою очередь следует неравенство (8.3) с постоянной $\delta' = 3\delta$ вместо δ .

Теперь мы подошли к данному Громовым изначально определению гиперболического по Громову пространства.

Определение 8.4.6. Метрическое пространство (X, d) называется гиперболическим по Громову, если существует такое число $\delta \geq 0$, что для каждой четверки точек $a, b, c, p \in X$, справедливо следующее неравенство:

$$(b, c)_p \geq \min((a, b)_p, (a, c)_p) - \delta.$$

Это изящное определение имеет важное достоинство: в нем не участвуют кратчайшие (стороны треугольников). Оно сформулировано только в терминах расстояний и определяет гиперболические по Громову метрические пространства (которые могут даже не быть пространствами с внутренней метрикой). Однако оно менее наглядно, и именно по этой причине мы начали с альтернативного (хотя и менее общего) определения. В некоторых случаях определение 8.4.6 также труднее для проверки (так как (8.3) является частным случаем неравенства (8.5)). Читатель может убедиться в этом, решая следующие упражнения. В этих упражнениях устанавливается, что пространства строго отрицательной кривизны являются гиперболическими по Громову в то время как евклидово пространство (за исключением прямой) таковым не является.

Упражнение 8.4.7. Найдите такое $\delta = \delta(k)$, что гиперболическая плоскость кривизны k является δ -гиперболическим пространством.

Упражнение 8.4.8. Покажите, что полное односвязное пространство с внутренней метрикой кривизны не более k в целом, где $k > 0$, является δ -гиперболическим пространством для всех $\delta \geq 2/\sqrt{k}$. Можно ли дать лучшую оценку для δ ?

Упражнение 8.4.9. Докажите, что евклидова плоскость не является гиперболической по Громову.

Чтобы лучше понять геометрический смысл определения 8.4.6, посмотрим, что оно означает для 4-точечного пространства.

Лемма 8.4.10. Пусть X — 4-точечное 0-гиперболическое пространство. Тогда X изометрично множеству листьев дерева (имеющего не более 6 вершин). Это дерево — конечный граф, изометричный множеству в евклидовой плоскости, имеющему вид буквы H и составленному из 5 отрезков с их внутренними метриками.

Лемма 8.4.11. Пусть X — четырехточечное δ -гиперболическое пространство. Тогда X можно так отобразить на множество листьев дерева (имеющего не более 6 вершин), что каждое из (шесть) расстояний между точками пространства изменится не более, чем на 2δ .

Доказательство мы оставляем читателям в качестве упражнения. Следующее рассуждение может помочь представить утверждение леммы 8.4.11 более наглядно. Пусть a, b, c, d — четыре точки (в δ -гиперболическом пространстве с внутренней метрикой). Выберем точку e в пересечении δ -окрестностей кратчайших $[ab]$, $[ac]$ и $[bc]$; аналогично выберем f в пересечении δ -окрестностей кратчайших $[ad]$, $[ac]$ и $[dc]$. Пусть $d(a, e) \leq d(a, f)$. Тогда все кратчайшие, соединяющие a, b, c, d , лежат в 2δ -окрестности дерева, образованного кратчайшими $[ae]$, $[ef]$, $[fc]$, $[be]$, $[df]$.

Упражнение 8.4.12. Покажите, что 0-гиперболическое пространство с внутренней метрикой является топологическим деревом (то есть каждые две точки являются концами в точности одного подмножества, гомеоморфного отрезку).

Более того, гиперболическое по Громову пространство при “крупномасштабном рассмотрении” выглядит похожим на дерево. Следующее простое наблюдение объясняет, почему это так: если пространство (X, d) — δ -гиперболическое, то пространство $(X, c \cdot d)$, $c > 0$, — (δ/c) -гиперболическое (проверьте это!). Следующее определение позволит нам сформулировать это формально.

Определение 8.4.13. Пусть $K = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ — конечное метрическое пространство. Говорят, что K является *конечным подконусом* пространства X на бесконечности, если существуют последовательность $N_i \rightarrow \infty$ и последовательность n -точечных наборов $q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i \in X$, удовлетворяющих условию

$$N_i \frac{d(p_l^i, p_m^i)}{d(q_l^i, q_m^i)} \rightarrow 1 \quad \text{для всех } l, m \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Метрическое пространство Y называется *подконусом* пространства X на бесконечности, если каждое конечное подмножество из Y является конечным подконусом для X на бесконечности.

Лемма 8.4.14. Конечный подконус на бесконечности K пространства X изометричен подмножеству конечного дерева с внутренней

метрикой. Если Y — подконус пространства X на бесконечности, то Y — топологическое дерево.

Лемма вытекает из следующего важного предложения, которое мы оставляем читателям в качестве упражнения. Это предложение дает характеристику гиперболических по Громову пространств, представляющую собой обобщение леммы 8.4.11 с 4-х точечных на все конечные подмножества гиперболического по Громову пространства.

Лемма 8.4.15. Пусть X — гиперболическое по Громову пространство, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое число $C \geq 0$, что каждое n -точечное подмножество X можно отобразить на множество листьев конечного дерева так, что все расстояния изменятся не более, чем на C .

8.4.2. Билипшицева эквивалентность, квазигеодезические и лемма Морса. Из определения 8.4.6 немедленно следует, что если метрическое пространство отстоит на конечное расстояние (в метрике Громова–Хаусдорфа) от гиперболического по Громову пространства, то это пространство — тоже гиперболическое по Громову (возможно, при другом значении δ). Действительно, ограниченные аддитивные добавки к расстояниям могут быть компенсированы за счет подходящего увеличения δ в неравенстве (8.5) (мы советуем читателям детально проверить это). Заметим, что совсем не очевидно, если пользоваться непосредственно определением 8.4.1, что свойство пространства быть гиперболическим по Громову сохраняется, если расстояния изменятся на равномерно ограниченную аддитивную функцию.

Удивительно, что в случае пространств с внутренней метрикой (и даже для более общего класса *квази-геодезических пространств*) гиперболичность по Громову сохраняется и при билипшицевой эквивалентности. Напомним, что два метрических пространства (X, d) и (X_1, d_1) называются билипшицево эквивалентными, если существуют такие биективное отображение $f : X \rightarrow X_1$ и положительная постоянная C , что

$$C^{-1}d(x, y) \leq d_1(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$$

для всех $x, y \in X$.

Теорема 8.4.16. Пусть пространство с внутренней метрикой (X_1, d_1) билипшицево эквивалентно гиперболическому пространству (X_1, d_1) с внутренней метрикой. Тогда (X_1, d_1) — также гиперболическое по Громову.

Следствие 8.4.17. Гиперболичность по Громову сохраняется при квази-изометриях.

Грубо говоря, эта теорема утверждает, что если мы умножим внутреннюю метрику гиперболического по Громову пространства на ограниченную

функцию, и при этом получим снова пространство с внутренней метрикой, то оно также будет гиперболическим по Громову. Это дает обильный источник примеров гиперболических по Громову пространств: например, мы можем начать с гиперболической плоскости и умножить ее метрику на функцию, заключенную между двумя положительными постоянными (отметим, что эта новая метрика может иметь зоны положительной кривизны!) Мы советуем читателю еще раз взглянуть на определение 8.4.6, чтобы понять, что это — в высшей степени нетривиальный феномен: само определение требует, чтобы определенные неравенства для расстояний выполнялись с точностью до аддитивной постоянной δ ; в то же самое время мы допускаем *умножение* расстояний на ограниченный множитель, несмотря на то, что эти расстояния могут быть сколь угодно большими.

Последующие доказательства мы будем проводить только для строго внутренних метрик. Эти доказательства легко адаптировать к ситуации, когда кратчайшие не обязательно существуют; достаточно использовать “почти кратчайшие” вместо кратчайших.

Доказательство теоремы 8.4.16 основывается на очень важном феномене: кратчайшие в гиперболическом по Громову пространстве *устойчивы* (с точностью до равномерно ограниченного смещения) под действием билипшицева изменения метрики. Оказывается, что такое свойство даже равносильно гиперболичности по Громову. Доказательствам мы предположим следующее определение.

Определение 8.4.18. Путь γ (в пространстве (X, d) с внутренней метрикой) называется C -квазигеодезической, если $L(\gamma)_{[s,t]} \leq C \cdot d(\gamma(s), \gamma(t))$ для всех s, t из области задания γ . Другими словами, длина каждого участка кривой γ не более, чем в C раз больше, чем расстояние между его концами.

Ясно, что 1-квазигеодезические — это в точности кратчайшие.

Определение 8.4.19. Пространство X с внутренней метрикой называется квазигеодезически стабильным, если для каждого числа C найдется такое число M , что каждая C -квазигеодезическая γ принадлежит M -окрестности любой кратчайшей, соединяющей концы γ .

Теперь теорема 8.4.16 немедленно следует из важной теоремы, известной как лемма Морса.

Теорема 8.4.20 (Лемма Морса). *Гиперболическое по Громову пространство является квазигеодезически стабильным.*

Точнее, пусть (X, d) — δ -гиперболическое пространство с внутренней метрикой, а $C \in \mathbb{R}$ — положительная постоянная. Тогда существует

такая постоянная $M = M(\delta, C) > 0$, что образ каждой C -квазигеодезической $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ содержится в M -окрестности любой кратчайшей, соединяющей концы γ .

В евклидовой плоскости полуокружность является $(\pi/2)$ -квазигеодезической; полуокружность радиуса R отходит на расстояние R от отрезка с теми же концами. В противовес этому, в гиперболическом по Громову мире лемма Морса утверждает, что если мы хотим путешествовать таким способом, чтобы наш окольный путь не был слишком длинным (не более чем в C раз длиннее, чем расстояние между концами), то мы не должны удаляться на большее, чем M , расстояние от кратчайшего пути! Другим поразительным следствием леммы Морса является такой факт: невозможно изменить глобальное поведение геодезических в гиперболической плоскости за счет ограниченного растяжения (сжатия) метрики: если метрика умножается на функцию, равномерно отделенную от нуля и от бесконечности, то кратчайшие новой метрики будут лежать на ограниченном расстоянии от прямых гиперболической плоскости.

На самом деле свойство, справедливость которого утверждается в теореме 8.4.20, равносильно гиперболичности (см. [ВМ]), так что можно дать такое определение гиперболичности по Громову:

Определение 8.4.21. Пространство (X, d) с внутренней метрикой называется *гиперболическим по Громову*, если оно квазигеодезически стабильно.

Доказательство леммы Морса. Доказательство состоит из нескольких шагов, и мы советуем читателю постараться проделать каждый шаг самостоятельно, как упражнение, и только затем читать детали доказательства. Хотя доказательство содержит неприятные оценки, они необходимы только для того, чтобы показать, что определенные расстояния не играют роли для наших рассуждений в рамках геометрии крупного масштаба. Очень полезно понять, какие именно расстояния — “величины порядка δ ”, а какие можно считать сравнимыми с крупномасштабными объектами, которые мы анализируем.

Сначала мы хотим рассмотреть следующую ситуацию: пусть имеются две точки на границе шара радиуса R с центром в точке a , и пусть путь γ , соединяющий точки b и c , не заходит в шар. как обычно, мы считаем R очень большим числом (по сравнению с δ). Мы собираемся показать, что если расстояние $d(b, c)$ не слишком маленькое, то длина γ гораздо больше, чем расстояние $d(b, c)$ (и следовательно γ не может быть C -квазигеодезической для малого числа C). Причина, почему это верно, состоит в том, что большие сферы остаются “весьма выпуклыми” (как в гиперболической плоскости, и в противовес евклидовой плоскости, где большие сферы становятся все более и более плоскими). Точнее:

Лемма 8.4.22. Пусть γ — та же кривая, что и выше, а L — длина кривой γ . Предположим, что $L \geq R \geq k^2\delta$ для некоторого натурального k . Тогда $d(b, c) \leq 10k^{-1}L$, и, в частности, γ не может быть $10k^{-1}$ -квазигеодезической.

Доказательство. Выберем точки $b_0 = b = \gamma(t_0), b_1 = \gamma(t_1), \dots, b_n = c = \gamma(t_n)$ на γ так, чтобы длина каждой дуги $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ была между $\frac{R}{k}$ и $\frac{R}{2k}$. Очевидно, что число n разбивающих точек ограничено сверху:

$$(8.6) \quad n \leq \frac{2kL}{R}.$$

Пусть точки $b'_i \in [b_i a]$ выбраны так, что $d(b'_i, a) = R(1 - \frac{2}{k})$. По неравенству треугольника $d(b'_i, a) \leq (b_i, b_{i+1})_a$. Согласно предложению 8.4.3, расстояния $d(b'_i, b'_{i+1}) \leq 3\delta$. Теперь рассмотрим следующую ломаную, соединяющую точки b и c :

$$b = b_0, b'_0, b'_1, b'_2, \dots, b'_n, b_n = c.$$

Длины кратчайших $[bb'_0]$ и $[b'_n b]$ равны $\frac{2R}{k}$, а длина каждой из кратчайших $[b'_i b'_{i+1}]$ не более 3δ . Таким образом, полная длина нашей ломаной, а тем самым и расстояние между b и c , не превосходит $\frac{4R}{k} + 3n\delta$. Вместе с оценкой (8.6) это дает

$$d(b, c) \leq \frac{4R}{k} + \frac{6kL}{R}\delta.$$

Так как $L \geq R$ и $R \geq k^2\delta$ (и, следовательно, $\frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{k}$), мы можем переписать последнюю оценку в форме

$$d(b, c) \leq \frac{4L}{k} + 6L\frac{1}{k} = \frac{10}{k}L.$$

□

Следующая лемма мотивирована таким наблюдением. Пусть γ_1 и γ_2 — два луча в гиперболической плоскости, ортогональные к отрезку $[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]$. Предположим, что длина этого отрезка равна, например, 10: $d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = 10$. Тогда расстояние $d(\gamma_1(T_1), \gamma_2(T_2))$ не меньше, чем $T_1 + T_2$.

Упражнение 8.4.23. Докажите это утверждение.

Лемма 8.4.24. Пусть X — гиперболическое по Громову пространство; точки $b, c, b_1, c_1 \in X$ выбраны так, что $d(b, b_1) = R_1$, $d(c, c_1) = R_2$, $d(b_1, c_1) \geq 6\delta$, причем b_1, c_1 — точки отрезков $[b_1, c_1]$, ближайшие к b, c . Тогда $d(b, c) \geq R_1 + R_2 - 6\delta$.

Доказательство. Начнем с такого наблюдения: пересечение $[b_1c_1]$ и 3δ -окрестности кратчайшей $[b_1b]$ содержится в шаре радиуса 3δ с центром в b_1 (это немедленно следует из предположения, что b_1 — ближайшая к b точка отрезка $[b_1c_1]$). Аналогично, пересечение $[c_1b_1]$ и 2δ -окрестности отрезка $[c_1c]$ содержится в шаре радиуса 2δ с центром c_1 .

По определению δ -гиперболичности, $[b_1c]$ содержится в δ -окрестности $[bb_1] \cup [bc]$. Следовательно, δ -окрестность отрезка $[b_1c]$ содержится в 2δ -окрестности объединения $[bb_1] \cup [bc]$. Таким образом, $[b_1c_1]$ содержится в δ -окрестности объединения $[b_1c] \cup [c_1c]$. Следовательно $[b_1c_1]$ содержится в 3δ -окрестности $[b_1b] \cup [bc] \cup [cc_1]$. Так как пересечение $[b_1c_1]$ с $[b_1b] \cup [cc_1]$ содержится в объединении двух шаров радиусов 3δ , а $d(b_1c_1) \geq 6\delta$, то отрезок $[b_1c_1]$ пересекается с 3δ -окрестностью отрезка $[bc]$. Пусть точка $p \in [bc]$ такова, что $d(p, q) \leq 3\delta$ для некоторой точки $q \in [b_1c_1]$. Тогда

$$d(b, c) = d(b, p) + d(p, c) \geq d(b, q) - 3\delta + d(c, q) - 3\delta \geq d(b, b_1) + d(c, c_1) - 6\delta.$$

Последнее неравенство следовало из того, что $d(b, b_1) \leq d(b, q)$ и $d(c, c_1) \leq d(c, q)$, ибо b_1 и c_1 — ближайшие к b и c точки отрезка $[b_1c_1]$. \square

Теперь мы готовы к доказательству леммы Морса (теоремы 8.4.20). Рассмотрим C -квазигеодезическую γ , параметризованную длиной дуги и соединяющую точки $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(T)$. Положим $2R = \max_{t \in [0, T]} d(\gamma(t), [pq])$ и выберем τ так, чтобы $d(\gamma(\tau), [pq]) = 2R$.

Имея в виду доказательство от противного, предположим, что $R > k^2\delta$, где $k > 20C + 8$ — натуральное число (так что, в частности, $R > 400\delta$).

Пусть $[t', t'']$ — наибольший интервал, содержащий τ и такой, что $d(\gamma|_{[t', t'']}, [pq]) \geq R$ (в частности, $d(\gamma(t'), [pq]) = d(\gamma(t''), [pq]) = R$). Очевидно, что $|t'' - t'|$, то есть $L(\gamma, t', t'')$, не меньше, чем $2R$. Выберем $t_0 = t' > t_1 > t_2 \cdots > t_n = t''$ так, чтобы $R/2 \leq t_i - t_{i-1} \leq R$. Тогда $|t'' - t'| \geq nR/2$. Введем обозначения $b = b^0 = \gamma(t') = \gamma(t_0)$, $b^i = \gamma(t_i)$, и пусть b_1^i — ближайшая к b^i точка интервала $[pq]$.

По лемме 8.4.24 мы имеем $d(b_1^i, b_1^{i+1}) \leq 6\delta$ (напомним, что $R \gg \delta$). Таким образом, $d(\gamma(t'), \gamma(t'')) \leq 4R + 6n\delta$, и следовательно

$$C \geq \frac{|t'' - t'|}{d(\gamma(t'), \gamma(t''))} \geq \frac{nR}{8R + 12n\delta}.$$

Так как $R > 400C\delta$, то из последнего неравенства следует, что $n < 9C$.

Теперь положим $a = b_1^0$; тогда $d(a, \gamma(t')) = R$. Очевидно, что дуга $\gamma|_{[t', t'']}$ лежит вне шара радиуса R с центром в a . Пусть c — точка дуги $[a\gamma(t'')]$, расположенная на расстоянии R от a . Так как $d(b_1^n, \gamma(t'')) = R$ и $d(b_1^0, b_1^n) \leq 4n\delta \leq 36C\delta$, то по неравенству треугольника

$$(8.7) \quad d(c, \gamma(t'')) \leq 36C\delta < d(\gamma(t'), \gamma(t''))$$

и

$$(8.8) \quad d(b, c) \geq d(\gamma(t'), \gamma(t'')) - 36C\delta > \frac{1}{2} d(\gamma(t'), \gamma(t'')).$$

(Отметим, что эти неравенства — очень грубые; однако они достаточны для нашей цели: показать, что дуга $[c\gamma(t'')]$ достаточно коротка, чтобы не играть никакой роли при сравнении с крупномасштабной шкалой наших рассуждений.) Путь, состоящий из дуги $\gamma|_{[t', t'']}$, продолженной отрезком $[\gamma(t'')c]$, также лежит вне шара радиуса R с центром в a . Применяя к этому пути лемму 8.4.22, мы можем оценить длину дуги $\gamma|_{[t', t'']}$ следующим образом:

$$|t'' - t'| \geq \frac{k}{10} d(b, c) - d(\gamma(t''), c).$$

Комбинируя эту оценку с неравенствами (8.7) и (8.8), мы получаем

$$|t'' - t'| \geq \left(\frac{k}{20} - 1\right) d(\gamma(t'), \gamma(t'')).$$

Так как $k/20 - 1 > C$, последнее неравенство противоречит предположению, что γ является C -квазигеодезической. \square

8.4.3. Гиперболические группы. *Гиперболическая группа* — это конечно-порожденная группа, являющаяся гиперболическим по Громову метрическим пространством по отношению к некоторой метрике слов. Мы увидим скоро, что такая группа оказывается гиперболическим по Громову пространством по отношению к *любой* метрике слов, и, следовательно, гиперболичность является алгебраическим свойством группы. Очень полезно думать о гиперболической группе как об понятии, обобщающем основные свойства фундаментальной группы компактного многообразия отрицательной кривизны. Мы не ставим своей целью дать систематическое введение в теорию гиперболических групп; а намереваемся только обсудить некоторые из их важных свойств. В частности, мы дадим три различных определения гиперболической группы и “примерим” их к фундаментальным группам многообразий отрицательной кривизны.

Пусть Γ — конечно порожденная группа; это означает, что найдется такое конечное симметричное подмножество $S \subset \Gamma$, что каждый элемент группы Γ может быть представлен как конечное произведение элементов из S (симметрия означает, что из $s \in S$ следует $s^{-1} \in S$). Напомним, что в метрике слов расстояние между элементами $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ определяется как наименьшее число k такое, что $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ можно представить в виде $\gamma_1\gamma_2^{-1} = s_1s_2 \dots s_k$, $s_i \in S$. Разумеется, это еще не внутренняя метрика, поскольку она принимает только целые значения, в частности, индуцирует на Γ дискретную топологию. Однако группа Γ , снабженная метрикой слов, может быть изометрически вложена в граф Кэли $C(\Gamma)$

группы Γ . Напомним, что этот граф содержит группу Γ в качестве множества его вершин, и две вершины γ_1 и γ_2 соединены ребром (длины 1) тогда и только тогда, когда $\gamma_1 s = \gamma_2$ для некоторого элемента $s \in S$. Теперь расстояние в метрике слов между двумя элементами группы Γ равно расстоянию между ними в естественной внутренней метрике графа Кэли.

Конечно, расстояние в метрике Громова–Хаусдорфа между Γ и $C(\Gamma)$ конечно, и тем самым они имеют одинаковые свойства с точки зрения геометрии крупного масштаба. Обычно, нам будет удобнее иметь дело с $C(\Gamma)$, так как это — пространство с внутренней метрикой.

Определение 8.4.25. Говорят, что группа Γ — *гиперболическая* (по отношению к некоторому конечному множеству S образующих), если ее граф Кэли $C(\Gamma)$ (или, равносильно, сама группа Γ) является гиперболическим по Громову пространством.

Напомним еще, что любые две метрики слов билипшицево эквивалентны (предложение 8.3.18), то есть, если d_S, d_T — две метрики, порожденные множествами S и T образующих, то существует такое положительное число C , что

$$\frac{1}{C}d_S(x, y) \leq d_T(x, y) \leq Cd_S(x, y).$$

Действительно, каждый элемент из S можно представить как произведение элементов из T , и наоборот, так что мы можем взять в качестве C длину самого длинного из таких (минимальных) представлений. Следовательно, по теореме 8.4.16, группа Γ , являющаяся гиперболической по отношению к некоторой метрике слов, будет гиперболической по отношению к каждой метрике слов, и мы можем говорить о гиперболической группе без упоминания о выборе метрики. Другими словами, быть гиперболической группой — алгебраическое свойство группы, и оно не зависит от того, какую метрику мы выбираем.

Первым, притом банальным, примером гиперболической группы служит группа \mathbb{Z} . Разумеется, если группа Γ — гиперболическая, то таковой же будет и группа $\Gamma \times G$ для любой конечной группы G (просто потому, что расстояние по Громову–Хаусдорфу между Γ и $\Gamma \times G$ конечно — проверьте это!) Следовательно, $\mathbb{Z} \times G$ — также гиперболическая для любой конечной группы G . В этих примерах, однако, не проявляются наиболее интересные свойства, которыми обладают все другие гиперболические группы. Однако, уже свободная (не абелева) группа F_k с $k \geq 2$ образующими является типичным представителем гиперболического мира.

Упражнение 8.4.26. Докажите, что деревья является 0-гиперболическим пространством и, следовательно, F_k — гиперболическая группа.

Каждая гиперболическая группа с точки зрения геометрии крупного масштаба выглядит как дерево (см. предложение 8.4.14). Оказывается, такое свойство является для гиперболических групп характеристическим, и такие группы могут быть определены следующим образом:

Определение 8.4.27. Конечно-порожденная группа Γ называется гиперболической, если каждый подконус на бесконечности графа $C(\Gamma)$ является топологическим деревом.

Из леммы 8.4.14 следует, что последнее определение следует из определения 8.4.25; доказательство обратного утверждения мы здесь не приводим. В некотором смысле гиперболические группы напоминают свободные группы: если посмотреть на гиперболические группы “с высоты птичьего полета”, соотношения этих групп “невозможно заметить из за мелкости масштаба”. Можно ожидать, что “случайно выбранная” группа с очень большой вероятностью окажется гиперболической (из-за быстрого роста числа возможных образующих и полиномиального роста случайных соотношений).

Следующее предложение служит обильным источником примеров гиперболических групп.

Теорема 8.4.28. Пусть M — компактное риманово многообразие, секционные кривизны которого ограничены сверху отрицательным числом (или, более общо, компактное пространство Александрова кривизны, ограниченной сверху числом $-k < 0$). Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ является гиперболической.

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрывающее \tilde{M} пространства M . Теорема 9.2.9 о глобализации для пространств неположительной кривизны (в главе 9) утверждает, что \tilde{M} (с метрикой, поднятой из M) имеет кривизну $\leq -k$ в целом. Теперь из упражнения 8.4.8 следует, что \tilde{M} — гиперболическое по Громову. По следствию 8.3.20 фундаментальная группа $\pi_1(M)$ квази-изометрична \tilde{M} . Наконец, следствие 8.4.17 показывает, что $\pi_1(M)$ также является гиперболическим по Громову. \square

Линейное изопериметрическое неравенство. Оказывается, что гиперболические группы обладают неожиданным свойством, которое оказывается характеристическим для этого класса групп. Это свойство также обобщает одну особенность многообразий отрицательной кривизны. Следующее предложение мотивирует определение, данное ниже

Предложение 8.4.29. Пусть M — односвязное риманово многообразие с секционными кривизнами ограниченными сверху числом $-k$, где $k > 0$. Тогда существует такое число $C = C(k)$, что для каждой замкнутой

кривой α длины $L > 1$ найдется погруженный диск β , имеющий площадь, не превосходящую CL , и ограниченный кривой α : $\partial\beta = \alpha$. Более общо, если M — односвязное пространство Александрова с внутренней метрикой кривизны, ограниченной сверху числом $-k$, где $k > 0$, то существует такое число $C = C(k)$, что каждое отображение окружности длины $L > 1$ в M может быть продолжено до такого отображения диска, ограниченного этой окружностью, что 2-мерная хаусдорфова мера образа диска не превосходит CL .

Отметим, что, описанная ситуация коренным образом отличается от евклидова случая: на окружность в евклидовом пространстве невозможно натянуть диском с площадью меньшей, чем $\frac{1}{4\pi}L^2$, то есть площади плоского круга.

Доказательство этого предложения мы оставляем читателю в качестве упражнения, ограничившись здесь лишь наброском. Доказательство основывается на следующем простом наблюдении. Рассмотрим кривую длины 1 в гиперболической плоскости кривизны k . Зафиксируем точку p . Кратчайшие, соединяющие p с точками кривой, замечают область, похожую на конус. Площадь этой области можно оценить сверху числом, не зависящим от выбора точки p (читателя, развившего в себе “гиперболическую” интуицию, не удивит, что площадь области не увеличивается бесконечно, когда точка p неограниченно удаляется от кривой.) Действительно, если бы кривая была отрезком, наша область была бы треугольником, и мы помним, что площадь треугольника не превосходит π/k (по теореме Гаусса–Бонне). Теперь читатель легко может получить некоторую верхнюю границу в случае произвольной кривой, просто заключив кривую в (выпуклый) многоугольник (зависящий только от длины кривой и числа k).

Перейдем к нашему многообразию M . Чтобы доказать предложение, выберем точку p в M и построим “конус” с вершиной p , соединив кратчайшими все точки кривой α с p . При этом получится топологический диск, натянутый на нашу кривую. Чтобы оценить его площадь, достаточно сравнить его с конусом над подходящей кривой (той же самой длины) в гиперболической плоскости кривизны k (кривая сравнения может не быть замкнутой, но ее дистанционная функция относительно некоторой точки должна равняться дистанционной функции кривой α относительно p , в обоих случаях — при натуральной параметризации).

Теперь сформулируем “дискретный аналог” того линейного изопериметрического неравенства, о существовании которого говорится в предложении 8.4.29. Пусть группа Γ задана симметрическим множеством образующих $G = \{g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}\}$ и соотношениями R_1, \dots, R_l . Пусть $\omega = w_1 w_2 \dots w_n$ — некоторое слово в алфавите $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$. Как обычно, под его

значением мы имеем в виду произведение $w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ в Γ . Значение пустого слова, по определению, считаем равным единице группы. Каждое соотношение R_i является таким словом в алфавите $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$, значение которого равно единице группы).

Под *элементарной заменой* в слове ω мы имеем в виду одну из следующих операций: добавление одного из слов R_1, \dots, R_l в какое либо место слова ω , вычеркивание из ω под слова, совпадающего с одним из слов R_1, \dots, R_l и вычеркивание образующего элемента и обратного к нему (g_i и g_i^{-1}), если они стоят подряд друг за другом в ω . Ясно, что элементарные замены не меняют значение ω . Значения двух слов равны тогда и только тогда, когда одно из них можно преобразовать в другое с помощью элементарных замен. Это — стандартный факт теории конечно порожденных групп (читатель может доказать это сам в качестве простого упражнения).

Определение 8.4.30. Говорят, что группа Γ удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству, если существует такая постоянная C , что каждое слово $\omega = w_1 w_2 \dots w_n$, значение которого равно единице, можно преобразовать в пустое слово путем не более, чем Cn элементарных замен.

Оказывается, что каждая гиперболическая группа удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству. На самом деле это свойство является для гиперболических групп характеристическим; но доказать это более трудно. Сформулируем альтернативное определение гиперболической группы, базирующееся на этом свойстве.

Определение 8.4.31. Конечно порожденная группа называется гиперболической, если она удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству.

Мы не приводим здесь доказательство того, что это определение равносильно двум предыдущим. (Нетрудно показать, что гиперболические группы удовлетворяют линейному изопериметрическому неравенству, и мы советуем читателю найти такое доказательство. Однако доказательство обратного утверждения не просто и требует привлечения дополнительных соображений.) Здесь мы обсудим изопериметрическое неравенство для группы с геометрической точки зрения. Напомним, что каждая конечно порожденная группа может рассматриваться как фундаментальная группа определенного конечно двумерного клеточного комплекса. Действительно, начнем с букета из k окружностей. На каждой окружности выберем ориентацию и пометим каждую из этих окружностей парой образующих (g_i, g_i^{-1}) . Теперь, для каждого соотношения, приклеим к букету двумерную клетку, соответствующую этому соотношению. Это означает, что мы приклеиваем ограничивающую эту клетку окружность к букету вдоль

кривой, проходящей окружности букета в том же порядке, в каком “метки” этих окружностей следуют в слове, представляющем наше соотношение. При этом направление, в котором проходится окружность, помеченная парой (g_i, g_i^{-1}) , зависит от того, встретился ли нам элемент g_i или обратный ему. По теореме Ван Кампена, группа Γ является фундаментальной группой построенного клеточного комплекса K .

Если каждую окружность букета рассматривать с ее стандартной внутренней метрикой и каждую 2-клетку представлять многоугольником, приклеенным по изометриям, то K становится пространством с внутренней метрикой. Его универсальное накрывающее \tilde{K} квази-изометрично Γ , и, следовательно, является гиперболическим по Громову пространством (показать, что \tilde{K} — гиперболическое по Громову, можно, например, построив на нем метрику отрицательной кривизны; в свою очередь нахождение такой метрики служит методом для доказательства того, что группа Γ является гиперболической; см. упражнение 8.4.32).

Зафиксируем вершину (1-клетку) p в \tilde{K} . После этого слово ω из образующих $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$ определяет путь γ в \tilde{K} , начинающийся в p и проходящий по тем ребрам 1-мерного скелета \tilde{K} , которые помечены (поднятыми из K) соответствующими буквами слова ω . Значение слова ω равно единице тогда и только тогда, когда путь γ замкнут (то есть снова возвращается в p).

Каков смысл элементарных замен в ω на языке γ ? Удаление подслова, совпадающего с одним из соотношений, означает стягивание петли (участка γ), обходящей какую либо 2-клетку; вставка соотношения означает добавление такой петли; наконец, вычеркивание образующего элемента и соседнего с ним обратного ему означает стягивание тривиальной петли (когда γ проходит по ребру и по нему же немедленно возвращается обратно). Следовательно, последовательности элементарных замен соответствует гомотопия кривой γ , и число заметенных кривой γ при такой гомотопии 2-клеток не больше, чем число элементарных замен в этой последовательности. Напомним, что при стягивании замкнутой кривой в точку замечается топологический диск. Следовательно, если γ замкнута (то есть, если значение ω равно единице), то число элементарных замен, необходимых для преобразования ω в пустое слово, равно комбинаторной площади (числу 2-клеток) в топологическом диске, ограниченном γ . Таким образом, мы видим, что линейное изопериметрическое неравенство для Γ в точности соответствует геометрическому линейному изопериметрическому неравенству (как то, с которого мы начали) для \tilde{K} .

Упражнение 8.4.32. Покажите, что группа, заданная с помощью шести образующих a_1, a_2, \dots, a_6 (и обратных им элементов) и одного соотношения $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = e$, является гиперболической.

Подсказка: Постройте \tilde{K} подобно тому, как это обсуждалось выше. Заметим, что геометрически это — в точности семейство шестиугольников, склеенных друг с другом по сторонам (так, что в вершине сходятся 12 ребер). В качестве шестиугольников возьмем копии правильного шестиугольника в гиперболической плоскости. Предположим, что этот шестиугольник мал (и следовательно его углы близки к $\frac{2}{3}\pi$). Покажите, что тогда \tilde{K} — пространство Александрова кривизны не большей, чем -1 .

Упражнение 8.4.33. Найдите прямое доказательство того, что фундаментальная группа компактного многообразия отрицательной кривизны удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству.

Подсказка: Это можно сделать с помощью соображений, использованных для доказательства предложения 8.4.29, представив многообразие как клеточный комплекс (и посмотрев, как его 2-скелет вложен в универсальное накрывающее нашего

Мы завершим этот параграф несколькими замечаниями, которые могут возбудить любопытство читателя и подтолкнуть его к систематическому изучению этого предмета. Хорошо известно, что проблема равенства слов (то есть выяснения, равно ли значение данного слова единице) для общей конечно порожденной группы алгоритмически неразрешима. Нетрудно видеть, используя линейное изопериметрическое неравенство, что эта проблема, однако, всегда разрешима для гиперболической группы; более того, тонкий анализ, использующий лемму Морса, показывает, что проблема тождества в этом случае разрешима за линейное время. На самом деле гиперболические группы принадлежат к классу *автоматных групп* — групп, для которых умножение может быть проверено с помощью конечного автомата. Читатель, знакомый с этими понятиями, может попытаться передоказать этот результат У. Терстона (его доказательство элементарно, но очень остроумно и элегантно).

8.5. Периодические метрики

8.5.1. Асимптотический конус абелевой группы. Пусть G — конечно порожденная абелева группа снабженная инвариантной метрикой d . Вместо $d(0, g)$, где $g \in G$, мы будем писать $d(g)$. Из теории групп известно, что G может быть разложена в сумму $\mathbb{Z}^N \oplus G_0$, где $N \geq 0$ — ранг группы G , а G_0 — некоторая конечная группа (на самом деле это множество элементов конечного порядка, называемое *кручением*). Отсюда ясно, что G отстоит на конечное расстояние по Хаусдорфу от ее подгруппы \mathbb{Z}^N . Такие пространства с точки зрения геометрии крупного масштаба, которая и есть эквивалентны. Так как в этом параграфе мы

занимаемся именно такой геометрией, то мы можем предполагать, что $G \simeq \mathbb{Z}^N$. Теперь G может быть представлена решеткой в N -мерном векторном пространстве V . Читатель может представлять себе \mathbb{Z}^N как множество целых точек в \mathbb{R}^N , но следует помнить, что сама евклидова структура не имеет отношения к делу. (На формальном алгебраическом языке объемлющее векторное пространство V можно получить из G путем тензорного умножения: $V = G \otimes \mathbb{R}$.)

Предложение 8.5.1. *Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(nv)}{n}$ существует для любого $v \in G$ (здесь n пробегает натуральные значения).*

Доказательство. Это предложение вытекает из следующей леммы, которая представляет собой примитивную версию субаддитивной эргодической теоремы.

Лемма 8.5.2. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность таких неотрицательных вещественных чисел, что $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ для всех m, n . Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x_n$.*

Доказательство леммы. Обозначим $\inf_n \frac{x_n}{n}$ через α и покажем, что $x_n/n \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется такое целое m , что $x_m/m < \alpha + \varepsilon$. Каждое натуральное число n можно представить в виде $n = km + r$, где k — неотрицательное целое, а $0 \leq r < m$. Из условий леммы по индукции получаем, что $x_{kn} \leq kx_n$ для всех k, n . Следовательно $x_n \leq kx_m + x_r \leq km(\alpha + \varepsilon) + x_r \leq n(\alpha + \varepsilon) + C(m)$, где $C(m) = \max_{0 \leq r < m} x_r$. Таким образом, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n/n \leq \alpha + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то отсюда немедленно следует $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n/n \leq \alpha = \inf_n (x_n/n)$, и лемма доказана. \square

Чтобы вывести наше предложение из леммы, положим $x_n = d(nv)$. Условие $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ следует из неравенства треугольника. \square

Следующее предложение выражает важное свойство функции $v \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(nv)}{n}$. Именно, эта функция может быть продолжена до полунормы на несущем векторное пространство V .

Предложение 8.5.3. *Существует такая полунорма $\|\cdot\|$ на V , что $\|v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(nv)}{n}$ для всех $v \in G$.*

Доказательство. Можно предположить, что $G = \mathbb{Z}^N$ и $V = \mathbb{R}^N$. Пусть $|\cdot|_E$ означает евклидову норму на \mathbb{R}^N , а $\{e_i\}_{i=1}^N$ — стандартный базис.

Равенство $\|v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(nv)}{n}$ определяет некоторую функцию на \mathbb{Z}^N . Эта функция положительно однородна на \mathbb{Z}^N и удовлетворяет неравенству треугольника. Можно распространить эту функцию на \mathbb{Q}^N , положив $\|v/n\| = \|v\|/n$ для всех $v \in \mathbb{Z}^N$, $n \in \mathbb{N}$. Продолженная

Функция также положительно однородна и удовлетворяет неравенству треугольника. Кроме того, она удовлетворяет условию Липшица $\mathbb{Q}^N \subset \mathbb{R}^N$ (по отношению к евклидовой норме). Действительно, при $x \in \mathbb{Q}^N$, $x = \sum x_i e_i$, мы имеем $\|x\| \leq \sum |x_i| \|e_i\| \leq N \max_i \{\|e_i\|\} \cdot |x|_E$. Поскольку \mathbb{Q}^N плотно в \mathbb{R}^N , эта функция имеет единственное непрерывное продолжение на \mathbb{R}^N . Положительная однородность и неравенство треугольника сохраняются по непрерывности. Следовательно, продолжение $\|\cdot\|$ на \mathbb{R}^N является полунормой. \square

Полунорма $\|\cdot\|$ из предложения 8.5.1 называется *асимптотической* или *стабильной нормой* метрики d . Во всех интересных случаях стабильная норма оказывается настоящей нормой, то есть она обращается в ноль только на нулевом векторе. Например, пусть d — метрика орбиты свободного кокомпактного вполне разрывного действия группы G на пространстве с внутренней метрикой. Тогда по теореме 8.3.19 d ограничена снизу стандартной евклидовой нормой, умноженной на некоторое положительное число. Эта граница наследуется стабильной нормой; таким образом, в этом случае стабильная норма действительно является нормой.

Теорема 8.5.4. Пусть $\|\cdot\|$ — стабильная норма инвариантной метрики d на $G \simeq \mathbb{Z}^N$. Предположим, что $\|\cdot\|$ является нормой. Тогда

- (1) $d(v)/\|v\| \rightarrow 1$ равномерно по $v \in G$ при $\|v\| \rightarrow \infty$.
- (2) Асимптотический конус пространства (G, d) изометричен пространству $(V, \|\cdot\|)$.

Доказательство. Заметим сначала, что второе утверждение следует из первого. Действительно, нам надо доказать, что $(G, \lambda d) \xrightarrow{GH} (V, \|\cdot\|)$ при $\lambda \rightarrow 0$ в смысле сходимости пунктированных пространств (отмеченной точкой является 0). Однако отображения $f_\lambda : (G, \lambda d) \rightarrow (V, \|\cdot\|)$, определенные равенством $f_\lambda(v) = \lambda v$, удовлетворяют условиям, входящим в определение сходимости пунктированных пространств (определение 8.1.1). И единственное, что надо проверять, — это что для каждого $R > 0$ искажения отображений f_λ в шаре радиуса R стремятся к нулю (при $\lambda \rightarrow 0$). Но это следует из первого утверждения теоремы.

Так что остается доказать первое утверждение. Ясно, что $\|v\| \leq d(v)$ для всех $v \in G$. С другой стороны, по теореме 8.3.19, $d \leq C\|\cdot\|_E$ для некоторой постоянной $C > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, и пусть S — конечная ε -сеть рациональных векторов (то есть $S \subset \mathbb{Q}G$) в единичном шаре $(V, \|\cdot\|)$. Тогда существует столь большое натуральное число M , что $Mv \in G$ и, более того, $d(Mv) \leq (1 + \varepsilon)M\|v\| \leq (1 + \varepsilon)M$ для всех $v \in S$ (см. предложение 8.5.1). Для каждого $w \in G$ существует такой вектор $v \in S$, что $\|w/\|w\| - v\| < \varepsilon$.

Пусть k — такое целое, что $k \leq \|w\| < k+1$. Тогда $\|w - kv\| \leq \varepsilon\|w\| + 1$
и

$$d(Mw) \leq d(kMv) + d(Mw - kMv) \leq (1 + \varepsilon)kM + CM(\varepsilon\|w\| + 1).$$

Следовательно, $d(Mw)/\|Mw\| \leq 1 + \varepsilon + C\varepsilon + M/\|w\|$. Заметим, что это — верхняя грань на $d/\|\cdot\|$ для всех тех векторов из G , которые делятся на M . Существует такая константа $C_1 = C_1(M)$, что в C_1 -окрестности каждого вектора $v \in G$ найдется делящийся на M вектор. Отсюда легко следует, что $d(v)/\|v\| \leq 1 + \varepsilon(C+2)$ для всех векторов $v \in G$, лежащих вне шара радиуса $R = R(M, \varepsilon)$. Так как число ε произвольно, это доказывает первое утверждение теоремы. \square

Замечание 8.5.5. Пусть d — метрика орбиты кокомпактного вполне разрывного действия группы G на пространстве X с внутренней метрикой. Напомним, что при том же действии метрики орбит могут быть различными в зависимости от выбора орбиты. Однако различие между любыми двумя метриками орбит не превосходит некоторой постоянной, так что стабильные нормы всех этих метрик совпадают. Так как расстояние по Хаусдорфу между орбитой и самим пространством X конечно, то $(V, \|\cdot\|)$ является также и асимптотическим конусом для X . Норму $\|\cdot\|$ называют стабильной нормой как пространства X , так и факторпространства X/G (по отношению к данному действию или накрытию).

Замечание 8.5.6. Первое утверждение теоремы остается верным и без предположения, что $\|\cdot\|$ является нормой. (Доказательство, в его существенной части, то же самое.) Во втором утверждении, если $\|\cdot\|$ не норма, нужно сделать очевидное изменение. Именно, следует за счет обычной факторизации превратить $(V, \|\cdot\|)$ в метрическое пространство. В результате мы получим векторное пространство меньшей размерности.

Упражнение 8.5.7. Пусть d — метрика слов on G , заданная (конечным) множеством S образующих. Докажите, что единичный шар стабильной нормы является выпуклой оболочкой множества $S \cup (-S) \subset V$.

Упражнение 8.5.8. Пусть d — метрика слов группы G и $\|\cdot\|$ — ее стабильная норма. Докажите, что существует такая постоянная C , что $\|x\| \leq d(x) \leq \|x\| + C$ для всех $x \in G$.

Замечание 8.5.9. Из утверждения последнего упражнения следует, что расстояние по Громову–Хаусдорфу между группой (G, d) и ее асимптотическим конусом $(V, \|\cdot\|)$ конечно. Это справедливо не только для метрики слов на $G \simeq \mathbb{Z}^N$, но и для любого пространства X с внутренней метрикой, допускающего кокомпактное действие изометриями группы \mathbb{Z}^N ([Bur]). Доказательство последнего утверждения

в полной его общности выходит за рамки этой книги. В следующем пункте мы докажем его частный случай для $X = \mathbb{R}^2$ и $G = \mathbb{Z}^2$ (см. следствие 8.5.13).

8.5.2. Периодические метрики на плоскости. Мы изучим здесь универсальные накрытия двумерных торов. Мы рассматриваем двумерный тор T^2 как факторпространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, где \mathbb{Z}^2 действует на \mathbb{R}^2 параллельными переносами. Проектирование $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ является накрывающим отображением. Как мы уже видели в предыдущих параграфах, это накрытие определяет взаимно-однозначное соответствие между внутренними метриками на T^2 и инвариантными относительно действия группы \mathbb{Z}^2 внутренними метриками на \mathbb{R}^2 . Мы будем называть последние \mathbb{Z}^2 -периодическими метриками. Типичным примером служит любая риманова метрика на \mathbb{R}^2 , заданная с помощью 2-периодического метрического тензора (читатель может представить себе это наглядно как поверхность с волнами, гребни которых 2-периодически повторяются как на обоях). Мы увидим, что с позиции геометрии крупного масштаба такая поверхность не отличается от некоторого нормированного пространства. Более того, такую поверхность и соответствующее нормированное пространство невозможно различить, если пользоваться измерительным инструментом, работающего с погрешностью, превышающей некоторое определенное число (подчеркнем, что мы имеем в виду *абсолютную* погрешность, а не относительную). Это заключение на самом деле верно в любой размерности, хотя ниже мы используем двумерность для упрощения доказательств.

Фундаментальная группа тора T^2 — это группа \mathbb{Z}^2 . Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow T^2$ — замкнутая кривая (петля), а $\tilde{\gamma}$ — подъем γ в \mathbb{R}^2 . Тогда вектор $[\gamma] := \tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a)$ можно рассматривать как элемент группы \mathbb{Z}^2 , представляющий γ . (Заметим, что этот вектор не зависит от выбора $\tilde{\gamma}$.) Вектор $[\gamma]$ называется *вектором вращения* петли γ . Две петли имеют равные вращения тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же свободному гомотопическому классу.

Пусть тор T^2 снабжен внутренней метрикой d . Обозначим через \tilde{d} соответствующую \mathbb{Z}^2 -периодическую метрику на \mathbb{R}^2 . Для каждого $v \in \mathbb{Z}^2$ обозначим через $\ell(v)$ длину такой кратчайшей петли на T^2 , для которой вектор v является вектором вращения. В терминах метрики \tilde{d} это можно записать следующим образом:

$$\ell(v) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \tilde{d}(x, x + v).$$

Действительно, расстояние $\tilde{d}(x, x + v)$ равно длине такой кратчайшей, соединяющей x с $x + v$, проекция которой в T^2 является кратчайшей петлей с вершиной $p(x)$ и вектором вращения v .

Функция $x \mapsto \tilde{d}(x, x+v)$ на \mathbb{R}^2 является непрерывной и 2-периодической; следовательно она достигает своих максимума и минимума. Поэтому правая часть формулы для $\ell(v)$ имеет смысл и существует такая постоянная C , что $\tilde{d}(x, x+v) \leq \ell(v) + C$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$.

Теорему 8.5.4 можно переформулировать следующим образом:

$$\lim_{\|x-y\| \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}(x, y)}{\|x-y\|} = 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}^2),$$

где $\|\cdot\|$ — стабильная норма пространства $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$. Из определения $\|\cdot\|$ и оценки $\tilde{d}(x, x+v) \leq \ell(v) + C$ следует, что

$$\|v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}(x, x+nv)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(nv)}{n},$$

где $v \in \mathbb{Z}^2$. Одной из целей этого пункта является улучшение последних формул.

Предыдущие рассуждения можно повторить дословно для торов и периодических метрик любой размерности. Однако следующая теорема справедлива только в размерности два.

Теорема 8.5.10. *Для любых $v \in \mathbb{Z}^2$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\ell(nv) = n\ell(v)$.*

Замечание 8.5.11. Эту теорему можно интерпретировать следующим образом: если петля γ на торе T^2 минимальна в своем свободном гомотопическом классе, то петля γ^n (то есть та же петля, но пройденная n раз) также минимальна в своем свободном гомотопическом классе.

Отметим, что подъем минимальной петли является кратчайшей в $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$. Предположим, что $\gamma : [0, L] \rightarrow T^2$ параметризована длиной дуги. Пусть $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow T^2$ — такая L -периодическая кривая (то есть $\gamma_0(t+L) = \gamma_0(t)$ для всех t), что ее сужение на $[0, L]$ есть γ . Тогда подъем $\tilde{\gamma}_0$ кривой γ_0 оказывается прямой, то есть такой геодезической $\tilde{\gamma}_0 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, что каждый ее интервал является кратчайшей.

Прежде, чем доказывать теорему, сформулируем два ее непосредственных следствия. Как мы уже отмечали, следствие 8.5.13 можно обобщить на любую размерность.

Следствие 8.5.12. $\|v\| = \ell(v)$ для всех $v \in \mathbb{Z}^2$.

Следствие 8.5.13. *Существует такая константа C , что*

$$|\tilde{d}(x, y) - \|x-y\|| \leq C$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Доказательство. При дополнительном предположении, что $x - y \in \mathbb{Z}^2$, ограниченность $|\tilde{d}(x, y) - \|x - y\||$ сверху вытекает из предыдущего следствия. Но, так как факторпространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ компактно, то же самое верно и при всех $x, y \in \mathbb{R}^2$. \square

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая топологическая лемма.

Лемма 8.5.14. Пусть $v \in \mathbb{Z}^2$ — ненулевой вектор и γ — петля в T^2 с вектором вращения nv , где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Тогда γ не является простой петлей, то есть она имеет самопересечения. Более того, можно разложить γ на две петли (с вершинами в одной из точек самопересечения петли γ), вращения которых равны v и $(n - 1)v$.

Доказательство. Это — хорошо известный факт элементарной топологии. Здесь мы приведем одно из возможных доказательств.

Обозначим через A факторпространство \mathbb{R}^2 по группе целых чисел, кратных nv . Это факторпространство гомеоморфно цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, так что переносу на вектор v соответствуют в A поворот на $2\pi/n$. Обозначим этот поворот через R . Выберем естественное накрытие тора T^2 цилиндром A , коммутирующее с проектированиями из \mathbb{R}^2 на A и T^2 , и пусть $\tilde{\gamma}$ — подъем петли γ в A . Тогда $\tilde{\gamma}$ — замкнутая нестягиваемая кривая. Такая кривая отделяет “концы” цилиндра друг от друга в том смысле, что точки цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$, у которых последние координаты “близки” к $+\infty$ и к $-\infty$, соответственно, принадлежат к различным компонентам дополнения к (образу) кривой. Рассмотрим кривую $R(\tilde{\gamma})$ в $S^1 \times \mathbb{R}$ и покажем, что она пересекает $\tilde{\gamma}$. Действительно, предположим противное. Тогда $R(\tilde{\gamma})$ содержится в одной из компонент связности дополнения к $\tilde{\gamma}$. Пусть x^+ и x^- — такие две точки (образа) кривой $\tilde{\gamma}$ in $S^1 \times \mathbb{R}$, что в них последняя координата достигает максимума и минимума, соответственно. Ясно, что точки $R(x^+)$ и $R(x^-)$ лежат на кривой $R(\tilde{\gamma})$. С другой стороны $R(x^+)$ и $R(x^-)$ принадлежат различным компонентам дополнения к $\tilde{\gamma}$, ибо их можно соединить кривыми с $(+\infty)$ -концом и $(-\infty)$ -концами, соответственно. Противоречие.

Таким образом, $R(\tilde{\gamma})$ пересекается с $\tilde{\gamma}$. Другими словами, найдется такая точка x кривой $\tilde{\gamma}$, что $y = R(x)$ также принадлежит $\tilde{\gamma}$. Эти две точки разбивают $\tilde{\gamma}$ на две дуги, проекции которых на T^2 являются петлями с вращениями $\pm v$ и $(n \mp 1)v$. Если эти вращения равны векторам v и $(n - 1)v$, то лемма доказана. В противном случае мы можем провести те же рассуждения для петли с вектором вращения $(n + 1)v$, и повторять этот процесс до тех пор, пока мы не получим петлю с вектором вращения v (но не $-v$). К счастью, это непременно произойдет, потому что иначе γ содержит, как свои участки, петли со сколь угодно большим

вектором вращения, а последнее противоречит тому, что ее подъем в \mathbb{R}^2 компактен. \square

Доказательство теоремы 8.5.10. Теперь легко доказать теорему индукцией по n . Случай $n = 1$ тривиален. Если $n > 1$, возьмем в качестве γ — минимальную петлю представляющую вектор nv . Согласно лемме 8.5.14, петлю γ можно разбить на две петли γ_1 и γ_2 с вращениями v и $(n-1)v$, соответственно. Теперь, по индукции, $\ell(nv) = L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \geq \ell(v) + \ell((n-1)v) = n\ell(v)$. Противоположное неравенство $\ell(nv) \leq n\ell(v)$ тривиально. \square

Упражнение 8.5.15. Пусть d — гладкая риманова \mathbb{Z}^2 -периодическая метрика на \mathbb{R}^2 . Докажите, что единичный шар ее стабильной нормой $\|\cdot\|$ строго выпуклый в том смысле, что его граница не содержит прямолинейных отрезков. Последнее равносильно неравенству $\|v+w\| < \|v\| + \|w\|$ для всех линейно независимых векторов v и w .

Подсказка: если вращения двух петель в T^2 линейно независимы, то сами петли непременно пересекаются.

Упражнение 8.5.16. Пусть ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 — три попарно непересекающиеся прямые в \mathbb{R}^3 , параллельные координатным осям и пересекающие открытый единичный куб $(0, 1)^n$. Докажите, что в \mathbb{R}^3 найдется такая \mathbb{Z}^3 -периодическая риманова метрика, что

- (1) ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 являются для нее прямыми, (то есть геодезическими, любой участок которых — кратчайшая).
- (2) Не существует других прямых (минимальных геодезических), кроме этих трех и тех, что получаются из них целочисленными параллельными переносами.
- (3) Стабильная норма этой метрики $\|\cdot\|_1$ задается равенством $\|(x, y, z)\| = |x| + |y| + |z|$.

Подсказка: выберем метрический тензор так, чтобы он совпадал со стандартным евклидовым на наших прямых и становился очень большим вне некоторой их окрестности. (Этот пример и смежные вопросы обсуждаются в статье [Ban].)

8.5.3. Асимптотические объемы периодических метрик. Рассмотрим \mathbb{Z}^n -периодическую метрику d на \mathbb{R}^n . Как эта метрика, так и ее сужение на \mathbb{Z}^n определяют стабильную норму $\|\cdot\|$ на \mathbb{R}^n . Из теоремы 8.5.4 следует, что отношение $d(x, y)/\|x - y\|$ стремится к 1, когда $\|x - y\|$ (или $d(x, y)$) идет к бесконечности. Другими словами, с точки зрения крупномасштабной геометрии метрика d эквивалентна метрике, порожденной нормой $\|\cdot\|$. (На самом деле расстояние между ними даже ограничено;

см. замечание 8.5.9.) Обозначим через D единичный шар стабильной нормы; то есть $D = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1\}$.

Мы будем здесь изучать поведение объемов шаров больших радиусов в метрика d .

Определение 8.5.17. Пусть d — та же метрика, как и выше. По определению, ее *асимптотический объем* $\Omega(d)$ равен

$$\Omega(d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_d(B_r(x))}{r^n},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка, а $B_r(x)$ — шар радиуса r в метрике d .

Естественно, в первую очередь надо доказать существование в этом определении предела.

Предложение 8.5.18. *Асимптотический объем $\Omega(d)$ существует и не зависит от точки $x \in \mathbb{R}^n$. Более того,*

$$\Omega(d) = \text{Vol}_d(I^n) \cdot \mu_n(D),$$

где $I^n = [0, 1]^n$ и μ_n — стандартная мера Лебега (или Хаусдорфа) в \mathbb{R}^n . В частности, $\Omega(d)$ конечен и положителен.

Доказательство. Мы приведем здесь лишь набросок доказательства с тем, чтобы читатель сам восстановил все детали. Из теоремы 8.5.4 следует, что $d(x, y) \sim \|x - y\|$ при $\|x - y\| \rightarrow \infty$. Следовательно, шар $B_x(r)$ в метрике d близок к множеству $rD = \{rv : v \in D\}$ (то есть к шару радиуса r в норме $\|\cdot\|$) в следующем смысле: для любого данного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших r выполняется $(1 - \varepsilon)rD \subset B_x(r) \subset (1 + \varepsilon)rD$. Это позволяет в определении асимптотического объема заменить $B_r(x)$ на rD . Пространство \mathbb{R}^n можно представить как объединение клеток, полученных переносами куба I^n на все целые вектора. Объемы всех таких клеток равны между собой, так как метрика периодична. Обозначим через $Q(r)$ объединение всех клеток, содержащихся в rD . Тогда $\text{Vol}_d(rD) \sim \text{Vol}_d(Q(r))$ и $\mu_n(rD) \sim \mu_n(Q(r))$ при $r \rightarrow \infty$, потому что можно пренебречь числом клеток, пересекающих границу rD . Отсюда и из $\text{Vol}_d(Q(r))/\mu_n(Q(r)) = \text{Vol}_d(I^n)/\mu_n(I^n)$ следует, что

$$\text{Vol}_d(B_r(x)) \sim \frac{\text{Vol}_d(I^n)}{\mu_n(I^n)} \mu_n(rD) = \frac{\text{Vol}_d(I^n)}{\mu_n(I^n)} \mu_n(D) r^n, \quad r \rightarrow \infty.$$

Этим предложение доказано. \square

Упражнение 8.5.19. Докажите предложение 8.5.18 для любого риманова многообразия M , метрика которого инвариантна относительно разрывного кокомпактного действия группы \mathbb{Z}^n . При этом формула для $\Omega(d)$ должна быть изменена следующим образом: замените $\text{Vol}_d(I^n)$ на $\text{Vol}_d(M/\mathbb{Z}^n)$,

где $(M/\mathbb{Z}^n, \bar{d})$ — факторпространство относительно рассматриваемого действия.

Теперь наша цель — доказать, что можно ограничить асимптотический объем снизу постоянной, зависящей только от размерности, но не от метрики. На самом деле асимптотический объем достигает своего минимума для евклидовой (плоской) метрики, так что этот минимум равен объему единичного евклидова шара (это доказано в [В1]). Нижняя граница, которая будет получена в следующей теореме, не оптимальна; однако даже сам факт существования положительной общей нижней границы для всех метрик не очевиден.

Теорема 8.5.20. *Для любой \mathbb{Z}^n -периодической римановой метрики d на \mathbb{R}^n справедлива оценка $\Omega(d) \geq (2/n)^n$.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — стабильная норма метрики d , D — единичный шар в этой метрике, а Q — такой аффинный куб, что $\frac{1}{n}Q \subset D \subset Q$ (такой куб Q существует в силу леммы 5.5.19). так как $D \subset Q$, то для любых точек v и v' , принадлежащих противоположным граням куба, выполняется $\|v - v'\| \geq 2$. Поясним идею доказательства: Полагая $x = 0$, заменим в определении $\Omega(d)$ шар $B_r(x) \approx rD$ меньшим множеством $\frac{r}{n}Q$. После этого оценим объем $\frac{r}{n}Q$ с помощью неравенства Безиковича.

Перейдем к формальному изложению. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть число r столь велико, что как только $\|x - y\| \geq r/n$ или $d(x, y) \geq r/n$, то

$$(1 - \varepsilon)\|x - y\| \leq d(x, y) \leq (1 + \varepsilon)\|x - y\|$$

(см. теорему 8.5.4 и начало этого пункта).

Тогда расстояние (в метрике d) между противоположными гранями аффинного куба $\frac{r}{n}Q$ не меньше, чем $2(1 - \varepsilon)r/n$. Отсюда, по неравенству Безиковича, следует, что

$$\text{Vol}_d\left(\frac{r}{n}Q\right) \geq (1 - \varepsilon)^n (2r/n)^n.$$

С другой стороны, так как $\frac{r}{n}Q \subset rD$, мы имеем $\|x\| \leq r$ и, следовательно, $d(0, x) \leq (1 + \varepsilon)r$ для всех $x \in \frac{r}{n}Q$. Это означает, что наш аффинный куб $\frac{r}{n}Q$ содержится в шаре $B_{(1+\varepsilon)r}(0)$. Таким образом,

$$\Omega(d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_d(B_{(1+\varepsilon)r}(0))}{(1 + \varepsilon)^n r^n} \geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_d(\frac{r}{n}Q)}{(1 + \varepsilon)^n r^n} \geq (2(1 - \varepsilon)/n)^n / (1 + \varepsilon)^n.$$

Отсюда, ввиду произвольности ε , следует искомое неравенство $\Omega(d) \geq (2/n)^n$. \square

Следующем упражнении позволяет улучшить постоянную в последней теореме.

Упражнение 8.5.21. Для нормы на \mathbb{R}^n и единичного шара D этой нормы положим

$$\lambda(D) = \sup\left\{\frac{\mu_n(D)}{\mu_n(Q)} : Q \text{ — аффинный куб, содержащий } D\right\}.$$

Докажите, что $\Omega(d) \geq 2^n \lambda(D^*)$ для любой периодической римановой метрики на \mathbb{R}^n , где D^* — единичный шар стабильной нормы нашей римановой метрики.

Подсказка: скомбинируйте доказательства предложения 8.5.18 и теоремы 8.5.20. Именно, покажите, что

1. для любого аффинного куба Q справедливо $\text{Vol}_d(rQ) \sim r^n \text{Vol}_d(I^n) \cdot \mu_n(Q)$ при $r \rightarrow \infty$.

2. Если аффинный куб Q содержит единичный шар стабильной нормы, то $\text{Vol}_d(rQ) \geq (2r)^n - o(r^n)$ при $r \rightarrow \infty$.

Упражнение 8.5.22. Докажите, что для каждого целого $n \geq 2$ и любого $C > 0$ Существует такая периодическая риманова метрика d на \mathbb{R}^n , что $\Omega(d) \geq C$ (сравните с упражнением 5.6.16).

Пространства ограниченной сверху кривизны

В этой главе мы сосредоточимся на свойствах, специфических для пространств ограниченной сверху кривизны. Раздел 9.1 посвящен локальным свойствам таких пространств. Раздел 9.2 содержит введение в глобальную геометрию пространств Адамара (полных односвязных пространств неположительной кривизны). Мы увидим, что локальные свойства пространств кривизны $\leq k$ почти не зависят от значения k . Однако глобальные свойства могут сильно различаться в случаях $k \leq 0$ и $k > 0$. В действительности о пространствах, кривизна которых ограничена снизу каким либо (например, положительным) числом, известно совсем не много, даже если эти пространства — римановы многообразия или поверхности в \mathbb{R}^3 . Одно из объяснений этого заключается в том, что такие классы пространств определены в терминах локальных свойств, которые могут не наследоваться для объектов “в целом” (см. пример 9.1.13.) В частности, эти классы не замкнуты по отношению к сходимости по Громову–Хаусдорфу.

В случае $k \leq 0$ ситуация совершенно иная: для односвязных пространств локальные условия на кривизну влекут справедливость тех же условий “в целом” (скажем, для медиан или углов произвольно больших треугольников. Это составляет содержание теоремы о глобализации 9.2.9. Упомянутая теорема позволяет нам получить гораздо больше информации о геометрии “в целом”, чем это возможно в общем случае.

Для читателей, знакомых с римановой геометрией, мы заметим, что почти все классические результаты о римановых многообразиях неположительной (и строго отрицательной) кривизны имеют обобщения для общих пространств кривизны ≤ 0 (соотв., $\leq k < 0$). Это — теоремы о фундаментальной группе, группе изометрий, существовании евклидовых плоскостей и асимптотическом поведении на бесконечности (граница на бесконечности). Доказательства похожи на оригинальные доказательства римановой геометрии, откуда следует, что “дифференциальная техника” римановых доказательств не отражает существа предмета. В противоположность этому, аргументы, использующие выпуклость, часто играют ключевую роль.

9.1. Определения и локальные свойства

9.1.1. Определения. Мы начнем с определения пространства кривизны $\leq k$, где k — произвольное вещественное число. Все понятия, необходимые для этого определения, могут быть найдены в соответствующих местах главы 4; здесь мы только собрали их вместе.

Напомним, что k -плоскостью называется двумерное односвязное пространство постоянной кривизны k . В зависимости от знака k , это — либо евклидова плоскость, либо сфера (радиуса $1/\sqrt{k}$) с ее внутренней метрикой, либо гиперболическая плоскость кривизны k . Через R_k мы обозначим диаметр k -плоскости, то-есть $R_k = \pi/\sqrt{k}$, если $k > 0$, и $R_k = \infty$, если $k \leq 0$.

Треугольником сравнения для треугольника Δabc в некотором пространстве с внутренней метрикой называется такой треугольник $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ в k -плоскости, что $|\bar{a}\bar{b}| = |ab|$, $|\bar{a}\bar{c}| = |ac|$ и $|\bar{b}\bar{c}| = |bc|$. Говоря о треугольниках сравнения, мы всегда предполагаем, что периметр $|ab| + |bc| + |ac|$ треугольника меньше, чем $2R_k$ (конечно, это требование не накладывает никаких ограничений, если $k \leq 0$). Это предположение гарантирует нам, что треугольник сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ существует и единственен с точностью до изометрии.

Определение 9.1.1. *Пространством кривизны $\leq k$* называется пространство X с внутренней метрикой, каждая точка которого имеет окрестность U , удовлетворяющую следующим требованиям.

1. Любые две точки из U можно соединить кратчайшей в U .
2. Для любых трех точек $a, b, c \in U$ таких, что $|ab| + |bc| + |ac| < 2R_k$, и произвольной точки d на любой из кратчайших $[ac]$ соблюдается условие сравнения треугольников: $|db| \leq |\bar{d}\bar{b}|$, где $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — треугольник сравнения на k -плоскости для Δabc , а точка $\bar{d} \in [\bar{a}\bar{c}]$ такова, что $|ad| = |\bar{a}\bar{d}|$.

Пространством ограниченной сверху кривизны называется такое пространство с внутренней метрикой, что любая его точка содержится в

открытом множестве, обладающем указанными свойствами при некотором k (это число может быть разным для различных точек). Равносильно, каждая точка имеет такую окрестность, что индуцированная в ней (внутренняя) метрика имеет кривизну $\leq k$ для некоторого k , зависящего от точки.

В действительности достаточно проверить условие сравнения треугольников только в случае, когда d является серединой между точками a и c (упражнение 4.1.11). Заметим, что это определение не требует единственности кратчайшей $[a, c]$ (или единственности середины). Однако, как мы увидим в разделе 9.1.3 единственность следует из этого определения автоматически.

Определение 9.1.1 является модификацией определения 4.1.9. Другие варианты определения пространств ограниченной сверху кривизны (см. 4.1.2, 4.1.9, и 4.3.1) легко переформулировать для случая кривизны $\leq k$, причем все четыре определения оказываются равносильными между собой (упражнение 4.6.3).

Неприятной особенностью нашего определения является требование существования кратчайшей между любыми двумя точками (из некоторой окрестности U). Хотя мы в основном ограничиваемся изучением локально компактных пространств (где кратчайшие всегда существуют), пространства, априори не являющиеся локально компактными, все же возникают в некоторых построениях. Чтобы работать с такими пространствами, хотелось бы иметь более общую версию определения 9.1.1, где середины заменены “почти серединами” (аналогично переходу от строго внутренних метрик к внутренним в параграфе 2.4.3).

Определение 9.1.2. *Пространством кривизны $\leq k$ называется пространство с внутренней метрикой, каждая точка которого имеет окрестность U удовлетворяющую следующему требованию.*

Для любых трех точек $a, b, c \in U$, любого $\varepsilon > 0$ и любой ε -средины d между a и c имеет место неравенство $|bd| \leq |\bar{bd}| + f(\varepsilon)$, где \bar{d} — середина стороны $[\bar{a}\bar{c}]$ треугольника сравнения $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ на k -плоскости, и $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (точки a, b, c фиксированы).

Фактически именно определение 9.1.2 является “стандартным”. Однако мы будем использовать определение 9.1.1, чтобы избежать технических осложнений. Оправданием нам послужит то обстоятельство, что эти определения равносильны для полных пространств.

Предложение 9.1.3. *Для полных (более общо, локально полных) пространств определения 9.1.1 и 9.1.2 равносильны.*

Доказательство. Предположим, что полное пространство X с внутренней метрикой имеет кривизну $\leq k$ в смысле определения 9.1.2. Нам нужно

доказать локальное существование кратчайшей в X . По теореме 2.4.16 (точнее, ее “локализованной” версии — сформулируйте и докажите ее сами) достаточно доказать существование середин. Пусть $a, c \in U$, где U — окрестность из определения. Построим середину между a и c как предел фундаментальной последовательности “почти середин”.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — такая последовательность положительных чисел, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$, и пусть d_n есть ε_n -середина для точек a и c . Рассмотрим треугольник Δacd_n и ε_n -середину d_m между a и b . Имеем $|d_n d_m| \leq |\bar{d}_n \bar{d}| + f(\varepsilon_n)$, где \bar{d} — середина стороны $[\bar{a}\bar{c}]$ треугольника сравнения $\Delta \bar{a}\bar{c}\bar{d}_n$. Легко видеть, что $|\bar{d}_n \bar{d}| \rightarrow 0$.

(Действительно, точка \bar{d}_n на k -плоскости принадлежит пересечению шаров радиуса $|ac|/2 + \varepsilon_n$ с центрами в точках \bar{a} и \bar{c} . Диаметр этого пересечения стремится к нулю, так как $|ac|$ фиксировано, а $\varepsilon_n \rightarrow 0$.)

Таким образом, последовательность точек $\{d_n\}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства X эта последовательность сходится к точке, которая, очевидно, и есть искомая середина между a и c .

Заметим, что полученная таким образом середина d единственна: в противном случае мы могли бы применить наше условие ограниченности кривизны к тройке a, c, d и еще одной середине \bar{d} , что сразу привело бы к противоречию. \square

9.1.2. Примеры. Мы уже обсуждали примеры графов и полиэдров неположительной кривизны в главе 4. Даже эти первые примеры показывают, что пространство неположительной кривизны может иметь довольно сложную структуру. Например (в противоположность случаю неотрицательной кривизны), локальная размерность такого пространства может меняться от точки к точке. (Хотя размерность еще не была определена, ее смысл в случае столь простых примеров как 2-полиэдры, совершенно ясен).

Пример 9.1.4. Открытое подмножество пространства кривизны $\leq k$ с индуцированной внутренней метрикой само является пространством кривизны $\leq k$. В частности, открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n является пространством неположительной кривизны.

Заметим, что слово “открытое” существенно. Например, если удалить из плоскости открытые круги $B_{r_k}(1/k)$, где $r_k = 1/(k+1)^2$, $k = 1, 2, \dots$, то получившееся пространство с внутренней метрикой не будет пространством неположительной кривизны. См. также пример 9.1.7 ниже.

Пример 9.1.5. Прямое произведение пространств кривизны не более, чем k есть пространство кривизны не более, чем $\max\{k, 0\}$.

Это проверяется непосредственно. Сравните с упражнением 4.1.13

Заметим, что произведение пространств кривизны $\leq k$ не является пространством кривизны $\leq k$, если $k < 0$, кроме случая, когда одно из пространств — точка. Действительно, рассмотрим две произвольные (непостоянные) кратчайшие в пространствах X и Y . Эти кратчайшие (как подпространства) изометричны интервалам из \mathbb{R} ; поэтому их произведение в $X \times Y$ есть выпуклое множество, изометричное подмножеству евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Таким образом, пространство $X \times Y$ не может иметь строго отрицательную кривизну.

Пример 9.1.6. Дополнение открытого диска на плоскости \mathbb{R}^2 (с индуцированной внутренней метрикой) является пространством неположительной кривизны. (Упражнение: проверьте это.)

Более общо, любое локально односвязное подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$ (с индуцированной внутренней метрикой) является пространством неположительной кривизны. Доказательство проходит по следующей схеме. Согласно теореме Жордана о плоских кривых, треугольник в \mathbb{R}^2 ограничивает множество, гомеоморфное диску. Локальная односвязность позволяет утверждать, что (для достаточно маленьких треугольников) это множество содержится в X . Отсюда следует, что стороны этого треугольника — вогнутые дуги (в обычном смысле), так как иначе их можно было бы укоротить в ограниченной области. Проверка условия на углы для таких вогнутых треугольников более или менее тривиально (при вытягивании вершин за продолжения сторон углы возрастают).

Пример, приведенный выше — чисто двумерное явление.

Пример 9.1.7. Дополнение открытого шара в \mathbb{R}^3 не является пространством неположительной кривизны. Например, рассмотрим треугольник с вершинами, лежащими на краю вырезанного шара. Стороны этого треугольника являются кратчайшими на двумерной сфере, поэтому соответствующие углы *больше*, чем углы треугольника сравнения на плоскости.

Упражнение 9.1.8. Является ли дополнение открытого единичного шара в \mathbb{R}^3 пространством кривизны $\leq k$ для некоторого k ?

Ответ. Да, для $k = 1$.

Пример 9.1.7 показывает, что пополнение пространства неположительной кривизны может не быть пространством неположительной кривизны. Так, в следующем примере пополнение пространства неположительной кривизны не является пространством ограниченной сверху кривизны.

Пример 9.1.9. Внутренняя метрика кругового конуса без вершины в \mathbb{R}^3 — локально плоская и поэтому конус является пространством неположительной кривизны. Его пополнение — конус с вершиной — не является пространством ограниченной сверху кривизны.

Пример 9.1.10. Как упоминалось в главе 5, двумерная поверхность (более общо, риманово многообразие) является пространством кривизны $\leq k$ если и только если ее гауссова кривизна в каждой точке не превышает k .

Пример 9.1.11. (*Пространственные формы*) Каждую ориентированную замкнутую поверхность рода $n \geq 2$ можно снабдить метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхность рода n можно (топологически) склеить из многоугольника с $4n$ вершинами следующим образом: помечаем (в циклическом порядке) стороны $4n$ -угольника символами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, a_n^{-1}, b_n^{-1}$; затем склеиваем вместе стороны, помеченные одинаковыми буквами (a и a^{-1} , и т.д.). Для того, чтобы получить поверхность с нужной метрикой, проведем это построение с выпуклым $4n$ -угольником на гиперболической плоскости. При этом многоугольник должен удовлетворять следующим требованиям: склеиваемые стороны имеют одинаковые длины и сумма всех углов многоугольника равна 2π .

Легко видеть, что многоугольники с такими свойствами существуют. (В частности, найдется правильный многоугольник с такими свойствами.) Действительно, если многоугольник мал, то сумма его углов близка к сумме углов подходящего плоского многоугольника, то есть $(4n - 2)\pi > 2\pi$. С другой стороны, если он неограниченно растет (т.е. если его вершины неограниченно удаляются друг от друга), то сумма углов стремится к нулю. По непрерывности, найдется правильный $4n$ -угольник с суммой углов 2π . (На самом деле существует континуум различных многоугольников, подходящих для нашей конструкции.)

Склеивая стороны такого многоугольника согласно предложенному правилу, мы получим ориентированную поверхность кривизны -1 , которая локально изометрична гиперболической плоскости (докажите это). Постоянная кривизна $k < 0$ может быть получена умножением метрики на $1/\sqrt{-k}$.

Замкнутые поверхности постоянной отрицательной кривизны называются (двумерными) *пространственными формами*.

Упражнение 9.1.12. Измените приведенное построение так,

а) чтобы получить замкнутые неориентируемые поверхности произвольного рода $n \geq 3$ с метрикой постоянной отрицательной кривизны;

б) чтобы получить полные некомпактные поверхности (с “рогами”), имеющие конечную площадь.

Пример 9.1.13. Возьмем две единичных сферы и сделаем маленькие круглые отверстия в каждой. Соединим сферы тонким цилиндром, приклеив его к краям отверстий (мы предполагаем, что радиусы окружностей и цилиндра совпадают). Мы получим замкнутую поверхность кривизны ≤ 1 , которая выглядит как гантель. Эту поверхность легко загладить.

Заметим, что такая поверхность может содержать очень короткие замкнутые геодезические, если цилиндр достаточно “тонок”.

Следующий нетривиальный результат позволяет получать новые примеры пространств неположительной кривизны.

Теорема 9.1.14 (С. Александер, Р. Бишоп [АВ1]). Пусть X и Y — полные односвязные пространства неположительной кривизны и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вогнутая функция. Тогда скрученное произведение $X \times_f Y$ (см. 3.6.4) является пространством неположительной кривизны.

9.1.3. Элементарные свойства.

Определение 9.1.15. Пусть X — пространство кривизны $\leq k$. *Нормальным шаром* в X называется шар U радиуса меньшего, чем $R_k/2$, удовлетворяющий условиям определения 9.1.1. (Иногда мы будем называть такой шар *нормальной областью* или *нормальной окрестностью*.)

Пусть $p \in X$. Верхняя грань таких чисел r , что $B_r(p)$ — нормальный шар, называется *радиусом выпуклости* в точке p и обозначается $r(p)$. Легко доказать (сделайте это самостоятельно), что число

$$r(K) = \inf\{r(p) : p \in K\}$$

положительно для каждого компактного множества K . Это число называется *радиусом выпуклости* компакта K .

Термин “радиус выпуклости” оправдывает следующее

Предложение 9.1.16. *Каждый нормальный шар является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $B_r(p)$ — нормальный шар и $a, b \in B_r(p)$. Так как $r < R_k/2$, то шар $B_r^k(\bar{p})$ на k -плоскости является выпуклым. По условию на треугольники, для треугольника сравнения $\Delta \bar{p}\bar{a}\bar{b}$ мы имеем $|\bar{p}\bar{d}| < r$ для любой точки $\bar{d} \in [\bar{a}\bar{b}]$. Поэтому $|pd| \leq |\bar{p}\bar{d}| < r$ для любой точки $d \in [a, b]$, что дает $[ab] \subset B_r(p)$. \square

Все пункты следующего предложения почти немедленно следуют из определений.

Предложение 9.1.17. Пусть X — полное локально компактное пространство кривизны $\leq k$, а $U \subset X$ — нормальный шар. Тогда

- (1) Для любых двух точек $a, b \in U$ существует единственная кратчайшая, соединяющая эти точки и содержащаяся в U .
- (2) Если γ_1, γ_2 — кривые в U , то кратчайшая $[\gamma_1(t)\gamma_2(s)]$ зависит от t и s непрерывно.
- (3) Каждый шар $B_r(p) \subset U$ — выпуклое множество.

- (4) Пусть $[ab], [ac]$ — две кратчайшие в U с общим началом a . Если $\angle bac = \pi$, тогда кривая bac — также кратчайшая.
- (5) Каждая геодезическая, содержащаяся в U , является кратчайшей.

Доказательство. (1) Предположим, что существуют две кратчайшие, $[ab]_1$ и $[ab]_2$. Для любой точки $c \in [ab]_1$ рассмотрим треугольник Δabc и его треугольник сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Последний треугольник вырожден: $\bar{c} \in \bar{a}\bar{b}$. Пусть d — такая точка на $[ab]_2$, что $|ac| = |ad|$. Тогда мы имеем $|cd| \leq |\bar{c}\bar{d}| = 0$, что влечет $c = d$ и $[ab]_1 = [ab]_2$ в силу произвольности c .

Так как предел последовательности кратчайших — снова кратчайшая, то (2) следует из (1).

Доказательство пункта (3) повторяет доказательство предложения 9.1.16. Утверждение (4) следует из того, что треугольник сравнения для Δabc вырожден: $\angle \bar{b}\bar{a}\bar{c} = \pi$.

(5) Пусть геодезическая $\gamma : [0, L] \rightarrow U$ не является кратчайшей, а $t \in [0, L]$ — такое максимальное значение параметра, что ограничение $\gamma|_{[0,t]}$ — кратчайшая. Этот максимум существует, так как ограничение геодезической на $[0, t]$ является кратчайшей тогда и только тогда, когда $|\gamma(0)\gamma(t)| = t$, а последнее равенство задает замкнутое множество. Так как γ — геодезическая, то ее ограничение на $[t, t + \varepsilon]$ будет кратчайшей для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Теперь пункт (4), примененный к кратчайшим $\gamma|_{[0,t]}$ и $\gamma|_{[t,t+\varepsilon]}$, приводит к противоречию с максимальнойностью значения t . \square

Замечание 9.1.18. Из предложения 9.1.17 следует, что нормальный шар U стягиваем. Действительно, фиксируем точку $p \in U$; тогда для каждого $x \in U$ найдется единственная кратчайшая $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow U$ (параметризованная длиной дуги), соединяющая $\gamma_x(0) = x$ и $\gamma_x(1) = p$. Таким образом отображение $H : U \times [0, 1] \rightarrow U$, определенное равенством $H(x, t) = \gamma_x(t)$, определено корректно и задает гомотопию между тождественным отображением $id_U(x) = \gamma_x(0)$ и постоянным (переводящим каждую точку $x \in U$ в точку p). Наглядно, эта гомотопия перемещает точку $x \in U$ в направлении точки p вдоль соответствующей кратчайшей. (Упражнение: докажите, что отображение H действительно гомотопия, т.е., что оно непрерывно.)

В частности, любое пространство неположительной кривизны локально односвязно и поэтому имеет универсальное накрывающее пространство (см. теорему 3.4.11).

Простые примеры, такие как плоские торы или гиперболические пространственные формы, показывают, что локальные условия ограниченности кривизны, вообще говоря, не влекут аналогичных свойств в целом. Это тесно связано с тем, что указанные пространства содержат замкнутые

геодезические. Торы и поверхности большого рода не односвязны, поэтому замкнутые геодезические могут быть найдены с помощью минимизации длины в свободном гомотопическом классе нестягиваемой замкнутой кривой. Пространства из примера 9.1.13 односвязны (гомеоморфны сфере), но их радиусы выпуклости могут быть сделаны сколь угодно малыми при равномерно ограниченной снизу кривизне. Позже мы увидим, что такое явление (малый радиус выпуклости односвязного пространства) возможно только при $k > 0$.

9.1.4. Крайние случаи условий сравнения. Согласно определениям пространств кривизны $\leq k$, расстояния и углы в (достаточно малых) треугольниках должны удовлетворять некоторым неравенствам. В следующем предложении описано, что произойдет, если эти неравенства обращаются в равенства.

Предложение 9.1.19. *Рассмотрим треугольник Δabc в нормальной области пространства X кривизны $\leq k$ и его треугольник сравнения $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ на k -плоскости. Следующие четыре условия равносильны:*

(i) *Угол в вершине a треугольника Δabc равен углу в вершине \bar{a} треугольника $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.*

(ii) *Для некоторой точки $x \in [ac]$, $x \neq a, c$ имеет место равенство $|bx| = |\bar{b}\bar{x}|$, где точка $\bar{x} \in [\bar{a}\bar{c}]$ выбрана так, что $|ax| = |\bar{a}\bar{x}|$.*

(iii) *Все углы треугольника Δabc равны соответствующим углам треугольника $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.*

(iv) *Треугольник Δabc ограничивает вполне геодезическую поверхность, изометричную “заполненному” треугольнику $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ (т.е., области на k -плоскости, ограниченной треугольником $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$). Более формально: найдется сохраняющее расстояния отображение из “заполненного” треугольника $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ в X , которое переводит стороны треугольника $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ в соответствующие стороны треугольника Δabc .*

Доказательство. Пусть α, β, γ — углы в вершинах a, b, c треугольника Δabc , а $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ — соответствующие углы треугольника сравнения.

1. Очевидно, что из (iv) следуют (i)–(iii) и что из (iii) следует (i).

2. (i) \implies (ii). Предположим, что $\alpha = \bar{\alpha}$. Пусть x и \bar{x} — те же, что в формулировке предложения. Для треугольника Δabx и его треугольника сравнения $\Delta a_0b_0x_0$ мы имеем $\angle b_0a_0x_0 \geq \alpha = \angle \bar{b}\bar{a}\bar{x}$. Из равенств $|a_0x_0| = |\bar{a}\bar{x}|$ и $|b_0x_0| = |\bar{b}\bar{x}|$ следует, что $|bx| = |b_0x_0| \geq |\bar{b}\bar{x}|$. С другой стороны, наше ограничение на кривизну влечет, что $|bx| \leq |\bar{b}\bar{x}|$. Поэтому $|bx| = |\bar{b}\bar{x}|$.

3. (ii) \implies (iii). Предположим, что $|bx| = |\bar{b}\bar{x}|$ для некоторой точки $x \in [a, c] \setminus \{a, c\}$. Покажем сначала, что тогда для всех $y \in [a, c]$ имеет

место равенство $|by| = |\bar{b}\bar{y}|$. Так как $|bx| = |\bar{b}\bar{x}|$, то треугольники $\bar{b}\bar{x}\bar{a}$ и $\bar{b}\bar{x}\bar{c}$ являются треугольниками сравнения для Δbxa и Δbxc . Поэтому $\angle bxa \leq \angle \bar{b}\bar{x}\bar{a}$ и $\angle bxc \leq \angle \bar{b}\bar{x}\bar{c}$. С другой стороны, имеем $\angle bxa + \angle bxc \geq \angle axc = \pi$. В силу того, что $\angle \bar{b}\bar{x}\bar{a} + \angle \bar{b}\bar{x}\bar{c} = \pi$, имеем также $\angle bxa = \angle \bar{b}\bar{x}\bar{a}$ и $\angle bxc = \angle \bar{b}\bar{x}\bar{c}$. Таким образом, утверждение (i) имеет место для треугольников Δbxa и Δbxc . Но так как уже известно, что из (i) следует (ii), мы приходим к равенству $|by| = |\bar{b}\bar{y}|$ для всех $y \in [ax] \cup [cx]$.

Применяя формулу первой вариации (для $k = 0$ это теорема 4.5.6; обобщение на случай произвольного k тривиально) к расстояниям от b до точек геодезической $[ac]$, получим, что $\alpha = \bar{\alpha}$ и $\beta = \bar{\beta}$. Наконец, равенство $\gamma = \bar{\gamma}$ следует из импликации (i) \implies (ii) и уже доказанной части импликации (ii) \implies (iii).

4. Мы уже доказали эквивалентность утверждений (i)–(iii). Нам осталось проверить, что из них следует истинность утверждения (iv). Покажем, что искомая вполне геодезическая поверхность “заметается” семейством кратчайших, соединяющих b с точками $[ac]$.

Пусть $x, y \in [ac]$. Построим соответствующие точки \bar{x}, \bar{y} в $[\bar{a}\bar{c}]$. Мы предполагаем, что $y \in [x, c]$. Имеем

$$\bar{\beta} \geq \angle \bar{a}\bar{b}\bar{x} + \angle \bar{x}\bar{b}\bar{y} + \angle \bar{y}\bar{b}\bar{c} \geq \angle abx + \angle xby + \angle ybc \geq \beta = \bar{\beta}.$$

Откуда следует, что все эти неравенства суть равенства, в частности $\angle xby = \angle \bar{x}\bar{b}\bar{y}$. Таким образом, выполнение условий (i)–(iii) для треугольника Δxby означает, что расстояния между точками кратчайших $[bx]$ и $[by]$ совпадают с соответствующими расстояниями между точками отрезков $[\bar{b}\bar{x}]$ и $[\bar{b}\bar{y}]$ в k -плоскости. Отсюда следует, что объединение кратчайших $\{[bx]\}_{x \in [a,c]}$ и есть искомый “заполненный” треугольник, изометричный треугольнику $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. \square

Упражнение 9.1.20. Пусть треугольник Δ содержится в нормальной области пространства кривизны ≤ 0 . Обозначим через a, b и c длины сторон треугольника Δ , а через α, β, γ — соответствующие (противоположные этим сторонам) углы. Докажите следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &\leq \pi, \\ c^2 &\geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \\ c &\leq b \cos \alpha + a \cos \beta. \end{aligned}$$

Покажите, что при достижении равенства в любом из этих трех неравенств, для треугольника Δ выполняются все пункты только что доказанной теоремы.

Подсказка. Заметим, что эти неравенства превращаются в равенства для треугольника сравнения в \mathbb{R}^2 ; далее воспользуйтесь условием сравнения углов.

9.1.5. Теорема Решетняка о склеивании. [Resh] Следующая теорема представляет собой простой, но очень полезный инструмент для исследования пространств, склеенных из пространств ограниченной сверху кривизны. В частности, с ее помощью можно строить нетривиальные примеры пространств ограниченной сверху кривизны.

Теорема 9.1.21. (Теорема Решетняка о склеивании.) Пусть $\{(X_i, d_i)\}$, $i = 1, 2$ — полные локально-компактные пространства кривизны $\leq k$. Предположим, что найдутся выпуклые множества $C_i \in X_i$ и изометрия $f: C_1 \rightarrow C_2$.

Тогда полученное склеиванием этих пространств по изометрии f пространство (\mathbf{X}, d) является пространством кривизны $\leq k$.

Замечание 9.1.22. Повторяя конструкцию, приведенную в теореме, можно получить примеры, склеенные из более чем двух (или даже счетного множества) частей.

Доказательство. Для упрощения обозначений мы не будем различать пространства X_i и их образы в \mathbf{X} при естественной проекции. В частности, пусть $C \subset \mathbf{X}$ — общая проекция множеств C_i , $i = 1, 2$, в \mathbf{X} . Из выпуклости множества C следует совпадение на X_i метрик d и d_i , $i = 1, 2$. В частности, каждая точка $p \in \mathbf{X}$ имеет такую окрестность $U \subset \mathbf{X}$, что $U_i = U \cap X_i$ — нормальный шар в X_i . Рассмотрим тре-

PSfrag replacements

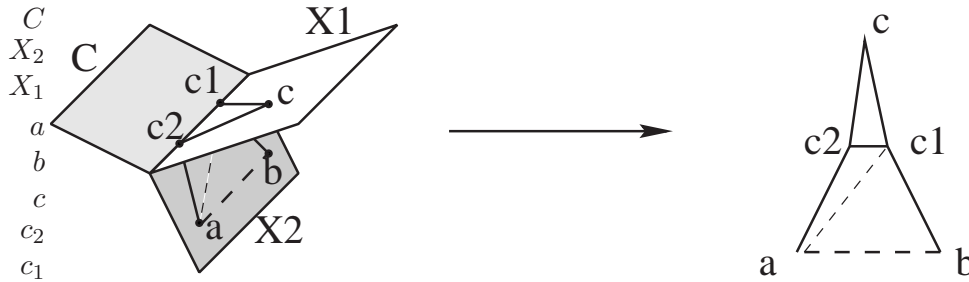


Рис. 9.1: Теорема Решетняка.

угольник $\Delta abc \subset U$. Можно предположить, что $a, b \in X_1$, $c \in X_2$. Найдутся точки c_1, c_2 , лежащие на содержащихся в C кратчайших $[ac]$ и $[bc]$, соответственно. Разобьем треугольник Δabc на три треугольника Δac_1c_2 , Δbac_2 и Δcc_1c_2 . Расположим их треугольники сравнения на плоскости “естественным” образом (см. рис. 9.1). Стандартное сравнение углов показывает, что углы в вершинах c_1 и c_2 многоугольника $\bar{a}\bar{c}_1\bar{c}\bar{c}_2\bar{b}$ вогнутые (т.е., не меньше, чем π). Грубо говоря, можно рассматривать этот многоугольник как треугольник $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, имеющий две “вогнутых стороны”:

$\bar{a}\bar{c}_1\bar{c}$ и $\bar{b}\bar{c}_2\bar{c}$. “Распрямляя” этот треугольник (сравните с леммой Александрова 4.3.3) мы видим, что углы треугольника Δabc не больше, чем соответствующие углы его треугольника сравнения. \square

9.1.6. Теорема Решетняка о мажоризации. [Resh]

Имеется еще одна важная теорема Решетняка. Она позволяет лучше понять природу пространств ограниченной сверху кривизны. Так как эта теорема не используется нами в дальнейшем, приведем ее без доказательства.

Теорема 9.1.23 (Теорема Решетняка о мажоризации). *Пусть замкнутая спрямляемая кривая γ содержится в нормальном шаре U пространства кривизны, не большей, чем k ; если $k > 0$, то мы дополнительно предполагаем, что $L(\gamma) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$.*

Тогда в k -плоскости существует такое замкнутое выпуклое множество Ω , ограниченное замкнутой кривой Γ , и такое нерастягивающее отображение $f: \Omega \rightarrow U$, что $f(\Gamma) = \gamma$ и ограничение $\tilde{f} = f|_{\Gamma}$ является отображением, сохраняющим длины.

Заметим, что обратное утверждение также верно: если утверждение теоремы выполняется для каждой (достаточно малой) замкнутой кривой γ в пространстве с внутренней метрикой M , то M — пространство кривизны не большей, чем k . Доказательство последнего утверждения несложно: достаточно применить утверждение к “треугольным” кривым.

9.1.7. Продолжимость геодезических. Напомним, что геодезической называется кривая, локально являющаяся кратчайшей. Мы предполагаем, что все геодезические параметризованы длиной дуги.

Определение 9.1.24. Геодезическая $\gamma: [0, a] \rightarrow X$ называется *продолжимой* за точку $\gamma(a)$, если γ является ограничением некоторой геодезической $\tilde{\gamma}: [0, b] \rightarrow X$, где $b > a$.

Вскоре мы увидим, что, грубо говоря, геодезическая в полном пространстве неположительной кривизны продолжима всегда, кроме тех случаев, когда ее конец “выглядит как граничная точка пространства”. Следующее простое утверждение поясняет, что мы под этим подразумеваем.

Предложение 9.1.25. *Пусть X — полное пространство неположительной кривизны. Если геодезическая $\gamma: [0, a] \rightarrow X$ не продолжима за точку $p = \gamma(a)$, то проколотый шар $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ стягиваем для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно: существует пространство, имеющее такую “граничную” точку (то есть, такую точку

p , что все малые шары $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ стягиваемы), что все геодезические, заканчивающиеся в этой точке, продолжимы.

Пример 9.1.26. Рассмотрим евклидов конус над прямой. Метрика конуса является локально евклидовой всюду, кроме вершины p . Каждый проколотый шар с центром в p стягиваем, так что p — (единственная) “граничная” точка конуса. Однако любая геодезическая, оканчивающаяся в p , очевидно продолжима за p .

Упражнение 9.1.27. 1. Докажите, что для гладкой поверхности в \mathbb{R}^3 точками границы являются в точности те точки, которые имеют стягиваемые проколотые окрестности.

2. Придумайте пример, показывающий, что это утверждение неверно для метрик неограниченной сверху кривизны.

Предложение 9.1.28. Пусть X — полное метрическое пространство, в котором каждая геодезическая продолжима за любую свою точку. Тогда каждая геодезическая γ является ограничением полной геодезической $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow X$, параметризованной длиной дуги.

Другими словами, каждая геодезическая продолжима в обе стороны “до бесконечности”. Заметим, что в этом утверждении не накладывается никаких ограничений на кривизну.

Доказательство. В действительности, этот факт — тривиальное следствие импликации $(i) \Rightarrow (iii)$ в теореме Хопфа–Ринова; напомним, что эта импликация не требует локальной компактности X . Действительно, пусть (a, b) — максимальный открытый интервал (возможно бесконечный), на который может быть продлена геодезическая γ . Мы хотим доказать, что $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Предположим, например, что $b < \infty$. Так как X полно, то γ может быть доопределена в точке b как раз в силу упомянутой выше импликации. По условию, γ продолжима за b , что противоречит максимальнойности b . \square

Определение 9.1.29. Если для пространства X выполнены условия предложения 9.1.28 (т.е., если пространство полно и все геодезические продолжимы), то будем говорить, что X геодезически полно.

Так как каждая содержащаяся в нормальном шаре геодезическая является кратчайшей, (смотрите предложение 9.1.17), то имеет место

Следствие 9.1.30. Пусть X — геодезически полное пространство ограниченной сверху кривизны. Тогда для каждой точки $p \in X$ найдется такое число $r > 0$, что все геодезические, начинающиеся в p , могут быть продолжены до границы шара $B_r(p)$.

Пример 9.1.31. Рассмотрим круг $x^2 + y^2 < 1$ в \mathbb{R}^2 и добавим к нему точку $(1, 0)$. Это — “плоское” пространство и точка $(1, 0)$ — единственная точка, в которой утверждение следствия не выполняется.

Пример 9.1.32. Рассмотрим букет дизъюнктивных отрезков $[0, 1/i]$, $i = 1, 2, \dots$, приклеенных к точке 0 . Это — компактное пространство неположительной кривизны. Множество точек, за которые геодезические не продолжимы, совпадает со множеством концов отрезков. Несмотря на то, что все геодезические, приходящие в точку 0 , продолжимы за нее, точка 0 не имеет шаровой окрестности, упомянутой в приведенном выше следствии.

9.1.8. Пространство направлений и касательный конус. Пространство направлений. Пусть X — полное локально компактное метрическое пространство, $p \in X$. Напомним (смотрите раздел 3.6.6), что пространством направлений в точке p называется пополнение метрического пространства Σ'_p , точки которого являются классами эквивалентности кратчайших, начинающихся в p , а расстояние между двумя классами — это угол между соответствующими кратчайшими. Это пространство обозначается Σ_p . В случае пространств кривизны, ограниченной сверху (или снизу), углы между кратчайшими всегда существуют, поэтому пространство направлений определено корректно.

Замечание 9.1.33. Даже если пространство X геодезически полно, может случиться, что Σ'_p не является полным, т.е. некоторые элементы из Σ_p не соответствуют никаким кратчайшим. (Ввиду следствия 9.1.30 это кажется удивительным.)

Например, рассмотрим (открытую!) полуплоскость $\{(x, y) : y > 0\}$ с добавленным к ней лучом $\{(0, y) : y \leq 0\}$. Сделаем разрезы вдоль лучей $\{(x, y) : kx \geq 1, y = \frac{x}{k}\}$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и вклеим по копии первого квадранта $\{(x, y) : x, y \geq 0\}$ в каждый разрез.

Полученное пространство гомеоморфно полуплоскости с добавленным лучом и является геодезически полным (что неверно как для обычной полуплоскости, так и для исходной полуплоскости с добавленным лучом). Пространство направлений в $(0, 0)$ состоит из точки (соответствующей вертикальному лучу) и интервала длины π . Концы последнего не представляются геодезическими.

Упражнение 9.1.34. Докажите приведенные выше утверждения.

Однако, если пространство X геодезически полно и локально компактно, то Σ_p компактно для всех $p \in X$.

Упражнение 9.1.35. Докажите это.

Подсказка. Примените следствие 9.1.30.

Даже если X локально-компактно и полно (наши обычные упрощающие предположения), пространство направлений Σ_p может быть некомпактным.

Пример 9.1.36. Букет отрезков, рассмотренный в 9.1.32 является компактным пространством неположительной кривизны. Его пространство направлений в точке 0 некомпактно — это счетное дискретное пространство с расстоянием π между различными точками.

Пример 9.1.37. Это пример пространства ограниченной *снизу* кривизны (он относится скорее к следующей главе 10). Рассмотрим прямое произведение счетного множества сфер радиусов $1/i$ ($i = 1, 2, \dots$). (Упражнение: дайте определение такого произведения и докажите, что это — компактное пространство неотрицательной кривизны.)

Его пространство направлений в каждой точке не является локально-компактным, оно представляет собой произведение бесконечного числа копий окружности S^1 (упражнение: сформулируйте и докажите это).

Заметим, что Σ_p не всегда связно. Простейшим примером является прямая \mathbb{R} : ее пространство направлений в любой точке — двухточечное множество с расстоянием π между точками. Нам понадобится следующее определение.

Определение 9.1.38. Если каждая точка p метрического пространства (X, d) имеет такую окрестность $U(p)$, что пространство $(U(p), d|_{U(p)})$ является пространством с внутренней метрикой, метрика d называется *локально внутренней*.

Исходная (угловая) метрика пространства направлений Σ_p не обязательно внутренняя. Одна из причин этого состоит в том, что углы никогда не превосходят π , тогда как кратчайшие в пространстве направлений могут быть длиннее, чем π . Например, рассмотрим конус с полным углом 4π вокруг вершины. Его пространством направлений в вершине служит окружность длины 4π , тогда как все расстояния (углы) не превосходят π .

Мы будем снабжать пространства направлений не только исходной (угловой) метрикой, но и индуцированной ею внутренней метрикой.

Как обычно, внутренние расстояния могут быть бесконечными. Это происходит, например, если Σ_p состоит из более чем одной компоненты. Позже мы увидим, что (в “хороших случаях”) несвязность является единственной причиной, по которой внутренняя метрика может принимать бесконечные значения.

Лемма 9.1.39. *В любой точке p полного локально компактного пространства ограниченной сверху кривизны угловая метрика пространства Σ_p является локально-внутренней.*

Точнее, для каждой точки $a_0 \in \Sigma_p$ и любого положительного числа $r < \pi/2$, ограничение угловой метрики на шар $B_r(a_0)$ является внутренней метрикой.

Доказательство. Согласно теореме 2.4.16, достаточно доказать, что для любых двух точек $a, b \in B_r(a_0)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется ε -середина между a и b . Напомним, что Σ_p — это пополнение своего подмножества Σ'_p , состоящего из точек, представимых кратчайшими. Без потери общности мы можем предполагать, что точки a и b принадлежат Σ'_p , то есть представляются некоторыми кратчайшими α и β , где $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем точки $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ настолько близко к p , что $0 \leq \angle \bar{x}\bar{p}\bar{y} - \angle xpy \leq \varepsilon$, где $\angle \bar{x}\bar{p}\bar{y}$ — угол в треугольнике сравнения $\Delta \bar{x}\bar{p}\bar{y}$. Пусть z — середина между точками x и y . Наши условия гарантируют, что $d(a, b) < \pi$, где d — расстояние в Σ'_p . Поэтому $z \neq p$, если ε достаточно мало. Расположим треугольники сравнения $\Delta \bar{x}\bar{p}\bar{z}$ и $\Delta \bar{y}\bar{p}\bar{z}$ на k -плоскости по разные стороны от прямой $\bar{p}\bar{z}$ и, как обычно, сравним получившийся четырехугольник с треугольником сравнения для Δxpy . Так как $|\bar{x}\bar{y}| \leq |x, y|$, то мы имеем $\angle \bar{x}\bar{p}\bar{z} + \angle \bar{y}\bar{p}\bar{z} \leq \angle xpy + \varepsilon$. Вместе с очевидным равенством $\angle \bar{x}\bar{p}\bar{z} = \angle \bar{y}\bar{p}\bar{z}$ это дает

$$\angle xpz \leq \angle \bar{x}\bar{p}\bar{z} \leq \frac{1}{2}(\angle xpy + 2\varepsilon) \quad \text{и} \quad \angle xpz \leq \angle \bar{y}\bar{p}\bar{z} \leq \frac{1}{2}(\angle xpy + 2\varepsilon),$$

если только точки x и y достаточно близки к p .

Рассмотрим точку $c \in \Sigma'_p$, представленную кратчайшей pz . Последние два неравенства могут быть переписаны так:

$$d(a, c) \leq \frac{1}{2}(d(a, b) + 2\varepsilon), \quad d(b, c) \leq \frac{1}{2}(d(a, b) + 2\varepsilon).$$

По неравенству треугольника для углов имеем

$$d(a, c) + d(b, c) \geq d(a, b) - \varepsilon.$$

Из последних трех неравенств немедленно следует, что

$$|d(a, c) - \frac{1}{2}d(a, b)| \leq 2\varepsilon \quad \text{и} \quad |d(b, c) - \frac{1}{2}d(a, b)| \leq 2\varepsilon.$$

Таким образом, ε -середина существует для произвольного ε , поэтому метрика на Σ'_p является локально внутренней. \square

Касательный конус. Через K_p мы обозначим конус над пространством направлений Σ_p (см. раздел 3.6.2, где дано определение конуса над пространством с внутренней метрикой). Каждая точка $w \in K_p$, кроме вершины o конуса, представлена парой (ξ, r) , где $\xi \in \Sigma_p$ и $r = |ow|$. Конус K_p называется *касательным конусом* в точке p . Очевидно, что для гладкой поверхности в \mathbb{R}^3 все касательные конуса являются плоскостями.

Замечание 9.1.40. Имеется другой подход к понятию касательного конуса, а именно, можно определить так называемый касательный конус по Громову–Хаусдорфу, который уже упоминался в разделе 8.2. Он определен как предел по Громову–Хаусдорфу пространств с отмеченной точкой $(\lambda X, p)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. (Грубо говоря, мы “раздуваем” наше метрическое пространство X из отмеченной точки $p \in X$ и называем касательным конусом предельное пространство.) Часто (но не всегда!) эти два определения равносильны. Одним из препятствий к этому является возможное отсутствие компактности пространства направлений, с которой связаны все трудности, относящиеся к сходимости по Громову–Хаусдорфу не локально компактных пространств. Более того, предел в определении касательного конуса по Громову–Хаусдорфу может не существовать даже если пространство направлений компактно.

Пример 9.1.41. Приклеим к каждой точке вида $1/k$, $k \in \mathbb{N}$ луча $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ отрезок длины $1/k$. Пространство направлений в 0 полученного таким образом пространства является точкой, поэтому соответствующий касательный конус является лучом. С другой стороны, в этом примере касательный конус по Громову–Хаусдорфу не существует.

Видоизменим предыдущий пример: приклеим отрезок длины x к каждой точке луча \mathbb{R}^+ . Построенное так пространство Y является (не локально компактным) пространством неположительной кривизны. Пространство направлений в точке 0 пространства Y все еще является точкой. В то же время касательный конус по Громову–Хаусдорфу в 0 теперь существует (в смысле определения 8.2.1) и изометричен пространству Y , но он не является конусом ни над каким метрическим пространством.

Замечание 9.1.42. Вообще говоря, малая окрестность точки в пространстве ограниченной сверху кривизны может иметь гораздо более сложное строение, чем касательный конус. Грубо говоря, пространство направлений (и касательный конус) зачастую несут намного меньше информации, чем малая окрестность точки. В противоположность этому, в пространствах ограниченной снизу кривизны касательный конус очень похож (по меньшей мере гомеоморфен) на достаточно малый метрический шар с центром в данной точке. Поэтому понятие касательного конуса (определенного либо с помощью пространства направлений, либо по Громову–Хаусдорфу) более важно для пространств ограниченной снизу кривизны.

Зафиксируем точку p в пространстве X ограниченной сверху кривизны и нормальную окрестность $U = B_r(p)$ точки p . Определим два отображения: логарифмическое \log_p и экспоненциальное \exp_p . Отображение \log_p действует из U в касательный конус в точке p . Пусть $x \in U$. Соединим точки p и x (единственной) кратчайшей $[px]$ и пусть $\log_p x = (\xi, r) \in K_p$,

где ξ — направление кратчайшей $[px]$, а $r = |px|$. Легко доказать, что \log_p непрерывно. Мы хотели бы определить \exp_p как $(\log_p)^{-1}$. Однако, отображение \log_p может не быть инъективным. Поэтому возьмем в качестве $\exp_p(x)$ какую-нибудь точку множества \log_p^{-1} . Даже в малой окрестности V вершины $O \in K_p$ отображение \exp_p может быть определено не всюду. Однако множество, где \exp_p определено, плотно в V , если V достаточно мало (докажите!).

Если кривизна пространства X неположительна, то отображение \log_p — нерастягивающее. Если же X — пространство кривизны, не превосходящей числа $k > 0$, то \log_p — липшицево отображение с константой $1 + \delta$, где δ стремится к нулю вместе с диаметром окрестности.

Замечание 9.1.43. Предположим, касательный конус K_p корректно определен в точке $p \in X$ пространства X с внутренней метрикой (не обязательно ограниченной кривизны). Тогда мы можем определить отображения \log_p и \exp_p почти так же, как выше. Однако в данном случае имеется существенное отличие: точка p не имеет нормальной окрестности, что влечет возможную неединственность кратчайшей, соединяющей точки p и x . Чтобы определить \log_p , выберем *какую-нибудь* кратчайшую. Конечно, построенное так отображение может не быть непрерывным (только в точках, связанных с p двумя или большим числом кратчайших, имеющими разные направления в p). Тем не менее, мы все еще можем определить $\exp_p = (\log_p)^{-1}$. В случае, если пространство X имеет ограниченную снизу кривизну, \exp_p непрерывно и даже липшицево (как \log_p в случае кривизны, ограниченной сверху).

Теорема 9.1.44. *Если X — полное локально компактное пространство ограниченной сверху кривизны и $p \in X$, то касательный конус K_p является пространством с внутренней метрикой неположительной кривизны.*

Доказательство. Идея доказательства очень проста. Возьмем треугольник в K_p и рассмотрим достаточно малый гомотетичный ему треугольник (при гомотетии с центром в вершине конуса). Отображение \exp_p позволяет сопоставить некоторый треугольник в X каждому маленькому треугольнику в K_p . Эти треугольники имеют почти равные длины соответствующих сторон (с точностью до первого порядка), поэтому условия на кривизну наследуются треугольником в K_p от треугольника в X .

Проясним детали. Для начала предположим, что K_p локально компактно и что каждая точка из K_p представлена кратчайшей. Пусть $\Delta a_1 a_2 a_3$ — треугольник в K_p , а a_4 — середина стороны $[a_1 a_3]$. Через γ_i обозначим кратчайшие, представляющие точки a_i , $i = 1, 2, 3, 4$, а через a_i^λ — точку

на кратчайшей γ_i , удовлетворяющую условию $|pa_i^\lambda| = \lambda|Oa_i|$. Здесь O — вершина конуса K_p , а λ — малое положительное число. По определению угловой метрики и метрики на конусе мы имеем $\lambda^{-1}|a_i^\lambda a_j^\lambda| \sim |a_j a_i|$ при $\lambda \rightarrow 0$ (в том смысле, что отношение двух величин стремится к единице). Для малого λ рассмотрим треугольник сравнения Δ_λ на k -плоскости для треугольника $\Delta a_1^\lambda a_2^\lambda a_3^\lambda$ и гомотетичный ему треугольник $\lambda\Delta_\lambda$. Стороны последнего сходятся к сторонам треугольника $\Delta a_1 a_2 a_3$ и лежат в $\lambda^{-1}k$ -плоскости (кривизна которой стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$). Таким образом, условие сравнения треугольников, примененное к треугольнику $\Delta a_1^\lambda a_2^\lambda a_3^\lambda$ и подходящей (близкой к a_4^λ) точке на $[a_1^\lambda a_3^\lambda]$ переходят в пределе ($\lambda \rightarrow 0$) в такое же соотношение (но с кривизной, ограниченной нулем!) для $\Delta a_1 a_2 a_3$ и a_4 .

Это доказывает теорему в сделанных нами предположениях.

Чтобы получить доказательство в общем случае, надо использовать “обобщенное” определение 9.1.2. Доказательство проводится аналогично, за исключением того, что a_4 уже не обязательно середина (которой может и не быть), а некоторая ε -середина, и каждая точка a_i должна быть заменена достаточно близкой точкой, представленной кратчайшей. \square

Из данной теоремы, вместе с теоремой 4.7.1 о конусах над пространствами с внутренней метрикой, вытекает такое

Следствие 9.1.45. *В условиях теоремы 9.1.44 пространство направлений Σ_p в каждой точке $p \in X$ является пространством кривизны ≤ 1 .*

Теперь рассмотрим случай геодезически полных пространств (смотрите определение 9.1.29). Такие пространства обладают дополнительными замечательными свойствами.

Предложение 9.1.46. *Пусть X — геодезически полное локально компактное пространство с внутренней метрикой ограниченной сверху кривизны. Тогда в каждой его точке пространство направлений компактно.*

Доказательство. В нормальной окрестности $B_r(p)$ точки $p \in X$ рассмотрим сферу $S_r(p)$, $0 < r < r'$. Кратчайшие, соединяющие центр p с точками сферы $S_r(p)$, заполняют шар $B_r(p)$ и каждая геодезическая с началом в p может быть продолжена до пересечения с $S_r(p)$. Все такие геодезические являются кратчайшими в $B_r(p)$.

Образование, сопоставляющее каждой точке $x \in S_r(p)$ направление в p единственной кратчайшей $[px]$, непрерывно, а сфера $S_r(p)$ компактна. Поэтому образ этой сферы (это в точности пространство Σ'_p) также компактен. \square

Упражнение 9.1.47. Докажите, что ни одно из условий теоремы не может быть опущено.

Теорема 9.1.48. В каждой точке p геодезически полного локально компактного пространства X ограниченной сверху кривизны касательный конус по Громову–Хаусдорфу существует и совпадает с касательным конусом K_p .

Доказательство. Для простоты предположим, что X является пространством неположительной кривизны. Это позволит нам иметь дело с нестягивающим отображением вместо более неудобного отображения с константой Липшица $1 + \delta$.

Возьмем два положительных числа R и ε . согласно предложению 7.4.12 в $B_R(O) \subset K_p$ найдется такая ε -сеть, которая является равномерным (или липшицевым, что в данном случае то же самое) пределом ε -сетей в шарах $B_R^\lambda(p) \subset (\lambda X, p)$, где $\lambda \rightarrow \infty$. Выберем замкнутый шар $\bar{B}_r(p)$ в нормальной окрестности точки p . По теореме Хопфа–Ринова 2.5.28 этот шар компактен, поэтому для любого $\delta > 0$ существует конечная δ -сеть в $\bar{B}_r(p)$. Через N_0 обозначим конечную $\frac{r}{R}\varepsilon$ -сеть в $\bar{B}_r(p)$. Теперь построим εp -сети N и N_λ в $B_R^\lambda(p)$ и $B_R(0)$, соответственно, положив $N = \frac{R}{r} \log_p(N_0)$, где $\frac{R}{r}$ означает гомотетию в K_p .

Для любого t , $0 < t \leq 1$ рассмотрим отображение h_t , сопоставляющее точке $x \in \bar{B}_r(p)$ такую точку $h_t(x)$ на кратчайшей $[xp]$, что $|h_t(x)p| = t|xp|$. Отображение $h_t : \bar{B}_r(p) \rightarrow \bar{B}_{tr}$ не увеличивает длин и сюръективно (проверьте). Положим $N_\lambda = \lambda \circ h_t(N_0)$, где $\lambda \circ$ означает изменение масштаба и $t = \frac{R}{\lambda r}$. Для фиксированных R, λ рассмотрим отображение

$$\Phi_\lambda = \lambda \circ \log_p \circ \frac{1}{\lambda} : B_R^\lambda(p) \rightarrow B_R(0),$$

где $\lambda : (X, p) \mapsto (\lambda X, p)$ и $\frac{1}{\lambda} : (\lambda X, p) \mapsto (X, p)$ — изменяющие масштаб отображения. Это отображение не увеличивает расстояния и переводит N_λ в N . Таким образом, единственное, что нам осталось,— это оценить изменение расстояния между точками из N_λ при отображении Φ_λ . Множество N_0 конечно, поэтому для любого $\nu > 0$ найдется такое число Λ , что $\lambda > \Lambda$ и $a, b \in N_\lambda$. При этом угол $\angle \bar{a}\bar{p}\bar{b}$ треугольника сравнения для Δarp не больше, чем $\angle arp + \nu$ (гомотетия не изменяет углы).

Для $a, b \in N_\lambda$ положим $\tilde{a} = \Phi_\lambda(a)$, $\tilde{b} = \Phi_\lambda(b)$. Треугольник сравнения $\tilde{\Delta} rab$ и треугольник $\Delta O\tilde{a}\tilde{b}$ имеют равные боковые стороны: $|\tilde{p}\tilde{a}| = |O\tilde{a}|$, $|\tilde{p}\tilde{b}| = |O\tilde{b}|$, и $\angle \bar{a}\bar{p}\bar{b} \geq \angle \tilde{a}O\tilde{b} - \nu$, где $\nu \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Этим доказано, что $|ab| - |\tilde{a}\tilde{b}| \rightarrow 0$ равномерно для всех пар $(a, b) \in N_\lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty$. \square

9.2. Пространства Адамара

Вообще говоря, о глобальных свойствах пространств кривизны $\leq k$ известно немного. Большинство доказанных утверждений относительно таких пространств являются локальными. Однако, предположение о неположительности числа k позволяет получить сильные результаты, описывающие строение таких пространств. В частности, если пространство кривизны не превосходящей $k \leq 0$, полно и односвязно, оно наследует много хороших свойств евклидова пространства, а если $k < 0$, то — гиперболического.

Определение 9.2.1. Полное односвязное пространство неположительной кривизны называется *пространством Адамара*.

Важным источником примеров пространств Адамара служит конструкция универсального накрывающего (смотрите раздел 3.4.2, в котором обсуждаются накрытия). Рассмотрим полное пространство X неположительной кривизны (не обязательно односвязное). Напомним (смотрите замечание 9.1.18), что такое пространство локально односвязно и поэтому имеет универсальное накрывающее; т.е. существует односвязное топологическое пространство \tilde{X} (так называемое универсальное накрывающее пространство) и отображение накрытия $f: \tilde{X} \rightarrow X$.

Метрика пространства X (канонически) поднимается на \tilde{X} так, что отображение накрытия является локальной изометрией. В силу того, что знак кривизны есть локальное свойство, а f — локальная изометрия, накрывающее \tilde{X} является пространством неположительной кривизны одновременно с пространством X . Наконец, накрывающее пространство полного пространства также полно (ср. с упражнением 3.4.8), поэтому \tilde{X} является пространством Адамара. Как пространство Адамара, \tilde{X} обладает многими замечательными свойствами, что позволяет нам получать информацию об исходном пространстве X . Этот раздел и раздел 9.3 содержит большое количество утверждений, доказанных именно на этом пути.

9.2.1. Теорема Картана–Адамара. У нас уже появлялись примеры, показывающие, что в пространствах ограниченной сверху кривизны условие сравнения треугольников (или другие, ему эквивалентные) могут не выполняться для больших треугольников (или циркулей). Анализируя эти примеры, можно заметить, что пространства в них содержат геодезические “двуугольники”, т.е. пары геодезических (даже кратчайших), соединяющих две точки. Позже мы покажем, что из отсутствия таких “двуугольников” (т.е. при условии, что любые две точки соединимы единственной геодезической) следует справедливость

условия сравнения треугольников (шарниров, углов) “в целом” (теорема 9.2.9).

Как можно проверить, что геодезические единственны? Вообще говоря, это трудная задача, но для пространств неположительной кривизны ответ прост и дается следующей фундаментальной “обобщенной теоремой Картана–Адамара”:

Теорема 9.2.2. *Любые две точки пространства Адамара соединимы единственной геодезической. Кроме того, каждый геодезический отрезок в пространстве Адамара является кратчайшей.*

Эта теорема была доказана Э. Картаном для римановых многообразий, М. Громовым для локально-компактных пространств Адамара, и Д. Бишопом и С. Александер в общем случае (см. [АВ]).

Здесь мы докажем эту теорему только для локально-компактных пространств Адамара. Заметим, что в этом случае кратчайшая, соединяющая две точки, заведомо существует. Поэтому достаточно доказать ее единственность. Доказательство для общего случая см. в [АВ] и [ВН].

Мы предварим доказательство теоремы двумя леммами о геодезических в пространствах неположительной кривизны. Ниже предполагается, что все геодезические параметризованы пропорционально длине дуги).

Лемма 9.2.3. *Рассмотрим геодезические α и β , параметризованные одним и тем же интервалом и содержащиеся в некотором нормальном шаре пространства неположительной кривизны. Тогда расстояние $d(\alpha(t), \beta(t))$ является выпуклой функцией переменной t .*

Доказательство. Обозначим $d(\alpha(t), \beta(t))$ через $\delta(t)$. Так как эта функция непрерывна, достаточно доказать, что

$$\delta\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{\delta(t_1) + \delta(t_2)}{2}$$

для любых t_1, t_2 . Используем следующее очевидное свойство пространств неположительной кривизны.

Для треугольника Δabc в таком пространстве и середин b', c' его сторон ab и ac , соответственно, справедливо неравенство $|b'c'| \leq |\bar{b}'\bar{c}'|$, где \bar{b}', \bar{c}' — середины соответствующих сторон треугольника сравнения $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Пусть теперь $t = (t_1 + t_2)/2$. Напомним, что каждый геодезический отрезок в нормальном шаре является кратчайшей. Пусть p — середина между $\alpha(t_1)$ и $\beta(t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta(t) &= |\alpha(t)\beta(t)| \leq |\alpha(t)p| + |p\beta(t)| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(|\alpha(t_1)\beta(t_1)| + |\alpha(t_2)\beta(t_2)| \right) = \frac{1}{2} (\delta(t_1) + \delta(t_2)), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы. \square

Следующая лемма говорит о том, что для геодезического отрезка γ , соединяющего точки p и q и любой точки q' , близкой к q , существует единственная геодезическая, соединяющая p и q' и лежащая близко к γ . Заметим, что могут быть и другие геодезические, связывающие p и q' , но проходящие “далеко” от γ ; кроме того, построенная геодезическая может не быть кратчайшей, даже если γ — кратчайшая. Читатель, знакомый с римановой геометрией, может заметить, что данная лемма является аналогом утверждения о том, на геодезической в римановом многообразии неположительной кривизны нет сопряженных точек.

Лемма 9.2.4. *Рассмотрим геодезическую $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ с концами $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$ в полном локально компактном пространстве X неположительной кривизны. Предположим, что число $r > 0$ настолько мало, что радиус выпуклости множества $\gamma([0, 1])$ (см. определение в параграфе 9.1.3) больше, чем $10r$.*

Тогда для любой точки $q' \in B_r(q)$ существует и единственна такая геодезическая $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, что $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q'$ и расстояние между γ и α в равномерной метрике меньше, чем r , т.е. $|\gamma(t) - \alpha(t)| < r$ для всех t .

Замечание 9.2.5. Легко видеть, что геодезическая α непрерывно зависит от q' (докажите).

Идея доказательства проста. Рассмотрим класс “ломаных” (кривых, составленных из кратчайших) с заданным числом вершин, соединяющих p и q' и лежащих в некоторой окрестности геодезической γ . Мы покажем, что ломаная минимальной длины в этом классе и есть искомая геодезическая.

Доказательство. 1. Разделим γ на участки равной длины точками $p_0 = p$, $p_1 = \gamma(1/N)$, $p_2 = \gamma(2/N)$, \dots , $p_N = q$, где N настолько велико, что длина каждого интервала меньше, чем r . Рассмотрим класс \mathbf{M} (геодезических) ломаных $a_0 a_1 a_2 \dots a_N$, удовлетворяющих условиям $a_0 = p$, $a_N = q'$ и $|a_i p_i| \leq r$ при всех i . (Под ломаной $a_0 a_1 a_2 \dots a_N$ мы понимаем линейный граф, составленный из кратчайших $[a_i a_{i+1}]$, так, что начало следующей кратчайшей приклеено к концу предыдущей. При этом каждое из звеньев параметризовано соответствующим интервалом $[i/N, (i+1)/N]$ пропорционально длине.) Так как пространство X локально компактно, множество допустимых последовательностей (a_0, a_1, \dots, a_N) компактно. Поэтому существует ломаная $\alpha = a_0 a_1 \dots a_N$, минимизирующая длину (т.е., сумму $\sum_i |a_i a_{i+1}|$) в классе \mathbf{M} .

2. Мы покажем, что α является геодезической; более того, каждая пара соседних отрезков $[a_{i-1} a_i]$ и $[a_i a_{i+1}]$ образуют кратчайшую. Предположим

противное, т.е. что $|a_{i-1}a_i| + |a_i a_{i+1}| > |a_{i-1}a_{i+1}|$ для некоторого i . Обозначим через a'_i середину кратчайшей $[a_{i-1}a_{i+1}]$. Заменяя a_i на a'_i мы получим новую ломаную, которая короче, чем α . Поэтому мы получим противоречие, если покажем, что новая ломаная принадлежит классу \mathbf{M} , т.е. что $|a'_i p_i| \leq r$. Применим лемму 9.2.3 к интервалу $[p_{i-1}p_{i+1}]$ геодезической α и кратчайшей $[a_{i-1}a_{i+1}]$. Так как p_i и a'_i — середины этих интервалов, мы видим, что $2|a'_i p_i| \leq |a_{i-1}p_{i-1}| + |a_{i+1}p_{i+1}| \leq r + r = 2r$. Поэтому новая (укороченная) ломаная принадлежит \mathbf{M} . Это противоречие показывает, что ломаная α является геодезической (с точностью до перепараметризации). Кроме того, так как расстояние $|\alpha(t)\gamma(t)|$ является выпуклой функцией на каждом интервале $[i/N, (i+1)/N]$ (по лемме 9.2.3), мы имеем $|\alpha(t)\gamma(t)| \leq \max_i |a_i p_i| \leq r$.

3. Однако скорость геодезической α не обязательно постоянна (за исключением того случая, когда все расстояния $|a_i a_{i+1}|$ одинаковы). Мы покажем, что α может быть так перепараметризована пропорционально длине дуги, что после этого будет по-прежнему r -близка к γ (в C^0 метрике). На предыдущем шаге было показано, что при замене вершин a_i на середины между a_{i-1} и a_{i+1} (для всех i) расстояние между нашей (перепараметризованной) ломаной и γ не увеличивается. Легко видеть, что с помощью таких замен можно получить последовательность перепараметризаций линии α , сходящуюся к параметризации с постоянной скоростью.

Более формальные аргументы приведены в замечании после доказательства.

4. Нам осталось доказать единственность геодезической α . Предположим, что найдется другая геодезическая $\beta : [0, 1] \rightarrow X$, соединяющая точки p и q' и проходящая в r -окрестности линии γ . В этом случае расстояние между α и β (в равномерной метрике) будет меньше, чем $2r$; поэтому для всех $t \in [0, 1]$ обе точки, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, принадлежат некоторому нормальному шару. Согласно лемме 9.2.3 это значит, что функция $t \mapsto |\alpha(t)\beta(t)|$ выпукла и не имеет локальных максимумов на интервале $(0, 1)$. С другой стороны, эта функция обращается в ноль в 0 и 1, поэтому она тождественно равна нулю на $[0, 1]$. Это значит, что геодезические α и β совпадают. \square

Замечание 9.2.6. Шаги 2 и 3 доказательства могут быть обоснованы с помощью других аргументов. Эти аргументы проще приведенных выше, но выглядят “менее естественными”.

Минимизируем в классе \mathbf{M} суммы $\sum_i |a_i a_{i+1}|^2$ *квадратов* длин звеньев ломаной. (Читатель, знакомый с вариационной теорией геодезических на римановом многообразии, наверное уже догадался, что выбор квадратов длин вместо самих длин подсказан теми преимуществами, которые дает рассмотрение энергии пути вместо его длины.)

Та же самая конструкция средин (замены a_i на a'_i) показывает, что минимизирующая ломаная $a_0 a_1 \dots a_N$ параметризована с постоянной скоростью. Действительно,

$$\begin{aligned} |a_{i-1}a_i|^2 + |a_i a_{i+1}|^2 &\geq 2 \left(\frac{|a_{i-1}a_i| + |a_i a_{i+1}|}{2} \right)^2 \\ &\geq 2 \left(\frac{|a_{i-1}a_{i+1}|}{2} \right)^2 = |a_{i-1}a'_i|^2 + |a'_i a_{i+1}|^2. \end{aligned}$$

Здесь равенство достигается только если $|a_{i-1}a_i| = |a_i a_{i+1}| = \frac{1}{2}|a_{i-1}a_{i+1}|$, т.е. если a_i — середина между a_{i-1} и a_{i+1} . Но для минимизирующей ломаной $a_0 a_1 \dots a_N$ такое равенство соблюдается при всех i ; поэтому мы сразу получили геодезическую, параметризованную пропорционально длине.

Лемма 9.2.4 может быть интерпретирована следующим образом. Рассмотрим пространство X_p , состоящее из начинающихся в p геодезических, параметризованных интервалом $[0, 1]$ (напомним, что если не оговорено иное, геодезические всегда считаются параметризованными пропорционально длине дуги). Топология этого пространства определяется равномерной (т.е. C^0) метрикой в пространстве кривых. Согласно лемме 9.2.4, точки шара $B_r(p)$ при достаточно малых $r > 0$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с r -окрестностью геодезической γ в пространстве геодезических. Это соответствие задается “экспоненциальным” отображением $\widetilde{\text{exr}}_p$, которое сопоставляет каждой геодезической ее конечную точку, так что $\widetilde{\text{exr}}_p(\alpha) = \alpha(1)$. Очевидно, что это отображение непрерывно. Учитывая, что пространство X локально компактно, мы видим, что $\widetilde{\text{exr}}_p$ — локальный гомеоморфизм.

Замечание 9.2.7. Пространство X_p может отличаться от касательного конуса K_p , поэтому $\widetilde{\text{exr}}_p$ может отличаться от экспоненциального отображения exr_p , определенного в 9.1.8. Они заведомо различны, если найдутся две геодезические, исходящие из p в одном направлении, и ни одна из них не является частью другой.

Вернемся к доказательству теоремы 9.2.2.

Доказательство теоремы 9.2.2. Зафиксируем точку p в пространстве Адамара X и рассмотрим пространство X_p геодезических, исходящих из p , и отображение $\widetilde{\text{exr}}_p : X_p \rightarrow X$, сопоставляющее каждой геодезической ее конечную точку (см. выше). По лемме 9.2.4 $\widetilde{\text{exr}}_p$ является локальным гомеоморфизмом. Поднимая (локально) метрику с X на X_p , мы можем снабдить X_p такой внутренней метрикой, что $\widetilde{\text{exr}}_p$ будет локальной изометрией. Покажем, что $\widetilde{\text{exr}}_p$ — накрывающее отображение. Отсюда будет следовать утверждение теоремы. Действительно, так как X односвязно,

то накрывающее отображение $\widetilde{\text{exp}}_p$ является гомеоморфизмом; поэтому для любой точки $q \in X$ прообраз $\widetilde{\text{exp}}_p^{-1}(q)$ состоит в точности из одной геодезической. Другими словами, существует единственная геодезическая, соединяющая p и q .

Для того чтобы доказать, что $\widetilde{\text{exp}}_p$ — накрывающее отображение, мы используем критерий, который нам дает теорема 3.4.18: локальная изометрия из полного пространства с внутренней метрикой на “достаточно хорошее” пространство с внутренней метрикой (более точно, на пространство с единственностью кратчайших) является накрывающим отображением. Так как X — пространство неположительной кривизны, оно “достаточно хорошее” в упомянутом смысле. Поэтому нам осталось доказать, что пространство X_p (с внутренней метрикой, поднятой из X) полно.

Согласно теореме Хопфа–Ринова 2.5.28, достаточно доказать, что, для некоторого элемента $P \in X_p$, любая геодезическая $\Gamma : [0, 1) \rightarrow X_p$ (с постоянной скоростью), исходящая из P , может быть продолжена на замкнутый интервал $[0, 1]$.

Пусть P — постоянная (т.е. с нулевой скоростью) геодезическая, остающаяся в p . Тогда каждая геодезическая $\gamma : [0, 1) \rightarrow X$ с $\gamma(0) = p$ имеет единственный подъем $\Gamma : [0, 1) \rightarrow X_p$, для которого $\Gamma(0) = P$. (Слово подъем означает, что $\gamma = \widetilde{\text{exp}}_p \circ \Gamma$.) Подъем Γ определяется естественным образом: для каждого $t \in [0, 1)$ точка $\Gamma(t)$ в пространстве геодезических есть (непараметризованное) ограничение $\gamma|_{[0, t]}$. Единственность поднятия следует из того, что $\widetilde{\text{exp}}_p$ есть локальный гомеоморфизм.

Подъем Γ легко продолжить до геодезической на $[0, 1]$: продолжим γ на $[0, 1]$ (это возможно, т.к. X полно) и возьмем подъем продолженной кривой. Другими словами, положим $\Gamma(1) = \gamma|_{[0, 1]}$. Так как каждая геодезическая в X_p есть подъем некоторой геодезической в X (именно, своего собственного образа относительно $\widetilde{\text{exp}}_p$), то мы доказали, что X_p полно. Как указывалось выше, отсюда следует утверждение теоремы. \square

Геодезической петлей называется геодезическая $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, начало и конец которой совпадают: $\gamma(a) = \gamma(b)$. Замкнутые (или периодические) геодезические являются частным случаем геодезических петель.

Следствие 9.2.8. *В полном локально компактном пространстве X неположительной кривизны каждый элемент фундаментальной группы $\pi_1(X, p)$, где $p \in X$, содержит в точности одну геодезическую петлю.*

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $f: \tilde{X} \rightarrow X$ и на \tilde{X} поднимем метрику с X . Тогда \tilde{X} будет пространством Адамара. Фиксируем точку $x \in f^{-1}(p)$. Для каждой петли γ

в X с вершиной p существует единственный подъем $\tilde{\gamma}$ в \tilde{X} с началом в x . Ясно, что $\tilde{\gamma}$ является геодезической тогда и только тогда, когда γ — геодезическая. Две петли с общей вершиной представляют один и тот же элемент фундаментальной группы в том и только том случае, когда конечные точки их поднятий совпадают. Итак, множество кривых, представляющих данный элемент группы $\pi_1(X, p)$, соответствует множеству кривых в \tilde{X} , связывающих x и некоторую фиксированную точку $y \in f^{-1}(p)$. Последнее множество, по теореме Картана–Адамара, содержит в точности одну геодезическую; поэтому $\pi_1(X, p)$ содержит ровно одну геодезическую петлю. \square

9.2.2. Глобализация.

Теорема 9.2.9. Пусть X — пространство Адамара кривизны $\leq k$. Тогда условие сравнения треугольников (или углов, и т.д.) выполняется для всех треугольников в X , т.е. X является пространством кривизны $\leq k$ “в целом”.

Замечание 9.2.10. Фактически, условие, что “ X является пространством Адамара” можно заменить предположением, что любые две точки из X соединимы единственной кратчайшей и кратчайшие непрерывно зависят от своих конечных точек.

Доказательство теоремы. Мы докажем, что условие сравнения углов выполняется для всех треугольников. (Отсюда следует, что остальные условия неположительности кривизны также выполняются глобально. Действительно, “глобальные” варианты определений неположительности кривизны, как и локальные, равносильны друг другу.)

1. Сделаем следующее ключевое наблюдение. Рассмотрим треугольник $\triangle abc$ в X и точку d на его стороне $[ac]$. Тогда, если условие сравнения углов справедливо для треугольников $\triangle abd$ и $\triangle cbd$, то оно имеет место и для треугольника $\triangle abc$.

В самом деле, поместим треугольники сравнения $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{d}$ и $\triangle \bar{c}\bar{b}\bar{d}$ для треугольников $\triangle abd$ и $\triangle cbd$ в k -плоскость так, чтобы они лежали по разные стороны от их общей стороны $\bar{b}\bar{d}$. Из условия на углы для треугольников $\triangle abd$ и $\triangle cbd$ имеем $\angle bda \leq \angle \bar{b}\bar{d}\bar{a}$ и $\angle bdc \leq \angle \bar{b}\bar{d}\bar{c}$, поэтому $\angle \bar{b}\bar{d}\bar{a} + \angle \bar{b}\bar{d}\bar{c} \geq \angle bda + \angle bdc \geq \pi$. Таким образом, угол при вершине \bar{d} в четырехугольнике $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ не меньше, чем π . Используя лемму Александрова 4.3.3, мы получаем, что $\angle bad \leq \angle \bar{b}\bar{a}\bar{d} \leq \angle \bar{b}_1\bar{a}_1\bar{c}_1$, где $\triangle \bar{b}_1\bar{a}_1\bar{c}_1$ — треугольник сравнения для треугольника $\triangle bac$. Аналогично, $\angle bcd \leq \angle \bar{b}_1\bar{c}_1\bar{a}_1$. Наконец,

$$\angle abc \leq \angle abd + \angle cbd \leq \angle \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \angle \bar{c}\bar{b}\bar{d} = \angle \bar{a}\bar{b}\bar{c} \leq \angle \bar{a}_1\bar{b}_1\bar{c}_1$$

(последнее неравенство следует из того, что $|\bar{a}\bar{c}| \leq |\bar{a}\bar{d}| + |\bar{c}\bar{d}| = |\bar{a}_1\bar{c}_1|$).

2. Назовем треугольник Δabc *тонким* если его стороны $[ab]$ и $[ac]$ достаточно близки. Более точно, если расстояние (в равномерной метрике) между этими сторонами меньше, чем $r/10$, где r — радиус выпуклости множества $[ab] \cup [ac]$ (то есть каждый r -шар с центром в точке из $[ab] \cup [ac]$ является нормальной областью).

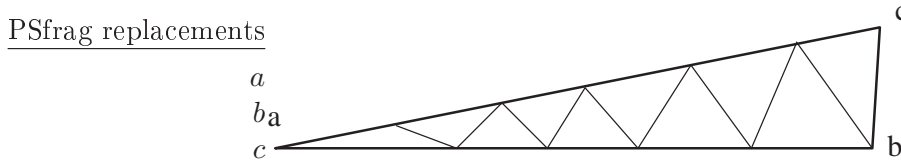


Рис. 9.2: Разрезание тонкого треугольника.

“Разрежем” такой тонкий треугольник Δabc на меньшие треугольники так, как это показано на рис.9.2. Каждый малый треугольник содержится в нормальном шаре и поэтому удовлетворяет условию на углы. Используя утверждение, доказанное на первом шаге и индукцию по числу малых треугольников, мы получаем, что для треугольника Δabc условие сравнения углов также выполняется.

3. Итак, условие сравнения углов справедливо для примыкающих к короткой стороне углов всех тонких треугольников. Теперь рассмотрим произвольный треугольник Δabc . Так как кратчайшие в X единственны и непрерывно зависят от концов (напомним, что мы предполагаем локальную компактность M), то мы имеем непрерывное семейство кратчайших, соединяющих вершину a с точками стороны $[bc]$. Разобьем сторону $[bc]$ на короткие интервалы $[b_i b_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$, $b_0 = b$, $b_N = c$ так, чтобы каждый треугольник $\Delta ab_i b_{i+1}$ являлся тонким. Эти тонкие треугольники удовлетворяют условию на углы. Теперь, используя первый шаг доказательства и индукцию по числу N узких треугольников, заключаем, что треугольник Δabc удовлетворяет условию на углы. \square

Замечание 9.2.11. Верно также обратное: если полное пространство имеет неположительную кривизну “в целом”, то оно односвязно и потому является пространством Адамара.

Действительно, пусть такое пространство X не односвязно. Зафиксируем точку $a \in X$ и такую петлю γ с вершиной a , что ее длина минимальна в классе гомотопически нетривиальных петель с вершиной a . Разделим петлю γ точками b и c на три интервала с равными длинами. Эти интервалы являются кратчайшими. Поэтому мы имеем треугольник Δabc , стороны которого образованы одной геодезической. Этот треугольник не удовлетворяет условию на углы.

9.2.3. Выпуклые функции.

Определение 9.2.12. Пусть X — пространство с внутренней метрикой. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой* если ее ограничение на любую геодезическую γ , то есть функция $t \mapsto f(\gamma(t))$ является выпуклой функцией. Как всегда, предполагается, что геодезическая проходит с постоянной скоростью.

Если функция f непрерывна, а метрика пространства X строго внутренняя, то выпуклость функции f равносильна следующему: для любых двух точек $x, y \in X$ и середины $z \in X$ между ними верно равенство $2f(z) \leq f(x) + f(y)$. Действительно, этот критерий равносильен тому, что f выпукла вдоль любой кратчайшей, а последнее влечет выпуклость вдоль произвольной геодезической (выпуклость — локальное свойство).

В пространствах Адамара многие естественные функции выпуклы. Во-первых, теорема о глобализации позволяет нам “глобализовать” лемму 9.2.3.

Предложение 9.2.13. Для любых двух геодезических α и β в пространстве Адамара функция $\delta t = d(\alpha(t), \beta(t))$ выпукла.

Следствие 9.2.14. Для любой точки p в пространстве Адамара функция $x \mapsto |px|$ выпукла.

Доказательство. Пусть β — постоянная геодезическая, т.е. $\beta(t) \equiv p$. Применим предложение 9.2.13. \square

Следствие 9.2.15. Пусть X — пространство Адамара, $Y \subset X$ — выпуклое множество. Тогда расстояние до Y , то есть функция $x \mapsto \text{dist}(x, Y)$, выпукла.

Доказательство. Предположим, что X локально компактно. Пусть $x, y \in X$, z — середина между x и y , точки x', y' — ближайшие к точкам x и y точки замыкания множества Y , а z' — середина между x' и y' . Так как Y выпукло, то z' принадлежит замыканию множества Y . Поэтому $\text{dist}(z, Y) \leq |zz'| \leq \frac{1}{2}(|xx'| + |yy'|)$. Последнее неравенство следует из предложения 9.2.13. \square

Следствие 9.2.16. Пусть $i: X \rightarrow X$ — изометрия пространства Адамара X . Тогда функция смещения $\delta(x) = d(x, i(x))$ выпукла.

Доказательство. Образом геодезической γ при отображении i будет геодезическая $i \circ \gamma$. Согласно предложению 9.2.13 ограничение функции δ на γ , т.е. функция $d(\gamma(t), i \circ \gamma(t))$ — выпуклая. \square

Понятие λ -выпуклых функций было введено в разделе 4.4, пример 4.4.4. Напомним, что под λ -выпуклыми функциями понимаются функции, “не менее выпуклые”, чем квадратичная функция $t \mapsto \lambda t^2$. Грубо говоря, это функции, вторые производные которых (в некотором обобщенном смысле) ограничены снизу числом 2λ . Сформулируем это более точно.

Определение 9.2.17. Пусть X — пространство с внутренней метрикой, $\lambda > 0$. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется λ -выпуклой, если для любой натурально параметризованной геодезической γ пространства X функция $t \mapsto f(\gamma(t)) - \lambda t^2$ выпукла.

Функция называется *строго выпуклой* если она λ -выпукла для некоторого $\lambda > 0$.

Переформулируем эти определения в терминах середин.

Предложение 9.2.18. Непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ является λ -выпуклой тогда и только тогда, когда для любой пары точек $x, y \in X$ и середины z между ними справедливо неравенство

$$(9.1) \quad f(z) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{\lambda}{4} |xy|^2.$$

Доказательство. Доказательство состоит в прямом вычислении. Рассмотрим натурально параметризованную геодезическую γ и пусть $g(t) = f(\gamma(t)) - \lambda t^2$. Выпуклость функции g равносильна тому, что $g(t_1) + g(t_2) \geq 2g(\frac{1}{2}(t_1 + t_2))$ для любых t_1, t_2 . Полагая $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, $x = \gamma(t_1)$, $y = \gamma(t_2)$, $z = \gamma(t)$, перепишем последнее неравенство в виде

$$f(x) - \lambda t_1^2 + f(y) - \lambda t_2^2 \geq 2f(z) - 2\lambda t^2,$$

или, что равносильно,

$$f(x) + f(y) - 2f(z) \geq \lambda(t_1^2 + t_2^2 - 2(\frac{t_1+t_2}{2})^2) = 2\lambda(\frac{t_1-t_2}{2})^2 = \frac{\lambda}{2} |xy|^2,$$

что и означает λ -выпуклость. \square

Следующая теорема характеризует пространства Адамара в терминах выпуклости дистанционной функции. Фактически эта теорема является (глобальной) переформулировкой определения неположительности кривизны (ср. с разделом 4.4).

Введем обозначение: для метрического пространства X и точки $p \in X$ обозначим через d_p дистанционную функцию точки p , то есть $d_p(x) = |px|$.

Теорема 9.2.19. Для любой точки p пространства Адамара функция d_p^2 является 1-выпуклой.

Обратно, если X есть полное пространство со строго внутренней метрикой и функция d_p^2 1-выпукла для любой точки $p \in X$, то X — пространство Адамара.

Доказательство. На евклидовой плоскости функция d_p^2 вдоль натурально параметризованной геодезической имеет вид $t \mapsto t^2 + \text{const}$. В силу того, что в пространстве Адамара дистанционная функция “более выпукла”, чем в евклидовом случае (в силу условия нашего первого определения неположительности кривизны), d_p^2 в таком пространстве является “более выпуклой”, чем t^2 .

Согласно предложению 9.2.18 достаточно проверить, что

$$|pz|^2 \leq \frac{|px|^2 + |py|^2}{2} - \frac{|xy|^2}{4},$$

если z является серединой между x и y . На евклидовой плоскости это неравенство обращается в равенство (Формула для длины медианы треугольника в терминах длин сторон.) Согласно условию на треугольники медиана $[pz]$ треугольника Δpxu не превосходит соответствующей медианы треугольника сравнения, откуда следует искомое неравенство.

Обратно, если функция d_p^2 1-выпукла для любой точки p , приведенное выше неравенство для медиан имеет место для всех треугольников. Это означает, что X имеет неположительную кривизну “в целом”. Таким образом, X является пространством Адамара, см. замечание 9.2.11 после доказательства теоремы глобализации. \square

Следующем предложении описывает свойство, являющееся одним из наиболее полезных свойств строго выпуклых функций.

Предложение 9.2.20. Пусть X — полное пространство со строго внутренней метрикой, а $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная строго выпуклая функция, ограниченная снизу. Тогда f достигает минимума ровно в одной точке.

Доказательство. Единственность доказывается очень просто. Предположим, что $f(x) = f(y) = \min f$, причем $x \neq y$. Тогда применение неравенства 9.1 к середине z между x и y дает $f(z) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) = \min f$, что противоречит минимальности.

Докажем существование. Пусть $m = \inf f$ и $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность для f , т.е. $f(x_i) \rightarrow m$ при $i \rightarrow \infty$. Покажем, что $\{x_i\}$ — последовательность Коши.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть i_0 столь велико, что $f(x_i) < m + \varepsilon$ для всех $i > i_0$. Тогда для любых $i, j > i_0$ имеем

$$f(z) \geq m > \frac{f(x_i) + f(x_j)}{2} - \varepsilon,$$

где z — середина между x_i и x_j . Вычитая полученное неравенство из неравенства 9.1, получаем $\lambda|x_i x_j|^2/4 < \varepsilon$. Таким образом, $|x_i x_j| < \sqrt{4\varepsilon/\lambda}$ для всех $i, j > i_0$. В силу того, что λ фиксировано и ε произвольно мало, последовательность $\{x_i\}$ фундаментальна.

Положим $x = \lim x_i$. Тогда $f(x) = \lim f(x_i) = m$, то есть x — искомая точка минимума. \square

Многие геометрические конструкции в пространствах Адамара связаны с точками минимума выпуклых функций. Ниже мы приводим некоторые примеры.

Определение 9.2.21. Пусть нам даны набор точек $\{p_i\}_{i=1}^n$ в метрическом пространстве и набор положительных чисел $\{m_i\}_{i=1}^n$. *Барицентром* (или *центром масс*) точек $\{p_i\}$ с весами $\{m_i\}$ называется точка минимума функции $\sum m_i d_{p_i}^2$ где $d_{p_i}(x) = |p_i x|$.

В пространстве Адамара функции $d_{p_i}^2$ строго выпуклы (теорема 9.2.19), поэтому функция $\sum m_i d_{p_i}^2$ также строго выпукла. Отсюда следует, что барицентр существует и единственен.

Упражнение 9.2.22. Докажите, что барицентр непрерывно зависит от точек $\{p_i\}$ и весов $\{m_i\}$ и, если веса m_i фиксированы, является липшицевой функцией точек $\{p_i\}$.

Определение 9.2.23. Пусть $Y \subset X$ — ограниченное множество в метрическом пространстве X . (Замкнутый) шар минимального радиуса, содержащий множество Y , называется *описанным шаром* для множества Y .

Предложение 9.2.24. В пространстве Адамара шар, описанный вокруг любого ограниченного множества, существует и единственен.

Доказательство. Центр описанного вокруг множества Y шара является точкой минимума функции R_Y , определенной условием $R_Y(x) = \sup\{|xy| : y \in Y\}$. Вместо этой функции удобнее минимизировать функцию R_Y^2 , которая, по определению, является точной верхней гранью значений функций d_y^2 на множестве $y \in Y$. Верхняя грань 1-выпуклых функций, очевидно, 1-выпукла. Поэтому R_Y^2 1-выпукла и, следовательно, ее точка минимума существует и единственна. \square

Упражнение 9.2.25. Обозначим через $\mathfrak{M}(X)$ пространство (с метрикой Хаусдорфа), состоящее из всех ограниченных подмножеств множества X . Докажите, что если X — пространство Адамара, то центр описанного шара является непрерывной функцией на $\mathfrak{M}(X)$.

9.2.4. Параллельные лучи и прямые. Напомним, что *прямой* в пространстве с внутренней метрикой X называется такая натурально параметризованная геодезическая $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$, что любой ее замкнутый подинтервал является кратчайшей. *Лучом* называется геодезическая $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, обладающая тем же свойством. В пространствах Адамара каждый геодезический отрезок — кратчайшая, поэтому прямые и лучи — это просто геодезические бесконечной длины.

Как и в евклидовом и гиперболическом пространствах, для пространства Адамара можно ввести понятие параллельных прямых и лучей.

Определение 9.2.26. Два луча или две прямые называются *параллельными*, если расстояние между ними (в равномерной метрике) конечно. Параллельные лучи также называются асимптотическими.

Очевидно, что отношение параллельности является эквивалентностью.

Упражнение 9.2.27. Докажите, что два луча (или две прямые) параллельны тогда и только тогда, когда расстояние по Хаусдорфу между ними конечно.

На евклидовой плоскости два луча (две прямые) параллельны тогда и только тогда, когда они параллельны в обычном (“школьном”) смысле. Легко видеть, что на плоскости Лобачевского две различные прямые не могут быть параллельными (однако параллельные лучи с вершинами в точках a и b на плоскости Лобачевского существуют для любых точек a и b). Скоро мы убедимся, что в общем случае происходит почти то же самое.

Предложение 9.2.28. Пусть p — точка в пространстве Адамара X . Тогда для любого луча γ в X существует единственный луч с вершиной в точке p , параллельный лучу γ .

Доказательство. Мы докажем это утверждение в предположении, что X локально компактно. Обозначим через γ_t кратчайшую, соединяющую точки p и $\gamma(t)$. Так как расстояние между геодезическими — выпуклая функция (предложение 9.2.13), то эта кратчайшая содержится в (замкнутой) r -окрестности геодезической γ , где $r = |p\gamma(0)|$. Так как пространство локально компактно, то можно выбрать такую последовательность $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow \infty$, что $\{\gamma_{t_i}\}$ сходится к некоторому лучу $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Этот луч не выходит из r -окрестности луча γ и поэтому параллелен ему.

Чтобы доказать единственность, предположим, что имеются два начинающихся в p луча, α и β , и оба параллельны лучу γ . Так как параллельность — отношение эквивалентности, лучи α и β параллельны друг другу, так что функция $t \mapsto |\alpha(t)\beta(t)|$ ограничена. С другой стороны, эта функция выпукла и равна нулю в точке $t = 0$. Таким

образом, эта функция есть тождественный ноль, откуда следует равенство $\alpha = \beta$. \square

С помощью понятия параллельных лучей можно определить *границу на бесконечности* пространства Адамара. Ее определение аналогично определению границы на бесконечности плоскости Лобачевского, а именно: точками границы на бесконечности являются классы эквивалентности параллельных лучей. Граница на бесконечности пространства Адамара X обозначается через $X(\infty)$. Часто говорят, что луч “соединяет” свое начало с той точкой границы на бесконечности, которую этот луч представляет. На этом языке последнее предложение предложения говорит, что для каждой точки пространства X и каждой точки $X(\infty)$ существует единственная соединяющая их геодезическая.

Граница на бесконечности вместе с различными структурами, которыми на ней можно ввести, предоставляет удобный язык для описания асимптотических свойств пространств Адамара. Однако в данной книге мы не углубляемся в эту важную тему (изложение соответствующей теории имеется в книгах [BGS], [E], [BH], где можно также найти дальнейшие ссылки).

Вернемся к параллельным прямым. Оказывается, параллельные прямые отсутствуют в пространствах, которые не содержат плоских подмножеств. В частности, таких прямых нет в пространствах Адамара строго отрицательно кривизны.

Теорема 9.2.29. *Пусть γ_1 и γ_2 — две параллельные прямые в пространстве Адамара X . Тогда или γ_1 и γ_2 совпадают, или они ограничивают плоскую полосу.*

Если X имеет кривизну $\leq k$ для некоторого $k < 0$, то в X нет параллельных прямых, за исключением совпадающих между собой.

Под плоской полосой, ограниченной прямыми γ_1 и γ_2 , мы понимаем выпуклое подмножество, изометричное полосе пространства \mathbb{R}^2 , ограниченной двумя параллельными прямыми.

Для доказательства нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 9.2.30. *Пусть $Q = abcd$ — четырехугольник в пространстве Адамара с суммой углов не меньшей, чем 2π . Тогда эта сумма равна 2π , и Q ограничивает плоскую выпуклую область, изометричную плоскому четырехугольнику в \mathbb{R}^2 .*

Доказательство. Проведем “диагональ” $[ac]$ в четырехугольнике Q . Из условия на углы (в случае неположительной кривизны) следует, что суммы углов треугольников $\triangle abc$ и $\triangle adc$ не больше, чем π . С другой стороны, из неравенства треугольника для углов следует, что сумма всех шести углов треугольников $\triangle abc$ и $\triangle adc$ не меньше, чем

сумма углов в Q , и поэтому не меньше, чем 2π . Таким образом, все упомянутые неравенства обращаются в равенства; в частности, сумма углов четырехугольника Q равна 2π , а сумма углов каждого из треугольников $\triangle abc$ и $\triangle acd$ равна π . Поэтому (предложение 9.1.19) каждый из этих треугольников ограничивает вполне геодезическую плоскую поверхность (“заполненный” треугольник). Обозначим эти поверхности через T_1 и T_2 , соответственно. Мы хотим показать, что $T_1 \cup T_2$ и есть искомый четырехугольник.

Для начала заметим, что, аналогично доказанному выше, треугольники $\triangle abd$ и $\triangle cbd$ ограничивают плоские поверхности T_3 и T_4 . Для завершения доказательства достаточно показать, что $T_1 \cup T_2 = T_3 \cup T_4$, или, равносильно, что кратчайшая $[ac]$ лежит на поверхности $T_3 \cup T_4$. Заметим, что каждая из поверхностей $T_1 \cup T_2$ и $T_3 \cup T_4$ линейно изометрична четырехугольнику $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, стороны и углы которого соответственно равны сторонам и углам четырехугольника Q . Таким образом, длина отрезка $[ac]$ равна диагонали $\bar{a}\bar{c}$ и эта диагональ соответствует кривой той же длины в $T_1 \cup T_2$. Поэтому найдется кривая в $T_3 \cup T_4$ с длиной, равной $|ac|$. Это значит, что такая кривая является кратчайшей и, так как кратчайшие в пространстве Адамара единственны, совпадает с $[ac]$. \square

Доказательство теоремы. Рассмотрим параллельные прямые α и β . По предложению 9.2.13 функция $t \mapsto |\alpha(t)\beta(t)|$ выпукла на \mathbb{R} . Так как эта функция ограничена, она постоянна. Заметим, что это остается верным и после перепараметризации прямой α или β с помощью замены $t \mapsto t + \text{const}$. Выберем параметризации так, чтобы значение $|\alpha(t)\beta(t)|$ было минимально возможным. Этого можно достичь следующим способом. Пусть $\beta(0)$ — точка прямой β , ближайшая к $\alpha(0)$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\beta(t)| &= |\alpha(0)\beta(0)| = \min_{c \in \mathbb{R}} |\alpha(0)\beta(c)| \\ &= \min_{c \in \mathbb{R}} |\alpha(t)\beta(t+c)| = \min_{c \in \mathbb{R}} |\alpha(t-c)\beta(t)|. \end{aligned}$$

Поэтому точка $\beta(t)$ является ближайшей к $\alpha(t)$ точкой прямой β , а точка $\alpha(t)$ является ближайшей к $\beta(t)$ точкой прямой α . По формуле первой вариации (теорема 4.5.6) каждый из четырех углов, которые кратчайшая $[\alpha(t)\beta(t)]$ образуют с полупрямыми прямых α и β , не меньше, чем $\pi/2$. Поэтому четырехугольник $\alpha(0)\beta(0)\beta(t)\alpha(t)$ удовлетворяет условиям леммы 9.2.30. Следовательно, его углы равны $\pi/2$ и он ограничивает плоскую область. Объединение построенных прямоугольников по всем $t \in \mathbb{R}$ дает искомую плоскую полосу. \square

Теперь мы докажем версию теоремы о расщеплении для пространств Адамара.

Теорема 9.2.31. Пусть γ — прямая в пространстве Адамара X . Обозначим через Y объединение всех прямых, параллельных γ . Тогда множество Y изометрично произведению $Z \times \mathbb{R}$ для некоторого метрического пространства Z .

В частности, если каждая точка пространства X принадлежит некоторой прямой, параллельной γ , то X изометрично произведению $Z \times \mathbb{R}$, где Z — тоже пространство Адамара.

Доказательство. Пусть α и β — две параллельных прямые, $x \in \alpha$. Точку y прямой β , ближайшую к точке x , назовем *проекцией* точки x на β .

Выберем на каждой линии α , параллельной γ , параметризацию так, чтобы $\alpha(0)$ являлось проекцией точки $\gamma(0)$ на α . Во-первых, докажем, что тогда для любых двух прямых α и β , параллельных γ , точка $\beta(0)$ является проекцией точки $\alpha(0)$ на β . Предположим, что это не так. Пусть $p = \alpha(0)$ и пусть $q = \beta(t_0)$ — проекция точки p на β . Мы можем предположить, что $t_0 > 0$ (этого можно добиться сменой ориентаций). По теореме 9.2.29 прямые α и β ограничивают плоскую полосу ширины $|pq|$, поэтому $|\beta(t)p| = \sqrt{|\beta(t)q|^2 + |pq|^2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $|\beta(t)p| - |\beta(t)q| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ (так как $|\beta(t)q| \rightarrow \infty$ и $|pq|$ фиксировано). Теперь

$$|\beta(t)p| - t = |\beta(t)p| - |\beta(t)\beta(0)| = |\beta(t)p| - |\beta(t)q| + t_0 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} t_0.$$

Поэтому $|\beta(t)p| > t + t_0/2$ для всех достаточно больших t . Мы придем к противоречию, показав, что найдется путь из $\beta(t)$ в p (проходящий через точку на γ) длины меньшей, чем $t + t_0/2$.

По теореме 9.2.29 прямые γ и α ограничивают некоторую плоскую полосу S_1 , а прямые γ и β ограничивают некоторую плоскую полосу S_2 . Рассмотрим объединение $S = S_1 \cup S_2$ этих полос. Это объединение линейно изометрично плоской полосе, ширина которой является суммой ширин S_1 и S_2 (точнее, S есть образ плоской полосы при некоторой линейной изометрии). Далее, отрезок плоской полосы между точками, соответствующими точкам $p = \alpha(0)$ и $\beta(0)$, ортогонален ограничивающим полосу прямых. Рассуждая так же, как выше, мы заключаем, что

$$t - |\beta(t)p|_S = |\beta(t)\beta(0)|_S - |\beta(t)p|_S \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

где $|\cdot|_S$ — расстояние во внутренней метрике полосы S . Таким образом, $|\beta(t)p|_S < t_0/2$ для всех достаточно больших t , что противоречит неравенству $|\beta(t)p| > t_0/2$, полученному ранее. Действительно, длины во внутренней метрике полосы S не меньше, чем длины в метрике X .

Это противоречие доказывает, что $\beta(0)$ является проекцией точки $\alpha(0)$ на β . Другими словами, отношение “являться проекцией” транзитивно.

Окончание доказательства совсем элементарно. Пусть Z — множество проекций точки $\gamma(0)$ на все прямые, из которых состоит Y . Имеется естественное отображение из $Z \times \mathbb{R}$ в Y , сопоставляющее паре (z, t) точку $\gamma_z(t)$, где γ_z есть прямая, параллельная γ и проходящая через z (напомним, что, согласно выбору параметризации, $z = \gamma_z(0)$). Теперь из теоремы 9.2.29 и того, что точки в Z являются проекциями одна на другую, лежащую на соответствующей прямой, следует, что наше отображение является изометрией. \square

9.3. Фундаментальная группа пространства неположительной кривизны

В этом разделе мы докажем некоторые классические результаты о фундаментальных группах пространств неположительной кривизны. Если X является пространством строго отрицательной кривизны (то есть кривизны $\leq k < 0$), то для него справедливы даже более сильные утверждения, чем гиперболичность фундаментальной группы. Например, упомянем, несколько забегаая вперед, что для пространства X с указанными свойствами каждая нетривиальная абелева подгруппа группы $\pi_1(X)$ изоморфна группе \mathbb{Z} .

Напомним основные факты о фундаментальных группах и универсальных накрывающих из раздела 3.4.2. Пусть X — пространство с внутренней метрикой, а $f: \tilde{X} \rightarrow X$ — универсальное накрытие. Тогда определено действие фундаментальной группы $\pi_1(X)$ на \tilde{X} изометриями. Точнее, группа $\pi_1(X)$ изоморфна группе преобразований накрытия, то есть группе коммутирующих с f изометрий пространства \tilde{X} на себя.

Другими словами, группа изометрий $Iso(\tilde{X})$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\pi_1(X)$; более того, эта подгруппа действует свободно (то есть, любой ее нетривиальный элемент является отображением без неподвижных точек) и вполне разрывно.

Для каждого полного пространства X неположительной кривизны его универсальное накрывающее \tilde{X} является пространством Адамара. Таким образом, вместо изучения самого пространства X , можно рассматривать пространство Адамара \tilde{X} и группы его изометрий. В этом случае действие группы предполагается свободным и вполне разрывным.

Теорема 9.3.1. *Пусть X — пространство Адамара. Каждая конечная подгруппа Γ группы $Iso(X)$ имеет неподвижную точку. То есть, существует такой элемент $q \in X$, что $\gamma(q) = q$ для всех $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Для любой точки $p \in X$ орбита $\Gamma_p = \{\gamma(p) : \gamma \in \Gamma\}$ представляет собой конечное множество. Согласно 9.2.24, существует

и единственен центр тяжести q этой орбиты. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ отображение $x \mapsto \gamma(x)$ переводит орбиту в себя (то есть $\gamma(\Gamma_p) = \Gamma_p$ для любого p), поэтому $\gamma(q) = q$ для любой изометрии $\gamma \in \Gamma$. \square

Так как преобразования накрытия не имеют неподвижных точек, верно такое следствие.

Следствие 9.3.2. *Фундаментальная группа $\pi_1(X)$ полного пространства X неположительной кривизны не содержит нетривиальных конечных подгрупп.*

Другими словами, каждый элемент группы $\pi_1(X)$, отличный от единичного, порождает бесконечную подгруппу.

Теорема 9.3.3 (Прессманн). *Пусть X — компактное пространство кривизны $\leq k$, где $k < 0$. Тогда любые два коммутирующих элемента группы $\pi_1(X, p)$ принадлежат некоторой циклической подгруппе.*

Доказательство. Предположим, что $a_0, b_0 \in \pi_1(X, p)$ и $a_0 b_0 = b_0 a_0$. Если один из элементов a_0, b_0 тривиален или $a_0 = b_0$, то нечего доказывать. Пусть это не так. Рассмотрим свободный гомотопический класс элемента a_0 , представленный отображением $S^1 \rightarrow X$. В этом классе найдется самый “короткий” представитель. (Существование самой короткой петли доказывается так же, как существование кратчайшей в компактном пространстве; см. раздел 2.5.2.) Такой путь α является замкнутой (периодической) геодезической (проверьте). Зафиксируем точку $q \in \alpha$ и рассмотрим α как петлю с вершиной q . Существует изоморфизм группы $\pi_1(X, p)$ на $\pi_1(X, q)$, переводящий a_0 в $[\alpha] = a$. Через b обозначим образ элемента b_0 при этом изоморфизме. Очевидно, $ab = ba$.

Пусть $f : \tilde{X} \rightarrow X$ — универсальное накрытие. Подъем элемента α представляет собой полную геодезическую $\tilde{\alpha}$. отождествим $\pi_1(X, q)$ с группой Γ преобразований накрытия. Элемент $a \in \Gamma$ переводит геодезическую $\tilde{\alpha}$ в себя и его итерации действуют на $\tilde{\alpha}$ сдвигами как группа \mathbb{Z} . (Этот элемент не может изменить ориентацию геодезической $\tilde{\alpha}$, ибо иначе он имел бы неподвижную точку в $\tilde{\alpha}$.) Изометрия b переводит $\tilde{\alpha}$ в геодезическую $\tilde{\beta}$.

Мы хотим показать, что $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$. Предположим, это не так. Возьмем точку x на геодезической $\tilde{\alpha}$ и рассмотрим четырехугольник Q с вершинами $x, x_1 = ax, x_2 = bx$ и $x_3 = abx = bax$.

Так как a и b — изометрии, то

$$\angle x_1 x x_2 + \angle x x_2 x_3 = \pi, \quad \angle x x_1 x_3 + \angle x_1 x_3 x_2 = \pi.$$

Из леммы 9.2.30 следует, что Q изометричен плоскому четырехугольнику. Однако это противоречит предположению, что X имеет строго отрицательную кривизну. Поэтому $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$.

Рассмотрим ограничение изометрий a и b на $\tilde{\alpha}$. Эти ограничения могут быть отождествлены с числами $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^1$. Группа, порожденная этими числами, является решеткой $\{m\bar{a} + n\bar{b}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$. В силу того, что группа изометрий действует вполне разрывно, решетка не может иметь точек сгущения и поэтому дискретна.

Из теории чисел хорошо известно, что в таком случае существует такое число \bar{c} , что $\bar{c} = p\bar{a} + q\bar{b}$ и $\bar{a} = r\bar{c}, \bar{b} = s\bar{c}$, где p, q, r, s — целые и $rp + sq = 1$. (Чтобы доказать это, заметим, что множество положительных сумм $pa + qb$ достигает минимума, который и равен искомому c .)

Пусть p, q — такие же точки, как выше. Рассмотрим элемент $c = a^p b^q \in \Gamma$. Покажем, что $a = c^r, b = c^s$. Действительно, ac^{-r} оставляет $\tilde{\alpha}$ на месте, поэтому ac^{-r} есть тождественное преобразование. Доказательство равенства $b = c^s$ аналогично. \square

Объединяя эту теорему с предыдущим следствием, получаем

Следствие 9.3.4. *Пусть X — компактное пространство кривизны $\leq k < 0$. Тогда каждая нетривиальная абелева подгруппа группы $\pi_1(X)$ изоморфна группе целых чисел \mathbb{Z} .*

Обобщения. Последняя теорема неверна, если опустить предположение отрицательности кривизны. Торы и прямые произведения $T^n \times M$, где M — пространство Адамара, являются хорошими контрпримерами. В действительности, любой контрпример к последней теореме содержит подпространство, изометричное плоскому тору. Чтобы прояснить этот момент, напомним анализ параллельных линий в разделе 9.2.4, в частности, теорему 9.2.29. Плоские торы в пространстве неположительной кривизны соответствуют абелевым подгруппам фундаментальной группы. Более точно, имеет место следующая

Теорема 9.3.5. *Пусть X — компактное пространство неположительной кривизны. Если $\pi_1(X)$ содержит абелеву подгруппу G ранга $k > 1$, то X содержит выпуклое подмножество, изометричное k -мерному плоскому тору T .*

Более того, тор T может быть выбран так, что отображение включения $T \hookrightarrow X$ индуцирует мономорфизм фундаментальных групп и G есть образ этого гомоморфизма.

Эта теорема является частным случаем более общего результата о действии вполне разрывных групп на пространствах Адамара (подробности и дальнейшие ссылки можно найти в [ВН]).

9.3.1. Заключительные замечания. Этот раздел является введением в тот удивительный мир, который образуют пространства ограниченной сверху кривизны. Дальнейшие результаты читатель может найти в большом количестве книг и статей, изданных в последнее время. Мы упомянем здесь, во-первых, книгу [ВН], в которой, помимо многих интересных результатов, читатель может найти обстоятельное изложение свойств фундаментальной группы (сравните с 9.3) и геометрии границы на бесконечности — области, которой мы только коснулись в нашем учебнике (см. также [BGS], [Gro3]). В этой книге также детально рассмотрены полиэдральные комплексы ограниченной сверху кривизны (пространства, построенные из симплексов в пространственной форме кривизны k). Так как уже двумерные полиэдральные пространства представляют заметный интерес, мы упомянем здесь также статью [ВВ], где можно найти соответствующие ссылки, некоторые обобщения и нерешенные проблемы. Недавняя статья [К1] посвящена исследованию локального строения и некоторых асимптотических свойств пространств Александера ограниченной сверху кривизны. Это исследование основано на понятии *геометрической размерности* \dim_G , определенной по индукции следующим образом. Если X — дискретное пространство, то, по определению, $\dim_G(X) = 0$, затем положим $\dim_G(X) = 1 + \sup_{p \in X} \dim_G(\Sigma_p)$ в остальных случаях. Б. Клейнер доказал, что геометрическая размерность равна топологической размерности \dim_{Top} в следующем смысле: $\dim_G(X) = \sup \dim_{Top}(K)$, где супремум берется по всем компактным множествам $K \subset X$. Если $\dim_G(X) < \infty$, то X имеет замечательные свойства. Например, для любого $\varepsilon > 0$ существует $(1+\varepsilon)$ -билипшицево отображение некоторого открытого (не пустого) множества $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$, где $n = \dim_G(X)$.

Некоторые вопросы теории пространств Адамара для римановых многообразий продвинуты в большей мере, чем в общем случае, см. [BGS], [E].

9.4. Пример: полурассеивающие бильярды

Наверное, каждый не раз наблюдал, как бильярдные шары, сталкиваясь и разлетаясь, катятся по зеленому сукну. В этом разделе мы хотим показать, как теория пространств Александера может быть применена к исследованию ряда задач, возникающих при исследовании полурассеивающих бильярдных шаров.

Вероятно, одним из стимулов к изучению полурассеивающих бильярдных шаров послужили модели газа в статистической физике. Например, модель газа, которая описывает газ как систему свободно движущихся (в ящике или пустом пространстве) твердых круглых шаров, столкновения между которыми считаются абсолютно упругими.

Физические рассуждения естественно приводит к ряду математических проблем, касающихся динамики таких систем. Например, одной из центральных проблем такого рода является вопрос о верхней границе числа столкновений, которые могут произойти в бильярдной системе (за данное время). Ряд фундаментальных проблем такого рода в их “физическом” виде восходят к Больцману, тогда как их строгое математическое исследование было начато Я. Синаем.

В качестве базового примера рассмотрим систему из N круглых шаров, свободно движущихся и упруго соударяющихся в \mathbb{R}^3 (или в ящике). Каждый шар движется прямолинейно с постоянной скоростью до тех пор, пока он не столкнется с другим шаром. После столкновения новые скорости шаров определяется законами сохранения классической механики.

(Явные формулы для скоростей после столкновения в терминах масс, радиусов и скоростей до столкновения изучаются в курсе физики даже в средних школах). Для упрощения ситуации мы будем рассматривать только системы, в которых не более двух шаров могут столкнуться одновременно.

Набор из N шаров может быть представлен точкой в пространстве \mathbb{R}^{3N} . Именно, если обозначить через $a_i \in \mathbb{R}^3$ центр i -го шара и через (x_i, y_i, z_i) — его декартовы координаты, то соответствующая точка в \mathbb{R}^{3N} представляется вектором

$$(a_1, a_2, \dots, a_N) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N).$$

Не всякая точка из \mathbb{R}^{3N} представляет возможную конфигурацию шаров. Нам надо исключить такие точки в \mathbb{R}^{3N} , где некоторые шары налегают друг на друга. Именно, i -ый и j -ый шары пересекаются, если $|a_i - a_j| < r_i + r_j$, где r_i и r_j — радиусы этих шаров. Это неравенство определяет цилиндр $C_{ij} \subset \mathbb{R}^{3n}$. Дополнение $\mathbb{R}^{3N} \setminus \bigcup_{i \neq j} C_{ij}$ и есть *конфигурационное пространство* нашей системы. Его точки соответствуют всем возможным положениям системы шаров.

Естественно рассматривать бильярд в \mathbb{R}^{3N} с евклидовой структурой, заданной с помощью кинетической энергии системы

$$K((v_1, v_2, \dots, v_N), (v_1, v_2, \dots, v_N)) = \sum_{i=1}^N m_i \langle v_i, v_i \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — обычное скалярное произведение для для каждой “трехмерной” координаты, а m_i — масса i -го шара. Эволюция такой системы шаров определяет некоторый путь в конфигурационном пространстве. Легко проверить, что точка, представляющая некоторую конфигурацию шаров, движется равномерно и прямолинейно между цилиндрами C_{ij} до тех пор, пока она не коснется одного из цилиндров C_{ij} (это событие соответствует

столкновению в системе шаров), а затем движение происходит согласно стандартному закону бильярдных соударений: угол отражения равен углу падения. Другими словами, когда точка, изображающая систему, достигает цилиндра C_{ij} , проекция вектора скорости на цилиндр (точнее, на касательную плоскость цилиндра) не изменяется, тогда как нормальная составляющая скорости меняет знак. Разумеется, и проекция и нормальная составляющая рассматриваются относительно формы K .

Таким образом, динамика системы из нескольких шаров эквивалентна частному случаю полурассеивающего бильярда, который мы определим следующим образом.

Определение 9.4.1. В полном римановом многообразии M неположительной кривизны и с ненулевым радиусом инъективности рассмотрим конечный (или, по меньшей мере, локально конечный) набор $\{B_i\}_{i \in I}$ выпуклых подмножеств многообразия M с гладкими границами $W_i = \partial B_i$ (которые являются гладкими выпуклыми гиперповерхностями). Замыкание дополнения $M \setminus \bigcup B_i$ называется *полурассеивающим бильярдным столом или, коротко, бильярдом*. Гиперповерхности W_i (равно как и выпуклые множества B_i) мы будем именовать *стенками* бильярда.

Бильярдной траекторией называется кусочно-гладкая кривая (“ломаная”) с единичной скоростью, проходящая в замыкании $M \setminus \bigcup B_i$, с точками излома только на стенках (т.е. на $\bigcup W_i$) и такая, что гладкие участки являются геодезическими римановой метрики, а в каждой точке излома скорости скорости слева и справа имеют равные проекции на касательную плоскость к соответствующей стенке. Другими словами, это — траектория точки, которая движется по геодезической, пока не натолкнется на борт W_i , от которого она отражается согласно обычному закону упругих столкновений.

Для простоты мы исключаем из рассмотрения траектории, испытывающие столкновения более, чем с одним бортом одновременно.

Неформальная идея, что полурассеивающие бильярды представляют собой нечто подобное геодезическим потокам на многообразиях отрицательной кривизны, долго носилось в воздухе. По всей вероятности, эта идея впервые была сформулирована В. И. Арнольдом.

В начале шестидесятых годов он предположил, что такие системы можно рассматривать как предельный случай геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны (кривизна концентрируется на гиперповерхностях, где происходят столкновения). Действительно, сегодня хорошо известно, что большая часть результатов гладкой теории (полу-)гиперболических систем может быть обобщена (с необходимыми изменениями) на (полу-)рассеивающие бильярды. Несмотря на это, конструкция, предложенная Арнольдом, до недавнего времени не была

использована. Возможно, причиной тому были и несколько серьезных возражений. В частности, А. Б. Каток указал, что при таких аппроксимациях (геодезическими потоками на многообразиях) неизбежно появляются геодезические, которые “оггибают” гиперповерхности соударений и потому не имеют аналогов в бильярдах.

Для изучения бильярдных потоков за данное время и в малой окрестности фиксированной точки можно использовать *удвоение* многообразия, которое получается удалением внутренностей стенок из двух копий многообразия M с последующей склейкой последних вдоль границ соответствующих удаленных областей. Полученную таким путем сингулярную метрику можно затем аппроксимировать гладкими метриками (аналогично тому, как жесткие столкновения подменяют очень быстро растущим потенциалом). Геодезические потоки полученной метрики будут естественно сходиться на любом фиксированном интервале времени и в малой окрестности каждой точки к бильярдному потоку. Хотя эта конструкция кажется не слишком уж полезной, с ее помощью можно получить некоторую информацию. Например, теорема Лиувилля (инвариантность меры Лиувилля) для бильярдных потоков немедленно следует из теоремы Лиувилля для геодезических потоков.

Проиллюстрируем подход, предложенный Арнольдом, на простом примере бильярда в дополнении к диску на двумерном торе (или евклидовой плоскости). Возьмем две копии тора с удаленным (открытым) диском и склеим их вдоль краевых окружностей этих дисков. Получится риманово многообразие (замкнутая поверхность рода 2) с метрической особенностью вдоль окружности склейки. Это многообразие — всюду плоское, за исключением окружности склейки, которую можно понимать как носитель сингулярной отрицательной кривизны. Таким образом, полученное многообразие является пространством с внутренней метрикой неположительной кривизны. Сглаживая эту метрику в (произвольно малой) окрестности окружности склейки, можно получить гладкую риманову метрику неположительной кривизны, которая является плоской всюду, кроме упомянутой окрестности. Каждому интервалу бильярдной траектории соответствует (канонически) геодезическая в этой метрике. Столкновения с диском соответствуют при этом прохождениям геодезической через окружность склейки (с одной копии тора на другую).

Упражнение 9.4.2. Прделайте то же построение в размерности 3: возьмите две копии \mathbb{R}^3 с удаленными единичными шарами и склейте их вдоль краевых сфер. Покажите, что получившееся пространство — имеет кривизну, не превосходящую 1, но *не* является пространством неположительной кривизны!

Подсказка. В этом пространстве поверхность склейки (сфера) — вполне геодезическое подпространство.

Покажите, что в данном примере при сглаживании, не изменяющем метрики вне некоторой окрестности множества склейки, невозможно избавиться от положительной кривизны.

Последний пример показывает, что применение данной конструкции в старших размерностях наталкивается на серьезные препятствия. Кроме того, даже в размерности два многие геодезические не соответствуют никаким бильярдным траекториям. Они могут быть описаны как “плохие” траектории, сталкивающиеся с окружностью под нулевым углом, затем идущие по окружности (возможно, даже пробегающие ее несколько раз) и, наконец, покидающие краевую окружность по касательной. В динамике такие геодезические несут “основную часть энтропии” и поэтому их нельзя проигнорировать. С другой стороны, трудно отделить физические траектории от “плохих” при изучении геодезического потока на поверхности.

Основная конструкция. Цель настоящего раздела — дать неформальное и элементарное описание того, как идея Арнольда может быть все же реализована (и как можно частично обойти упомянутые выше трудности), если использовать пространства Александра. Именно таким путем недавно удалось решить несколько важных открытых проблем.

В центре наших рассуждений будет идея склеивания вместе нескольких копий пространства M . Затем мы изучим бильярдные траектории в этом новом пространстве.

Это — достаточно старая идея, и в своей простейшей форме она появляется даже в виде занимательных задач для старшеклассников. Например, в случае квадратного бильярдного стола можно рассмотреть замощение евклидовой плоскости такими квадратами. При этом бильярдные траектории превращаются в прямые линии.

Мы собираемся представлять бильярдные траектории геодезическими в пространствах неположительной кривизны. Чтобы продемонстрировать мощь такого метода, мы покажем, как метрическая геометрия позволяет решить задачу оценки числа столкновений. К сожалению, в размерности, большей трех, нам неизвестна конструкция, которая позволила бы представить все бильярдные траектории как геодезические в одном компактном пространстве. Попытки найти аналоги приводят к замечательному открытому вопросу: можно ли склеить конечное множество экземпляров правильного 4-симплекса так, чтобы получить псевдомногообразие неположительной кривизны без края?

Мы дадим конструкцию, которая имеет дело с траекториями из некоторого комбинаторного класса, где под комбинаторным классом

(отрезка) бильярдной траектории понимается последовательность стенок, о которые шар ударяется.

Зафиксируем некоторую последовательность стенок $K = \{W_{n_i}, i = 1, 2, \dots, N\}$ и рассмотрим последовательность $\{M_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ изометричных копий многообразия M . Для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ склеим M_i с M_{i+1} вдоль B_{n_i} . Так как каждое множество B_{n_i} выпукло, полученное в результате склеивания пространство M_K имеет, согласно теореме Решетняка 9.1.21, ту же верхнюю границу кривизны, что и M .

Очевидным образом определена проекция $M_K \rightarrow M$, и M может быть изометрически вложено в M_K отождествлением с одним из множеств M_i (рассматриваемым как подмножество пространства M_K). Таким образом, каждая кривая в M может быть поднята в M_K многими различными способами. Но бильярдная траектория из комбинаторного класса K допускает канонический подъем на M_K : сначала мы поднимаем ее отрезок до первого соударения с $M_0 \subset M_K$, затем — отрезок между столкновениями с $M_1 \subset M_K$ и т.д. Назовем полученное подъем разверткой траектории. Легко видеть, что развертка траектории — геодезическая в M_K .

Заметим, что, наряду с некоторым количеством копий пространства M , множество M_K содержит некоторые “избыточные части”, образованные отождествленными копиями множеств B_i . Например, если мы изучаем бильярд в криволинейном треугольнике с вогнутыми стенками, то множествами B_i вовсе не являются краевые кривые. Вместо этого в качестве B_i выбираются некоторые выпуклые овалы, ограниченные продолжением стенок. (Можно представить себе бильярд в компактной компоненте дополнения к трем дискам.) В данном случае эти дополнительные части выглядят как “плавники”, приклеенные к нашему пространству. Отличие от случая бильярда в дополнении к диску на двумерном торе (вспомните обсуждение выше) состоит в том, что, склеивая вместе две копии тора, мы теперь *не* удаляем этот диск. Теперь геодезические не могут следовать вдоль дуг границы диска, так как любой отрезок, лежащий на такой дуге, может быть укорочен выталкиванием внутрь диска. И хотя все еще остаются “плохие” геодезические (те, которые проходят через диск), их уже меньше, чем раньше и их проще отделить.

Может показаться, что было бы более естественно склеивать вдоль граничных множеств W_{n_i} , а не по самим множествам B_{n_i} . Действительно, такое склеивание легко можно интерпретировать или как “зеркальное отражение”, или по аналогии с обычной разверткой многоугольных бильярдов. Однако при таком склеивании вдоль границ полученное пространство не будет являться пространством неположительной кривизны ни в какой размерности, отличной от двух (см. упражнение 9.4.2).

Читатель может удивиться, каким образом внутренности множеств B_i могут играть здесь какую-то роль, так как они находятся “за стенками” и бильярдные траектории никогда туда не заглядывают. Например, вместо выпуклых стенок в многообразии без края, можно было бы начать с многообразия с некоторым числом “выпуклых” компонент края (с неотрицательно определенной второй фундаментальной формой по отношению к внутренней нормали). Однако даже в случае одной компоненты края имеются примеры, в которых невозможно “заполнить” край многообразием неположительной кривизны. Более того, наш основной динамический результат перестает быть верным для примеров такого сорта. Таким образом, важно, что что стенки — не просто локально выпуклые гиперповерхности. Мы существенно используем то обстоятельство, что они ограничивают выпуклые тела.

Оценка числа столкновений. Теперь обратимся к основному приложению нашей конструкции — оценке числа столкновений в модели идеального газа, построенной из твердых шаров. Для системы твердых шаров естественен вопрос: можно ли оценить сверху число столкновений, которые могут произойти в данной системе, постоянной, зависящей только от числа шаров и их масс. Если мы рассматриваем шары в неограниченном евклидовом пространстве, то будем интересоваться общим числом столкновений (за бесконечное время). Для системы шаров в ящике естественно оценивать частоту столкновений (число столкновений в единицу времени при фиксированной потенциальной энергии). Мы будем рассматривать общий случай полурассеивающего бильярда. Понятно, что нам потребуются некоторые дополнительные предположения. Действительно, уже для двумерного бильярда с некоторым числом вогнутых стенок траектория может испытывать (за единичное время) бесконечное число столкновений в окрестности вершины, являющейся точкой касания двух стенок. Таким образом мы должны предположить, что наш бильярд в некотором смысле невырожден.

Для упрощения сделаем следующее *предположение о невырожденности*, которое устранил вырожденные случаи расположения гиперплоскостей, касательных к стенкам (это требование может быть существенно ослаблено для некомпактных бильярдов):

- существует такое $C > 0$, что для всех достаточно малых ε верно следующее: если некоторая точка ε -близка ко всем бортам $\{B_i\}_{i \in I'}$ некоторого поднабора $I' \subset I$, то она $C\varepsilon$ -близка и к их пересечению $\bigcap_{i \in I'} B_i$.

Упражнение 9.4.3. Проверьте это условие для системы шаров в \mathbb{R}^3 .

Подсказка. Наше условие означает, что для каждой такой конфигурации что для любой пары индексов из определенного множества I пар, что

соответствующие шары близки, существует близкая конфигурация, в которой шары каждой пары пересекаются. Это можно показать, выбрав некоторый шар и перемещая остальные шары одновременно и с равными скоростями вдоль отрезков, соединяющих их центры с центром выбранного шара.

Для системы шаров в ящике с вогнутыми бортами предположение о невырожденности выполняется почти всегда, за исключением некоторых “особых” конфигураций, когда возможно “протаскивать шары вплотную к нескольким бортам”. Известно, что в таких ситуациях бильярд может (локально) допускать произвольно большое количество столкновений за единицу времени.

Наш основной результат звучит следующим образом.

Теорема 9.4.4. *Если полурассеивающий бильярд удовлетворяет предположению о невырожденности, то существует число $P < +\infty$ со следующим свойством: каждая точка p бильярда имеет такую окрестность $U(p)$, что каждая содержащаяся в $U(p)$ траектория испытывает не более чем P столкновений.*

При переходе к оценке общего числа столкновений (за бесконечное время) мы хотим избежать ситуации, при которой частица совершает периодические колебания между двумя стенами.

Теорема 9.4.5. *Если полурассеивающий бильярд удовлетворяет предположению о невырожденности, M односвязно и пересечение $\bigcap B_i$ всех стенок не пусто, то существует такое число $P < +\infty$, что каждая траектория испытывает не более, чем P столкновений.*

Конечно, при моделировании газа как системы твердых шаров цилиндры C_{ij} имеют непустое пересечение: нулевой вектор $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{3N}$ принадлежит всем множествам C_{ij} (заметим, что эта точка не соответствует никакой физически реализуемой конфигурации шаров). Можно проверить, что максимальное число столкновений, которое может наблюдаться в системе из N упругих шаров (любых масс и радиусов) никогда не превосходит числа

$$\left(400N^2 \frac{m_{\max}}{m_{\min}}\right)^{2N^4},$$

где m_{\max} и m_{\min} есть, соответственно, максимальная и минимальная массы шаров в системе.

Упражнение 9.4.6. *Тривиальный вопрос.* Как много столкновений может наблюдаться в системе двух шаров в \mathbb{R}^3 , имеющих равные массы?
Трудный вопрос. Как много столкновений может наблюдаться в системе трех шаров в \mathbb{R}^3 , имеющих равные массы?

Ответ. Четыре. Даже построить пример, в котором число столкновений равно четырем, совсем не просто

Набросок доказательства теоремы 9.4.4 для двух стенок.

Чтобы пояснить идею доказательства универсальной оценки для числа столкновений, ограничимся простейшим нетривиальным случаем, для которого ответ не был известен: борта W_1 и W_2 ограничивают два выпуклых множества B_1 и B_2 . В этом случае нам удастся избежать несущественных комбинаторных трудностей и громоздких индексов. Читатель может получить представление о возникающих трудностях, рассматривая поведение частицы, движущейся “почти параллельно линии пересечения стенок W_1 и W_2 ” и колеблющейся между ними испытывая “почти касательные столкновения”. Проблемой состоит в том, чтобы показать, что число таких столкновений может быть оценено сверху числом, не зависящим от того, как близко частица находится от линии пересечения.

Предположим, что M односвязно (иначе можно перейти к универсальному накрывающему). Рассмотрим бильярдную траекторию γ , соединяющую точки x и y , и возьмем некоторую точку $z \in B_1 \cap B_2$. Через $K = \{W_1, W_2, W_1, W_2, \dots\}$ обозначим комбинаторный класс траектории γ и рассмотрим развертку $\tilde{\gamma}$ траектории γ в M_K . Последняя является геодезической, соединяющей некоторые точки x' и y' . По теореме Картана–Адамара 9.2.2 каждая геодезическая в полном односвязном пространстве неположительной кривизны является кратчайшей между своими концами. Заметим, что точка z канонически поднимается в M_K , так как все ее копии в различных копиях пространства M отождествлены между собой. Пусть $z' \in M_K$ — ее подъем. Ясно, что $|zx| = |z'x'|$ и $|zy| = |z'y'|$. Отсюда мы заключаем, что длина геодезической γ между x и y для всех $z \in B_1 \cap B_2$ меньше, чем $|xz| + |zy|$. Другими словами, произвольный путь в M между x и y , пересекающий множество $B_1 \cap B_2$, длиннее, чем отрезок геодезической γ между x и y .

Следующее рассуждение является центральным в доказательстве. Оно показывает, что если траектория испытывает большое количество столкновений, то она может быть так укорочена (с сохранением ее концов) так, что будет проходить через пересечение $B_1 \cap B_2$. Противоречие с предыдущим утверждением позволяет оценить число столкновений.

Предположим, что траектория γ содержится в окрестности $U(p)$ и сталкивается со стенкой W_1 в точках a_1, a_2, \dots, a_N , чередующихся со столкновениями со стенкой W_2 в точках b_1, b_2, \dots, b_N . Пусть z_i — ближайшая к b_i точка пересечения $B_1 \cap B_2$, а h_i — расстояние от b_i до кратчайшей $[a_i a_{i+1}]$. По предположению о невырожденности $|z_i b_i| \leq$

$C \cdot \text{dist}(b_i, B_1) \leq Ch_i$. Таким образом, расстояние H_i от z_i до кратчайшей $[a_i a_{i+1}]$ не превосходит величины $(C + 1)h_i$.

Применяя полученное неравенство $H_i \leq (C + 1)h_i$ между высотами треугольников $\Delta a_i b_i a_{i+1}$ и $\Delta a_i z_i a_{i+1}$ вместе с уже привычным приемом разворачивания этих треугольников на евклидову плоскость и k -плоскость (то есть рассматривая их треугольники сравнения), можно получить неравенство $D_i \leq C_1 \cdot d_i$, где $d_i = |a_i b_i| + |b_i a_{i+1}| - |a_i a_{i+1}|$ и $D_i = |a_i z_i| + |z_i a_{i+1}| - |a_i a_{i+1}|$. Здесь k — нижняя грань секционной кривизны в $U(p)$, а постоянная C_1 зависит только от C (в предположении достаточной малости $U(p)$).

Пусть d_j — наименьшее из чисел $\{d_i\}$. Изменим траекторию γ следующим образом: заменим ее части $a_i b_i a_{i+1}$ на кратчайшие $[a_i a_{i+1}]$ при всех значениях i , кроме $i = j$. Получившаяся кривая короче, чем γ по меньшей мере на $(N - 1)d_j$. Наконец, заменим сегмент $a_j b_j a_{j+1}$ на $a_j z_j a_{j+1}$. Это удлинит путь на $D_j \leq C_1 d_j$. Поэтому $N \leq C_1 + 1$, так как в противном случае мы бы имели кривую с теми же концами, что и γ , проходящую через $z_j \in B_1 \cap B_2$, которая была бы короче, чем γ . Полученное противоречие доказывает локальную ограниченность числа столкновений. \square

Перейдем к доказательству универсальной оценки, где геометрические соображения работают в полную силу. Здесь мы снова, во избежание комбинаторных трудностей, ограничиваемся случаем двух стенок W_1 и W_2 .

Набросок доказательства теоремы 9.4.5 для двух стенок. Рассмотрим траекторию γ , имеющую N столкновений с (единственно возможной) последовательностью стенок $K = \{1, 2, 1, \dots, 2, 1\}$. Доказывая от противного, предположим, что $N > 3P + 1$, где P — локальная граница числа столкновений (ее существование гарантировано теоремой 9.4.4). Снова рассмотрим пространство M_K , однако теперь мы его “замкнем”, склеив $M_0 \in M_K$ и $M_N \in M_K$ вдоль копий B_1 . Полученное пространство обозначим через \widetilde{M} . Формально мы еще не можем воспользоваться теоремой Решетняка 9.1.21, чтобы сделать заключение о неположительности кривизны \widetilde{M} . Действительно, мы отождествили точки одного пространства, а не склеивали два разных пространства вдоль *выпуклого* множества.

Напомним, что пространство имеет неположительную кривизну тогда и только тогда, когда каждая точка имеет такую окрестность, что углы любого треугольника, в ней содержащегося, не превосходят соответствующих углов его евклидова треугольника сравнения. Однако, используя соответствие между геодезическими и бильярдными траекториями, можно заключить (рассуждая в точности как при доказательстве *локальной* оценки числа

столкновений), что никакая сторона маленького треугольника не может пересекать внутренности более чем P копий бильярда. Проверим выполнение условия сравнения углов для достаточно маленького треугольника. Так как $N > 3P + 1$, мы можем “расклеить” наше “замкнутое” пространство \widetilde{M} вдоль одной из склеек, не затрагивая сторон данного треугольника. Такое разрезание может лишь увеличить его углы, и мы обнаруживаем, что снова находимся в пространстве неположительной кривизны (конечно, это M_K), что гарантирует выполнение требуемых неравенств на углы.

Для завершения доказательства осталось заметить, что развертка траектории γ в \widetilde{M} является геодезической, соединяющей две точки в одной копии множества B_1 . Тем самым мы приходим к противоречию, так как с одной стороны любая геодезическая в односвязном пространстве неположительной кривизны является единственной кратчайшей между своими концами, а с другой стороны мы имеем кратчайший путь между данными точками, целиком лежащий в B_1 . \square

Пространства ограниченной снизу кривизны

Эта глава представляет собой введение в теорию пространств ограниченной снизу кривизны. Мы будем рассматривать здесь только полные пространства с внутренней метрикой кривизны $\geq k$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$. На протяжении всей этой главы под “пространством Александрова” всегда понимается (связное) пространство такого типа. В действительности для всех локальных утверждений достаточно локальной полноты.

В случае положительного k нам удобно исключить из класса пространств кривизны $\geq k$ несколько особых одномерных пространств. Мы не будем считать пространствами Александрова кривизны $\geq k$, где $k > 0$, прямую \mathbb{R} , луч \mathbb{R}_+ , отрезки длиннее π/\sqrt{k} и окружности длиннее $2\pi/\sqrt{k}$. Как мы увидим в главе 10.4, исключение этих пространств равносильно условию, что диаметр пространства не превосходит π/\sqrt{k} . Таким образом, в этой главе термин “пространство Александрова кривизны $\geq k$ ” означает (связное) полное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq k$, в случае $k > 0$ не изометричное ни одному из перечисленных исключений.

Развитая теория таких пространств была создана в 1980–90х годах. Здесь мы представим только начальные результаты, относящиеся к основаниям этой теории, и несколько “глобальных” результатов, которые обобщают классические теоремы римановой геометрии. Библиографические данные по поводу более продвинутых результатов и техники могут быть найдены в [BGP], [P1]; другие применения и ссылки смотрите в [GP].

Следующие два основных момента приводят к тому, что теория пространств ограниченной снизу кривизны сильно отличается от теории пространств кривизны, ограниченной сверху. Во-первых, это — теорема Топоногова¹ о глобализации (теорема 10.3.1), которая утверждает, что в произвольном пространстве Александрова кривизны $\geq k$ (для произвольного k и без каких-либо дополнительных топологических предположений типа односвязности), условие сравнения углов выполняется “глобально”. Из этого вытекает ряд глобальных свойств пространств Александрова (напомним, для сравнения, что о пространствах Адамара, обсуждавшихся в главе 9, можно сказать гораздо больше, чем просто о пространствах ограниченной сверху кривизны). Более того, из теоремы Топоногова следует, что класс пространств Александрова кривизны $\geq k$ замкнут относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу. Это позволяет изучать весь этот класс, как “целое” (см. обсуждение в начале главы 7).

Во-вторых, (конечномерные) пространства Александрова имеют замечательную *локальную* структуру. Под размерностью мы понимаем хаусдорфову размерность (см. пункт 1.7.4), но в действительности все известные понятия размерности для пространств Александрова равносильны (в частности, хаусдорфова размерность равна топологической). О некоторых локальных свойствах конечномерных пространств Александрова стоит упомянуть прямо сейчас. Хаусдорфова размерность таких пространств всегда целое число; такие пространства являются многообразиями почти всюду, кроме небольшого множества сингулярных точек (в действительности, “почти римановыми”); пространство направлений n -мерного пространства Александрова является $(n - 1)$ -мерным пространством Александрова кривизны ≥ 1 и в действительности почти во всех точках изометрично S^{n-1} .

Хотя эти утверждения формулируются просто и естественно, известные их доказательства — длинные и технические. Все же мы постараемся не касаться технических деталей нигде, кроме конца этой главы (параграфы 10.8 и 10.9). Некоторое знание о локальной структуре, однако, необходимо уже в первых параграфах; в таких случаях мы отсылаем к соответствующим результатам последних параграфов.

10.1. Условие четырех точек

В главе 4 мы дали несколько равносильных определений пространства неотрицательной кривизны. Заменяя в них \mathbb{R}^2 на k -плоскость, получаем определения пространства кривизны $\geq k$, где k — любое вещественное

¹Точнее было бы называть ее теоремой Александрова–Топоногова–Перельмана, но мы сохраним наше короткое и часто используемое название; эта теорема впервые была доказана Александровым в размерности 2, затем Топоноговым для римановых многообразий любой размерности и, наконец, Перельманом в полной общности

число (см. параграф 4.6). Полученные определения также равносильных между собой, а доказательство этой равносильности почти такое же, как и в случае $k = 0$.

Здесь мы дадим еще одну формулировку, для которой нет аналога в случае кривизны, ограниченной сверху. Главное ее достоинство в логической простоте — она выглядит следующим образом: “для произвольных четырех точек (в малой окрестности) расстояния между ними удовлетворяют определенным неравенствам”. Отметим, что предыдущие определения затрагивали наборы точек, удовлетворяющих дополнительным ограничениям (например, одна является серединой между двумя другими), или привлекались даже углы.

Новая формулировка составляет предмет предложения 10.1.1. Для удобства введем следующие обозначения для углов сравнения, обобщающие соответствующие обозначения из главы 3.

Обозначение. Пусть a, b, c — три различные точки в пространстве с внутренней метрикой. Обозначим через $\tilde{\angle}abc$ и назовем углом сравнения угол в вершине \bar{b} треугольника сравнения $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ на k -плоскости (естественно, предполагается, что k фиксировано). В случае неясности мы добавляем k в качестве индекса: $\tilde{\angle}_kabc$.

Заметим, что угол сравнения $\tilde{\angle}_kabc$ является (непрерывной) функцией расстояний $|ab|$, $|ac|$ и $|bc|$. Эта функция определена, если $|ab| + |ac| + |bc| < 2R_k$, где R_k — диаметр k -плоскости.

Предложение 10.1.1. *Локально компактное пространство X с внутренней метрикой является пространством кривизны, не большей k , тогда и только тогда, когда любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U , что произвольный набор из четырех различных точек $a, b, c, d \in U$ удовлетворяют следующему условию:*

$$(10.1) \quad \tilde{\angle}_kbac + \tilde{\angle}_kcad + \tilde{\angle}_kdab \leq 2\pi.$$

Мы будем называть неравенство (10.1) *условием четырех точек* $(a; b, c, d)$. Заметим, что это условие симметрично относительно точек b, c, d , но a играет особую роль. Предложение 10.1.1 позволяет использовать условие четырех точек в качестве еще одного определения пространств кривизны $\geq k$. Это новое определение не привлекает кратчайшие, а значит, без изменений применимо к пространствам, метрики которых не являются строго внутренними.

Доказательство предложения 10.1.1. Сначала предположим, что (10.1) выполняется для всех четверок точек. Для того, чтобы проверить условие сравнения треугольников (определение 4.1.9) для треугольника Δabc и точки $d \in [ac]$, применим условие четырех точек к набору

$(d; a, b, c)$. Так как $\tilde{\angle}adc = \pi$, то $\tilde{\angle}bdc + \tilde{\angle}bda \leq \pi$. Отсюда по лемме 4.3.3 следует желаемое неравенство $|db| \geq |\bar{d}\bar{b}|$.

Пусть теперь X — пространство кривизны $\geq k$. Рассмотрим четверку $(a; b, c, d)$ и точку a' на кратчайшей $[ab]$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\angle}ba'd + \tilde{\angle}da'c + \tilde{\angle}ca'b &\leq \angle ba'd + \angle da'c + \angle ca'b \\ &\leq (\angle ba'd + \angle da'a) + (\angle da'c + \angle ca'b) = 2\pi. \end{aligned}$$

Мы воспользовались условием сравнения углов (определение 4.1.15), неравенством треугольника для углов и тем, что сумма смежных углов равна π (лемма 4.3.7). Пусть теперь a' стремится к a . Тогда (10.1) вытекает из непрерывности углов сравнения. \square

Мы оставляем в качестве упражнений несколько простых фактов о пространствах кривизны $\geq k$.

Упражнение 10.1.2. Докажите, что геодезические в пространстве кривизны $\geq k$ не разветвляются. Иными словами, если две геодезические имеют общий интервал, то они являются подинтервалами одной геодезической.

Упражнение 10.1.3. Покажите, что из условия на четверки точек следует, что для произвольных трех геодезических, выходящих из одной точки, сумма трех углов между парами этих геодезических не превосходит 2π .

Упражнение 10.1.4. Докажите, что если две геодезические в пространстве кривизны $\geq k$ начинаются в одной точке и образуют в ней нулевой угол, то они одна из них является подинтервалом другой.

Подсказка. Применив условие сравнения углов, получите локальное утверждение, а затем используйте упражнение 10.1.2.

Упражнение 10.1.5. Докажите, что если две кратчайшие в пространстве кривизны $\geq k$ имеют две общие точки, то либо каждая из этих точек является их общим концом, либо обе кратчайшие являются подинтервалами некоторой кратчайшей.

10.2. Конструкции и примеры

Имеется множество примеров пространств Александрова ограниченной снизу кривизны. Несколько простейших примеров уже приводились в главе 4. Сейчас мы приведем два новых примера: факторпространства по группам изометрий и выпуклые поверхности. Во втором примере доказательство того, что эти пространства имеют неотрицательную кривизну, нетривиально и опирается на результаты, которые мы докажем позже.

10.2.1. Произведения и конусы.

Пример 10.2.1 (Произведения). Пусть X и Y — пространство Александра кривизны $\geq k$, где $k \leq 0$. Тогда прямое произведение $X \times Y$ является пространством кривизны $\geq k$.

Доказательство получается прямым вычислением, например, на основе условия сравнения треугольников. См. подсказку к упражнению 4.1.13.

Заметим, что при $k > 0$ произведение пространств кривизны $\geq k$ не является пространством кривизны $\geq k$, кроме случая, когда одно из пространств одноточечно. См. комментарии сразу после 9.1.5.

Действительно, рассмотрим две произвольные кратчайшие в пространствах X и Y . Эти кратчайшие (как подпространства в X и Y) изометричны интервалам прямой; следовательно их произведение в $X \times X$ выпукло и изометрично области в \mathbb{R}^2 . Поэтому $X \times Y$ не может иметь строго положительной кривизны.

Пример 10.2.2 (Конусы). Евклидовы и сферические конусы были уже рассмотрены в пунктах 3.6.2, 3.6.3. Здесь мы дадим единое описание этих конструкций и определим похожее понятие *гиперболического конуса*. Отметим, что, имея в виду пространства ограниченной снизу кривизны, не имеет смысла рассматривать конусы над пространствами диаметра большего, чем π .

Пусть $k \in \mathbb{R}$, а X — метрическое пространство с $\text{diam}(X) \leq \pi$. По определению, k -конус над X , который обозначим через $\text{Con}_k(X)$, состоит из вершины o и всех тех пар (x, r) , для которых $x \in X$, $r > 0$ и, кроме того, $r \leq \pi/\sqrt{k}$, если $k > 0$. Расстояние от (x, r) до вершины полагаем равным r , а расстояние между $a_1 = (x_1, r_1)$ и $a_2 = (x_2, r_2)$ определяем равенством

$$\tilde{\angle}_k a_1 o a_2 = |x_1 x_2|.$$

Другими словами, $|a_1 a_2|$ равняется длине стороны $|\bar{a}_1 \bar{a}_2|$ такого треугольника $\bar{a}_1 \bar{o} \bar{a}_2$ на k -плоскости, что $|\bar{o} \bar{a}_i| = r_i$ для $i = 1, 2$ и $\angle \bar{a}_1 \bar{o} \bar{a}_2 = |x_1 x_2|$.

Если $k > 0$, то нужно отождествить между собой все пары $(x, \pi/\sqrt{k})$ (так как все расстояния между ними равны нулю). Эти пары представляют точку $o' \in \text{Con}_k(X)$, которая может быть выбрана в качестве вершины вместо o (отображение $(x, r) \mapsto (x, \pi/\sqrt{k} - r)$ является изометрией $\text{Con}_k(X)$). В этом случае k -конус также называется k -сферическим конусом или k -надстройкой. Вершины o и o' называются *полюсами* k -надстройки. Стандартная сферическая надстройка, определенная в пункте 3.6.3, соответствует случаю $k = 1$.

Если $k < 0$, то k -конусы также называются $(-k)$ -гиперболическими конусами. *Гиперболическим конусом* называется k -конус для $k = -1$. Если $k = 0$, то k -конус — это обычный (“евклидов”) конус.

По этому определению $\text{Con}_k(S^1)$ изометричен k -плоскости. Аналогично, $\text{Con}_k(S^n)$ является, в зависимости от k , стандартным $(n + 1)$ -мерным пространством постоянной кривизны k , то есть $(n + 1)$ -мерной сферой радиуса $1/\sqrt{k}$, гиперболическим пространством (кривизны k) или \mathbb{R}^{n+1} , в зависимости от k .

В этой главе конусы возникают в первую очередь как конусы над пространствами направлений и играют столь же первостепенную роль, как касательные пространства в теории римановых многообразий. Заметим, что каждое пространство X может быть представлено как пространство направлений конуса $\text{Con}_k(X)$ в его вершине.

Результаты параграфа 4.7 об ограниченности кривизны конусов могут быть сформулированы для пространств Александрова проще благодаря теореме Топоногова 10.3.1 (утверждающей, что условие сравнения треугольников всегда выполняется глобально) и следствию 10.4.2 (утверждающему, что периметр любого треугольника в пространстве кривизны ≥ 1 не превосходит 2π). Именно:

Теорема 10.2.3. *Пусть X — полное метрическое пространство, а $k \in \mathbb{R}$.*

1. *Если X — пространство Александрова кривизны ≥ 1 , то $\text{Con}_k(X)$ является пространством Александрова кривизны $\geq k$.*

2. *Если $\text{Con}_k(X)$ является пространством Александрова кривизны ≥ 1 и, кроме того, $|xy| + |yz| + |xz| \leq 2\pi$ для всех $x, y, z \in X$, то X является либо пространством Александрова кривизны ≥ 1 , либо пространством, состоящим из двух точек на расстоянии π друг от друга.*

Доказательство этой теоремы по существу не отличается от доказательства теоремы 4.7.1. Заметим, что во второй части теоремы мы не предполагаем дополнительно, что метрика в X является внутренней. Благодаря другим предположениям, это свойство следует из того, что метрика пространства $\text{Con}_k(X)$ — внутренняя. В противоположность случаю кривизны, ограниченной сверху, мы здесь даже не предполагаем, что X связно: кривизна конуса над X не может быть ограничена снизу, если X не связно (за исключением тривиального случая двухточечного пространства).

10.2.2. Факторпространства. Напомним (см. параграф 3.3), что если группа Γ действует на метрическом пространстве (X, d) изометриями и

орбиты $o(p) = \{\gamma p : \gamma \in \Gamma\}$ — замкнуты, то мы снабжаем факторпространство $Q = X/\Gamma$ сильнейшей топологией, в которой каноническая проекция $\pi : X \rightarrow Q$, $\pi(p) = o(p)$ еще непрерывна. Также мы снабжаем Q метрикой ρ так, чтобы

$$(10.2) \quad \rho(o(p), o(q)) = \inf\{d(p, r) | r \in o(q)\}.$$

Предложение 10.2.4. *Если (X, d) — пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq k$, а группа Γ действует на X изометриями с замкнутыми орбитами, то $Q = X/\Gamma$ также является пространством кривизны $\geq k$.*

Доказательство. Чтобы упростить рассмотрения, предположим, что X локально компактно. Пусть $p_0 \in Q$, а $p \in \pi^{-1}(p_0)$, где $\pi : X \rightarrow Q$ — проекция на Q . Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $U = B_r(p)$ являлся нормальной окрестностью в том смысле, что условие на четверки (см. предложение 10.1.1) выполнено для любой четверки точек, лежащих в U . Мы покажем, что тогда эти условия выполняются в шаре $U_0 = B_{r/2}(p_0)$ факторпространства. Пусть $(a_0; b_0, c_0, d_0)$ — четверка точек из U_0 . Так как X локально компактно, и орбита $\pi^{-1}(a_0)$ замкнута, то существует ближайшая к p точка $a \in \pi^{-1}(a_0)$, то есть, $|pa| = \text{dist}(p, \pi^{-1}(a_0))$. Из определения (10.2) факторпространства следует, что $|pa| = |p_0a_0|$. Затем аналогично можно найти такие точки $b, c, d \in U$, что $|ab| = |a_0b_0|$, $|ac| = |a_0c_0|$ и $|ad| = |a_0d_0|$. Заметим, что $a, b, c, d \in U$. По (10.2) мы имеем $\tilde{|bc|} \geq \tilde{|b_0c_0|}$, $\tilde{|cd|} \geq \tilde{|c_0d_0|}$ и $\tilde{|db|} \geq \tilde{|d_0b_0|}$. Следовательно, $\tilde{\angle bac} \geq \tilde{\angle b_0a_0c_0}$, $\tilde{\angle cad} \geq \tilde{\angle c_0a_0d_0}$ и $\tilde{\angle bad} \geq \tilde{\angle b_0a_0d_0}$. Поэтому

$$\tilde{\angle b_0a_0c_0} + \tilde{\angle c_0a_0d_0} + \tilde{\angle b_0a_0d_0} \leq \tilde{\angle bac} + \tilde{\angle cad} + \tilde{\angle bad} \leq 2\pi,$$

Откуда следует наше предложение. \square

Это предложение часто используется для того, чтобы строить примеры пространств ограниченной снизу кривизны. Следующий пример — один из простейших примеров такого рода. Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{e, \gamma\}$ действует на \mathbb{R}^3 симметриями: $\gamma(x) = -x$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Тогда $Q_2 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_2$ является пространством неотрицательной кривизны.

Упражнение 10.2.5. Проверьте, что Q_2 не является многообразием. Докажите, что Q_2 изометрично конусу $K(\mathbf{P}^2)$ над проективным пространством \mathbf{P}^2 , снабженным канонической метрикой постоянной кривизны 1.

Аналогично, если группа G действует на стандартной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ изометриями, то $Q = S^n/G$ является пространством кривизны ≥ 1 . Заметим, что если G действует свободно (то есть без неподвижных точек), то Q будет римановым многообразием; иначе же Q может

иметь метрические или даже топологические особенности. Например, рассмотрим действие группы $G = Z_2 = \{e, \gamma\}$ на S^n , определенное равенством

$$\gamma(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_n, x_{n+1}).$$

В этом случае факторпространством будет сферический конус над \mathbf{P}^{n-1} .

10.2.3. Выпуклые поверхности в \mathbb{R}^3 . Метрики ограниченной снизу кривизны изначально появились в работах А. Д. Александрова как метрики неотрицательной кривизны на двумерных поверхностях. Александров доказал, что класс (ориентируемых) двумерных пространств с внутренней метрикой неотрицательной кривизны по существу совпадает с классом внутренних метрик выпуклых поверхностей в \mathbb{R}^3 . В этом параграфе мы докажем часть этого утверждения, а именно, что любая выпуклая поверхность в \mathbb{R}^3 с ее индуцированной (внутренней) метрикой является пространством неотрицательной кривизны.

Другая часть этого утверждения — это замечательная теорема, утверждающая, что любое гомеоморфное двумерной сфере пространство с внутренней метрикой неотрицательной кривизны изометрично границе выпуклого тела в \mathbb{R}^3 или ее вырожденному случаю — дважды покрытой плоской выпуклой области (то есть двум экземплярам такой области, склеенным по их границам). Например, из этой теоремы легко следует, что любая точка двумерного многообразия с метрикой неотрицательной кривизны имеет окрестность, изометричную подмножеству границы выпуклого тела в \mathbb{R}^3 .

Аналогичные результаты могут быть доказаны для метрик кривизны $\geq k$ и поверхностей в пространствах постоянной кривизны k . То, что пространство должно быть многообразием, не существенно, так как можно доказать, что любое двумерное пространство ограниченной снизу кривизны является многообразием, возможно с краем.

Теорема 10.2.6. *Внутренняя метрика выпуклой поверхности в \mathbb{R}^3 является метрикой неотрицательной кривизны.*

Под выпуклой поверхностью S мы понимаем границу выпуклого тела X в \mathbb{R}^3 . Чтобы класс рассматриваемых поверхностей стал замкнутым, имеет смысл добавить “вырожденные поверхности”. Эта теорема тривиальна для выпуклых множеств размерностей 0 и 1. Если $\dim X = 2$, мы будем рассматривать не границу множества X , а дважды покрытую выпуклую замкнутую область в \mathbb{R}^2 , то есть две копии множества X , склеенные по их границам (выпуклым кривым). В этом случае теорему легко доказать. Случай неограниченного X сводится к случаю компактного X в силу локальности теоремы. Поэтому будем считать, что X — выпуклое тело.

Доказательство теоремы 10.2.6. Предположим, что X — выпуклое тело, то есть выпуклый компакт с непустой внутренностью. Пусть $C = \partial X$. Идея доказательства очень проста: мы приближаем X выпуклыми многогранниками и доказываем, что внутренние метрики их границ сходятся к внутренней метрике C . Легко проверить, что внутренняя метрика поверхности выпуклого многогранника имеет неотрицательную кривизну. Позже, в параграфе 10.3, мы покажем, что предел по Громову–Хаусдорфу пространств неотрицательной кривизны тоже пространство неотрицательной кривизны (предложение 10.7.1). Применение этого предложения завершает доказательство. Теперь перейдем к формальным деталям.

Лемма 10.2.7. *Если выпуклые тела $X_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i \rightarrow \infty$) сходятся в метрике Хаусдорфа к выпуклому телу $X \subset \mathbb{R}^3$, то внутренние метрики их поверхностей $C_i = \partial X_i$ равномерно сходятся (см. определение 7.1.5) к внутренней метрике $C = \partial X$.*

Доказательство. Обозначим внутренние метрики пространств C и C_i через d и d_i , соответственно. Мы можем предположить, что начало координат 0 принадлежит внутренности тела X ; следовательно X содержит шар $B_r(0)$ для некоторого $r > 0$. Так как X выпукло, то произвольный луч, выходящий из 0 , пересекает $C = \partial X$ ровно один раз. Следовательно определено центральное проектирование из $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ на C (которое отображает каждый луч с началом 0 в точку его пересечения с поверхностью C). Мы докажем, что это центральное проектирование, суженное на C_i , является гомеоморфизмом из C_i на C (для достаточно больших i), а его искажение стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$.

Во-первых, рассмотрим такие выпуклые тела X и X' в \mathbb{R}^3 , что $B_r(0) \subset X \subset X'$. Пусть $C = \partial X$, $C' = \partial X'$, а d и d' — внутренние метрики пространств C и C' , соответственно. Пусть δ будет максимальным расстоянием между точкой из C' и ее центральной проекции в C . Мы хотим оценить, сколь сильно центральное проектирование из C' в C может увеличивать расстояния во внутренней метрике. Ключевую роль в доказательстве играет следующая “лемма Буземана–Феллера”:

(i) Для произвольной точки $a' \in \mathbb{R}^3$ ближайшая к ней точка $a \in X$ (то есть такая, что $|a - a'| = \text{dist}(a', X)$) существует и единственна.

(ii) Если $a, b \in X$ — ближайšie к точкам $a', b' \in \mathbb{R}^3$ точки тела X , соответственно, то $|a - b| \leq |a' - b'|$.

Для доказательства (i) предположим, что a_1 и a_2 — ближайšie к a' точки пространства X . Так как X выпукло, то точка a , середина отрезка $[a_1 a_2]$, принадлежит X . Но $|a' - a| < \frac{1}{2}(|a' - a_1| + |a' - a_2|)$. Следовательно a_1 и a_2 — не ближайšie к a' точки.

Чтобы доказать (ii), покажем, что углы $\angle abb'$ и $\angle baa'$ не меньше, чем $\pi/2$. Действительно, если $\angle abb' < \pi/2$, то отрезок $[ab] \subset X$ содержит точку b_1 , для которой $|b' - b_1| < |b' - b|$ (например, возьмите b_1 близко к b). Так как $\angle abb' \geq \pi/2$ и $\angle baa' \geq \pi/2$, то проекция отрезка $[ab]$ на прямую $a'b'$ содержит отрезок $[a'b']$. Следовательно, $[ab]$ не длиннее, чем $[a'b']$.

Лемму Буземана–Феллера можно переформулировать следующим образом: отображение из \mathbb{R}^3 в X , которое сопоставляет каждой точке ближайшую к ней точку из X , определено корректно и не увеличивает расстояния. Мы назовем это отображение *ортогональным проектированием* на X . Так как такое проектирование не увеличивает расстояние, то оно не увеличивает и длины кривых. Поэтому, если a', b' принадлежат C' , а a_0, b_0 — их ортогональные проекции на X , то $d(a_0, b_0) \leq d'(a', b')$. (Заметим, что a_0 и b_0 лежат на C , так как $X \subset X'$.)

Пусть теперь a и b — центральные проекции точек a' и b' на C . Рассмотрим прямолинейный отрезок $[aa']$ и спроектируем его ортогонально на C . Полученная кривая γ соединяет точку a с точкой a_0 по поверхности C , причем $L(\gamma) \leq L([aa']) \leq \delta$. Поэтому $d(a, a_0) \leq \delta$ и, аналогично, $d(b, b_0) \leq \delta$. Следовательно, $d(a, b) \leq d'(a', b') + 2\delta$.

Теперь вернемся к первоначальной задаче. Мы оставим в качестве упражнения следующий факт о выпуклых телах: сходимость по Хаусдорфу $\{X_i\}$ к X влечет существование такой последовательности положительных чисел ε_i , что $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и $(1 - \varepsilon_i)X \subset X_i \subset (1 + \varepsilon_i)X$ для всех достаточно больших i . В частности, точка 0 является внутренней и для тел X_i . Применяя приведенные оценки к центральному проектированию из X_i в $(1 - \varepsilon_i)X$, мы получаем, что

$$(1 - \varepsilon_i)d(a, b) \leq d_i(a_i, b_i) + 2\varepsilon_i D,$$

где $D = \text{diam}(X)$, а точки a_i и b_i — это центральные проекции точек a и b на X_i . Применяя те же оценки к центральной проекции из $(1 + \varepsilon_i)X$ в X_i , мы получаем, что

$$d(a_i, b_i) \leq (1 + \varepsilon_i)d(a, b) + 2\varepsilon_i D.$$

Из этих двух неравенств следует, что искажение при центральном проектировании не превосходит $\varepsilon_i(\text{diam}(C, d) + 2D)$.

Заметим, что $\text{diam}(C, d) < \infty$. В самом деле, $\text{diam}(C, d) \leq \pi D$, так как ортогональное проектирование из сферы радиуса D на C является сюръективным и не увеличивает расстояния. Из ограниченности диаметра следует, что искажения при центральном проектировании стремятся к нулю при $i \rightarrow \infty$. Следовательно (C_i, d_i) равномерно сходятся к (C, d) . \square

Нетрудно видеть, что X можно аппроксимировать выпуклыми многогранниками P_i . Например, в качестве P_i можно взять выпуклую оболочку конечной ε_i -сети множества X , где $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Как мы уже видели в главе 4 (теорема 4.2.14), поверхность выпуклого многогранника является пространством неотрицательной кривизны. Следовательно, по предыдущей лемме, C (с индуцированной внутренней метрикой) является равномерным пределом полиэдральных пространств неотрицательной кривизны. Теперь наша теорема следует из предложения 10.7.1, утверждающего, что ограничение кривизны снизу сохраняется при предельном переходе по Громову–Хаусдорфу. \square

Обобщения. Теорема 10.2.6 справедлива и для выпуклых гиперповерхностей в \mathbb{R}^n для всех $n \geq 3$. Доказательство остается практически тем же самым. (Однако обратная теорема о том, что любое пространство неположительной кривизны локально изометрично выпуклой гиперповерхности, в старших размерностях уже не верна.)

Более того, можно заменить \mathbb{R}^n на сферическое или гиперболическое пространство кривизны k . В этом случае выпуклые гиперповерхности имеют кривизну $\geq k$. Более общий (и не такой простой) результат, утверждающий, что выпуклая гиперповерхность в произвольном римановом многообразии кривизны $\geq k$ также является пространством кривизны $\geq k$, доказан С. В. Буяло [Buy]. До сих пор неизвестно, всегда ли граница выпуклого множества в произвольном пространстве Александрова кривизны $\geq k$ также является пространством кривизны $\geq k$.

10.3. Теорема Топоногова

Теорема Топоногова является “теоремой о глобализации”. Пространства ограниченной снизу кривизны определяются локальными условиями, то есть требуется, чтобы некоторое условие, скажем, условие сравнения треугольников, выполнялись в некоторой окрестности каждой точки. Теорема Топоногова утверждает, что тогда то же самое выполняются “в целом”, то есть, скажем, для всех треугольников (см. определение 4.6.6 в параграфе 4.6.2). В отличие от случая кривизны, ограниченной сверху (теорема 9.2.9), теорема Топоногова остается верной независимо от знака постоянной, ограничивающей кривизну, и, что даже важнее, не требует никаких топологических условий типа односвязности.

В двумерном случае теорема была доказана А.Д. Александровым. В.А. Топоногов доказал ее для римановых многообразий произвольной размерности. Общий случай этой теоремы принадлежит Г.Я. Перельману.

Теорема 10.3.1 (Теорема Топоногова). *Пусть X — полное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq k$. Тогда X — пространство кривизны $\geq k$ в целом.*

Замечание 10.3.2. Напомним, что слова “в целом” означают, что условие сравнения треугольников выполняется для всех тех треугольников, для которых треугольники сравнения существуют и единственны. Последнее ограничение на треугольники нетривиально только при $k > 0$ и почти равносильно тому, что периметр треугольника не превосходит $2\pi/\sqrt{k}$. В пункте 4.1.15 мы покажем, что в действительности в пространстве Александрова кривизны $\geq k$ вообще не существует треугольников с периметрами, большими, чем $2\pi/\sqrt{k}$.

Доказательство теоремы 10.3.1 довольно сложно и его изучение вряд ли надо считать обязательным, особенно при первом чтении. Для того, чтобы упростить рассмотрения, докажем теорему только для локально компактных пространств и оставим читателям большинство технических деталей, возникающих дополнительно в случае $k > 0$. Другое доказательство можно найти в [BGP].

Доказательство теоремы 10.3.1. Равносильность различных определений пространства кривизны, ограниченной снизу в целом, доказывается точно так же, как в случае “локальных” определений. Поэтому достаточно доказать, что “условие сравнения углов” 4.1.15 выполняется для любого треугольника. Заметим, что углы между кратчайшими существуют, а сумма смежных углов равняется π , так как эти свойства являются локальными.

Мы докажем теорему для случая $k \leq 0$ и объясним, как следует его модифицировать его при $k > 0$.

Шаг 1. Предположим, что теорема неверна. Тогда существует треугольник Δpqr , удовлетворяющий следующим условиям:

(i) условие на углы не выполняется для его угла при вершине q , то есть, $\angle pqr < \tilde{\angle} pqr$.

(ii) Условие на углы выполняется для каждого треугольника, периметр которого не превосходит $0.99R$, а вершины содержатся в шаре $B_{100R}(q)$, где $R = \text{per}(\Delta pqr) = |pq| + |pr| + |qr|$.

Докажем существование такого треугольника. Рассуждая от противного, построим последовательность треугольников $\{\Delta p_i q_i r_i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $p_1 q_1 r_1$ — такой треугольник, что $\angle p_1 q_1 r_1 < \tilde{\angle} p_1 q_1 r_1$. Для $i = 1, 2, \dots$ положим $R_i = \text{per}(\Delta p_i q_i r_i)$, и пусть $\Delta p_{i+1} q_{i+1} r_{i+1}$ — треугольник с периметром, не большим, чем $0.99R_i$, с вершинами в $B_{100R_i}(q_i)$, и такой, что

$$\angle p_{i+1} q_{i+1} r_{i+1} < \tilde{\angle} p_{i+1} q_{i+1} r_{i+1}.$$

Тогда $R_{i+1} \leq 0.99R_i \leq (0.99)^i R_1$. Так как $|q_i q_{i+1}| \leq 100R_i$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |q_i q_{i+1}|$ сходится. Следовательно, $\{q_i\}$ является последовательностью

Коши. Пусть $q = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i$, а U — нормальная окрестность точки q . Тогда $\Delta p_i q_i r_i \subset U$ для достаточно больших i . Следовательно, треугольники $\Delta p_i q_i r_i$ должны удовлетворять условию на углы. Противоречие.

Шаг 2. Пусть Δpqr удовлетворяет условиям (i) и (ii) из шага 1. Покажем, что тогда существует треугольник Δabc с вершинами в $B_R(q)$, являющийся “тонким” в том смысле, что $|ac| < 0.01 R$, имеющий периметр, не превосходящий R , и такой, что для угла $\angle bac$ условие на углы не выполняется.

Чтобы доказать это, разделим сторону $[qr]$ треугольника Δpqr на маленькие участки точками $c_0 = q, c_1, \dots, c_n = r$ так, чтобы каждый треугольник $\Delta c_i p c_{i+1}$ являлся “тонким” (то есть, чтобы $|c_i c_{i+1}| < 0.01 R$). Заметим, что периметры треугольников $\Delta c_i p c_{i+1}$ не превосходят $\text{per}(\Delta pqr) \leq R$. Мы хотим показать, что условие на углы не выполняется для одного из углов $\angle p c_i c_{i+1}$ или $\angle p c_{i+1} c_i$ в одном из этих треугольников. Предположим, что это не так. Тогда можно доказать по индукции, что условие на углы выполняется для углов в вершинах q и c_i в треугольниках $\Delta q p c_i$ при $i = 1, \dots, n$. Действительно, предположим, что это верно для $\Delta q p c_i$ ($i < n$). Расположим треугольники сравнения $\Delta \bar{q} \bar{p} \bar{c}_i$ и $\Delta \bar{c}_i \bar{p} \bar{c}_{i+1}$ в k -плоскости в разных полуплоскостях относительно их общей стороны $\bar{p} \bar{c}_i$. Тогда из леммы 4.3.3 следует, что

$$\tilde{\angle} p q c_{i+1} \leq \angle \bar{p} \bar{q} \bar{c}_i = \tilde{\angle} p q c_i \leq \angle p q c_i = \angle p q c_{i+1}$$

и, аналогично, $\tilde{\angle} p c_{i+1} q \leq \angle p c_{i+1} q$. Это завершает индукционный переход. Пусть теперь $i = n$. Тогда из утверждения, которое мы только что доказали, следует, что условие на углы выполняется для треугольника $\angle pqr$, что противоречит нашему предположению.

Шаг 3. Пусть Δabc — “тонкий” треугольник, построенный на шаге 2, причем такой, что условие на углы не выполняется для вершины c . Обозначим через d середину отрезка $[bc]$. Тогда $|bd| = |cd| \leq \frac{1}{4}R$, $|ad| \leq 0.26 R$ и $\text{per}(\Delta adc) \leq 0.52 R$. Следовательно, условие на углы выполняется для углов треугольника Δadc . Поэтому из леммы 4.3.3 (сравните с шагом 2) следует, что $\angle adb < \tilde{\angle} adb$. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что

$$(10.3) \quad \angle adb \leq \tilde{\angle} adb - \varepsilon = \angle \bar{a} \bar{d} \bar{b} - \varepsilon,$$

где $\Delta \bar{a} \bar{d} \bar{b}$ — треугольник сравнения.

Возьмем точку x , близкую к d , и расположим треугольники сравнения для треугольников Δadb , Δaxb , Δaxd и Δdxb так, как это показано на рисунке 10.3. Мы хотим выбрать точку x так, чтобы треугольники сравнения $\Delta \bar{a} \bar{b} \bar{x}_3$, $\Delta \bar{d} \bar{b} \bar{x}_2$ и $\Delta \bar{a} \bar{d} \bar{x}_1$ имели непересекающиеся внутренности и $\angle \bar{x}_1 \bar{d} \bar{x}_2 \geq \varepsilon$. Для того, чтобы найти такую точку x , сделаем следующее.

Выберем точки a_1 и b_1 на кратчайших $[ad]$ и $[bd]$ вблизи точки d и возьмем в качестве x середину кратчайшей $[a_1b_1]$.

Заметим, что условия на углы выполняются для всех треугольников Δaa_1x , Δa_1dx , Δbb_1x , Δb_1dx и Δa_1db_1 , так как их периметры меньше, чем $0.99R$. Используя это и условие монотонности углов, мы получаем

$$\angle \bar{a}\bar{d}\bar{x}_1 + \angle \bar{b}\bar{d}\bar{x}_2 \leq \tilde{\angle} a_1dx_1 + \tilde{\angle} b_1dx_2 \leq \tilde{\angle} a_1db_1 \leq \angle adb \leq \angle \bar{a}\bar{d}\bar{b} - \varepsilon.$$

Следовательно, треугольники $\Delta \bar{a}\bar{d}\bar{x}_1$ и $\Delta \bar{b}\bar{d}\bar{x}_2$ (см. рисунок 10.3 не имеют общих внутренних точек и, кроме того,

$$\angle \bar{x}_1\bar{d}\bar{x}_2 = \angle \bar{a}\bar{d}\bar{b} - \angle \bar{a}\bar{d}\bar{x}_1 - \angle \bar{b}\bar{d}\bar{x}_2 \geq \varepsilon.$$

Так как $|\bar{a}\bar{x}_3| = |\bar{a}\bar{x}_1|$ и $|\bar{b}\bar{x}_3| = |\bar{b}\bar{x}_2|$, то треугольник $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{x}_3$ не имеет общих внутренних точек с $\Delta \bar{a}\bar{d}\bar{x}_1$ и $\Delta \bar{b}\bar{d}\bar{x}_2$.

PSfrag replacements

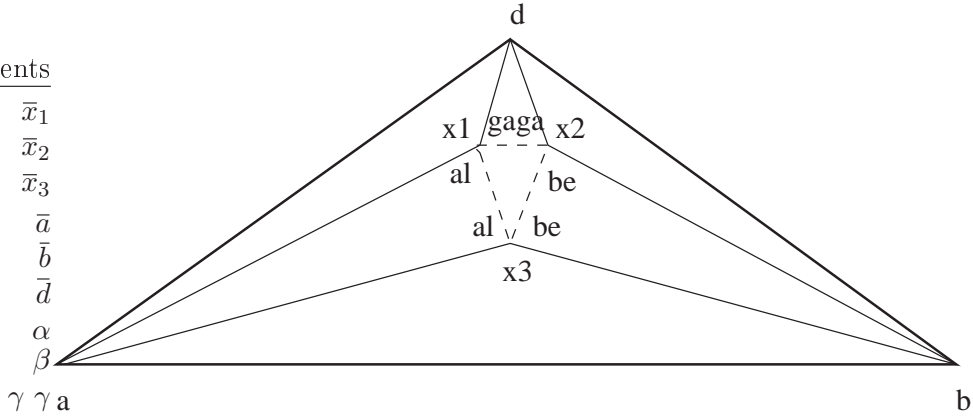


Рис. 10.1: Теорема Топоногова, шаг 3.

Шаг 4. Пусть $\alpha = \angle \bar{a}\bar{x}_1\bar{x}_3 = \angle \bar{a}\bar{x}_3\bar{x}_1$, $\beta = \angle \bar{b}\bar{x}_2\bar{x}_3 = \angle \bar{b}\bar{x}_3\bar{x}_2$ и $\gamma = \angle \bar{d}\bar{x}_1\bar{x}_2 = \angle \bar{d}\bar{x}_2\bar{x}_1$ (см. рисунок 10.3). Применяя теорему Гаусса-Бонне к треугольнику $\Delta \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ и учитывая, что $2\alpha \leq \pi$, $2\beta \leq \pi$, $2\gamma + \varepsilon \leq 2\gamma + \angle \bar{x}_1\bar{d}\bar{x}_2 \leq \pi$ (здесь мы используем наше предположение, что $k \leq 0$), мы получаем, что

$$\begin{aligned} 2\pi &= \omega(\Delta \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + (\angle \bar{a}\bar{x}_1\bar{d} + \angle \bar{d}\bar{x}_2\bar{b} + \angle \bar{a}\bar{x}_3\bar{b}) - 3\pi \\ &\leq (3\pi - \varepsilon) + (\angle axd + \angle dxb + \angle axb) + (-\angle axb + \angle \bar{a}\bar{x}_3\bar{b}) - 3\pi, \end{aligned}$$

где интегральная кривизна $\omega(E) = k \cdot \text{Area}(E) \leq 0$. Из того, что $\angle axd + \angle dxb + \angle axb \leq 2\pi$, следует, что

$$\tilde{\angle} axb - \angle axb = \angle \bar{a}\bar{x}_3\bar{b} - \angle axb > \varepsilon.$$

С другой стороны, $|ax| + |bx| \leq |ad| + |db| - \frac{\varepsilon}{10}|dx|$, если $|dx|$ достаточно мало.

Шаг 5. Рассмотрим множество S всех тех треугольников Δayb (где a и b фиксированы), что

- (i) $\tilde{\angle} ayb - \angle ayb \geq \varepsilon$ и
- (ii) $\max\{|ay|, |by|\} \leq 0.26 R$.

Мы предположили, что это множество не пусто. Так как наше пространство локально компактно, существует треугольник $\Delta abd \in S$, для которого

$$|ad| + |bd| = \min\{|ay| + |yb| : \Delta ayb \in S\}.$$

Однако из шага 4 следует, что можно найти такую точку x (близкую к d), что $\Delta axb \in S$ и $|ax| + |xb| < |ad| + |db|$. Это противоречие доказывает теорему для случая $k \leq 0$.

Шаг 6. Если $k > 0$, то работает та же схема, но с некоторыми изменениями. Во-первых, нужно аккуратно проверить, что все рассматриваемые треугольники сравнения существуют и единственны. Во-вторых, в неравенствах, которые следуют из формулы Гаусса-Бонне на шаге 4, теперь нельзя отбросить интегральные кривизны треугольников $\Delta \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ и $\bar{d} \bar{x}_1 \bar{x}_2$. В результате нельзя получить условие (i) на шаге 5, когда треугольник Δadb заменяется треугольником Δaxb . Для того, чтобы спасти доказательство, надо заменить условие (i) на шаге 5 на более сложное условие, точнее, на условие

$$(10.4) \quad (\tilde{\angle} ayb - \angle ayb) - c(|ay| + |yb|) \geq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

где c — достаточно малая положительная константа. Тогда уменьшение первого члена в (10.4) компенсируется вкладом второго члена. Мы оставляем детали читателю в качестве упражнения.

Читатель, который проверил все эти детали, наверное уже заметил, что наши доводы работают только для треугольников с периметром строго меньшим, чем $2\pi/\sqrt{k}$. Поэтому нам надо рассмотреть случай треугольника Δabc с периметром $|ab| + |bc| + |ac| = 2\pi/\sqrt{k}$ и доказать, что $\angle abc = \pi$, если $\max\{|ab|, |bc|\} < \pi/\sqrt{k}$. Зафиксируем положительное $\varepsilon < k$. Заметим, что пространство кривизны $\geq k$ также является пространством кривизны $\geq k - \varepsilon$. Применяя уже доказанную часть теоремы к пространству X как к пространству кривизны $\geq k - \varepsilon$, мы получаем, что $\angle abc \geq \tilde{\angle}_{k-\varepsilon} abc$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ треугольники сравнения для Δabc в $(k - \varepsilon)$ -плоскостях сходятся к треугольнику сравнения в k -плоскости. Так как $\tilde{\angle}_{k-\varepsilon} abc \rightarrow \tilde{\angle}_k abc = \pi$, если $\varepsilon \rightarrow 0$, то мы получаем $\angle abc \geq \pi$. \square

10.4. Кривизна и диаметр

Этот параграф можно рассматривать как дополнение к теореме Топоногова в случае, если $k > 0$. Эта теорема утверждает, что если треугольник “не слишком большой” (то есть такой, что для него существует

единственный, с точностью до изометрии, треугольник сравнения на k -плоскости), то он удовлетворяет условиям сравнения углов. “Не слишком большой” здесь означает, что периметр не превосходит $2\pi/\sqrt{k}$. (Следует также исключить треугольники $\triangle abc$ с $|ac| = \pi/\sqrt{k}$ и $|ab| + |bc| = \pi/\sqrt{k}$, для которых треугольники сравнения не единственны. Или вместо этого выбирать для них треугольники сравнения так, чтобы у них сторона, соответствующая $[ac]$, проходила через точку, соответствующую точке b .)

Возникает вопрос: что можно сказать о треугольниках с периметром большим, чем $2\pi/\sqrt{k}$? В это параграфе мы дадим простой ответ: таких треугольников не существует. Напомним, что мы исключили из класса пространств Александрова кривизны $\geq k > 0$ некоторые пространства. Исключения таковы: окружности длины большей, чем $2\pi/\sqrt{k}$, отрезки длины большей, чем π/\sqrt{k} , луч \mathbb{R}_+ и прямая \mathbb{R} .

Теорема 10.4.1. *Диаметр пространства Александрова X кривизны $\geq k$, где $k > 0$, не превосходит π/\sqrt{k} .*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие точки $a, b \in X$, что $|ab| > \pi/\sqrt{k}$. Мы можем предположить, что $|ab| = (\pi + \varepsilon)/\sqrt{k}$, где $0 < \varepsilon < \pi/4$. Середину кратчайшей $[ab]$ обозначим через c , и пусть U — $\varepsilon/(3\sqrt{k})$ -окрестность точки c .

Сначала покажем, что U содержит точку, не принадлежащую $[ab]$. Действительно, предположим противное. Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим кратчайшую γ , соединяющую точки c и x . Из нашего предположения следует, что эта кратчайшая совпадает в окрестности точки c с подинтервалом кратчайшей $[ab]$. Так как геодезические не разветвляются (упражнение 10.1.2), то x принадлежит единственной геодезической, содержащей $[ac]$. Поэтому X покрывается двумя кратчайшими, начинающимися в точке c и проходящими через a и b соответственно. Перебирая возможные случаи (являются ли геодезические конечными или бесконечными, а также совпадают ли их концы), мы легко получаем, что X — одно из одномерных исключенных пространств.

Возьмем $x \in U \setminus [ab]$ и обозначим через y ближайшую к точке x точку на кратчайшей $[ab]$. Тогда $|ay| > \pi/2\sqrt{k}$ и $|by| > \pi/2\sqrt{k}$. Из формулы первой вариации следует (см. следствие 4.5.7), что $\angle xya = \angle xyb = \pi/2$. Рассмотрим треугольник сравнения $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{a}$ на k -плоскости для треугольника $\triangle xy a$. (Напомним, что эта k -плоскость — просто сфера радиуса $1/\sqrt{k}$.) По теореме Топоногова $\angle \bar{x}\bar{y}\bar{a} \leq \angle xy a = \pi/2$. Следовательно, используя неравенство $|\bar{y}\bar{a}| > \pi/2\sqrt{k}$, мы получаем, что $|\bar{x}\bar{a}| < |\bar{y}\bar{a}|$. (Для того, чтобы это увидеть, поместим \bar{a} в северном полюсе сферы. Теперь из неравенства $\angle \bar{x}\bar{y}\bar{a} \leq \pi/2$ следует, что \bar{x} лежит выше большой окружности, проходящей через \bar{y} ортогонально меридиану $[\bar{a}\bar{x}]$.)

Так как точка \bar{y} лежит строго ниже экватора, то \bar{y} — самая нижняя точка этой большой окружности. Следовательно \bar{y} лежит строго ниже, чем \bar{x} , то есть $|\bar{x}\bar{a}| < |\bar{y}\bar{a}|$.) Таким образом, $|xa| < |ya|$ и, аналогично, $|xb| < |yb|$. Следовательно $|ya| + |yb| > |xa| + |xb| \geq |ab|$. Это противоречит тому, что y принадлежит кратчайшей $[ab]$. \square

Следствие 10.4.2. *Периметр любого треугольника в пространстве Александрова X кривизны $\geq k$, где $k > 0$, не превосходит $2\pi/\sqrt{k}$.*

Доказательство. Сначала мы докажем теорему при дополнительном условии, что $\text{diam } X$ строго меньше, чем π/\sqrt{k} . Предположим противное и пусть точки $x, y, z \in X$ таковы, что $|xy| + |yz| + |xz| > 2\pi/\sqrt{k}$. Зафиксируем кратчайшие $[xy]$ и $[xz]$. По непрерывности существуют такие точки $y' \in [xy]$ и $z' \in [xz]$, что $|xy'| + |xz'| + |y'z'| = 2\pi/\sqrt{k}$. Рассмотрим треугольник $\Delta xy'z'$. Так как $\text{diam } X < \pi/\sqrt{k}$, то длины его сторон меньше, чем π/\sqrt{k} . Поэтому для треугольника $\Delta xy'z'$ корректно определен треугольник сравнения $\Delta \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'$ в k -плоскости. Так как периметр треугольника $\Delta \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'$ равен $2\pi/\sqrt{k}$, а длины всех его сторон меньше, чем π/\sqrt{k} , то его углы равны π . Поэтому, в силу теоремы Топоногова, $\angle xy'z' = \angle xz'z' = \pi$. Следовательно $\angle z'z'y' = \angle y'y'z' = 0$. Отсюда следует, что кратчайшая $[y'z']$ проходит через y и z . Тогда периметр треугольника Δxyz не превосходит периметра треугольника $\Delta xy'z'$. Полученное противоречие доказывает следствие в случае $\text{diam } X < \pi/\sqrt{k}$.

Теперь перейдем к общему случаю. Зафиксируем положительное $\varepsilon < k$. По теореме 10.4.1 $\text{diam}(X) \leq \pi/\sqrt{k} < \pi/\sqrt{k-\varepsilon}$. Более того, так как X — пространство кривизны $\geq k$, оно также является пространством кривизны $\geq k - \varepsilon$. Поэтому мы можем применить уже доказанную часть теоремы с заменой k на $k - \varepsilon$ и получить, что периметр любого треугольника не превосходит $2\pi/\sqrt{k-\varepsilon}$. Так как число $\varepsilon > 0$ можно брать сколь угодно малым, следствие доказано. \square

Упражнение 10.4.3. Докажите, что компактное пространство X кривизны ≥ 1 с диаметром $\text{diam } X = \pi$ изометрично надстройке (то есть сферическому конусу, см. пункт 10.2.1) над компактным пространством кривизны ≥ 1 .

Подсказка. Пусть $p, q \in X$ — такие точки, что $|pq| = \pi$. Рассмотрите множество

$$Y = \{x \in X : |px| = |qx| = \pi/2\}.$$

Затем докажите следующие утверждения. Во-первых, для любых $x, y \in Y$ кратчайшие $[px]$ и $[qx]$ единственны и $\angle rxy = \angle qxy = \angle ryx = \angle qyx = \pi/2$. Тогда треугольники Δrxy и Δqxy (как объединения кратчайших) изометричны их треугольникам сравнения на сфере. Тем самым Y выпукло в X , а поэтому Y — пространство с внутренней метрикой

кривизны ≥ 1 . Окончательно, любая точка $x \in X$ принадлежит некоторой кратчайшей, соединяющей точки p и q , а следовательно — объединению $[py] \cup [qy]$ для некоторой точки $y \in Y$. Из этих утверждений следует, что X — сферический конус над Y .

Другое доказательство основывается на теореме о расщеплении из следующего параграфа (см. замечание 10.5.8).

Упражнение 10.4.4 (теорема Берже). Пусть X является n -мерным римановым многообразием кривизны ≥ 1 и с диаметром $\text{diam}(X) = \pi$. Докажите, что тогда X изометрично стандартной сфере S^n .

Упражнение 10.4.5. Радиусом $\text{rad}(X)$ компактного метрического пространства X называется такое минимальное число $r > 0$, что $X = \overline{B}_r(p)$ для некоторого $p \in X$. Докажите следующее.

1. Для произвольного метрического пространства X

$$\frac{1}{2} \text{diam } X \leq \text{rad}(X) \leq \text{diam } X.$$

2. Любое n -мерное пространство Александрова X кривизны ≥ 1 с радиусом $\text{rad}(X) = \pi$ изометрично S^n .

Подсказка. Используя упражнение 10.4.3, докажите, что X содержит подмножества изометричные S^1, S^2, \dots

10.5. Теорема о расщеплении

Напомним, что геодезическая $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow X$ называется прямой, если любой ее отрезок является кратчайшей между его концами. Имеет место следующая замечательная теорема.

Теорема 10.5.1 (теорема о расщеплении). *Если локально компактное пространство Александрова X неотрицательной кривизны содержит прямую, то X изометрично прямому произведению $\mathbb{R} \times Y$, где Y — некоторое пространство Александрова неотрицательной кривизны.*

Эта теорема сначала была доказана В. Топоноговым для римановых многообразий; А. Д. Милка [Мк] обобщил ее на случай общих пространств неотрицательной кривизны. В размерности 2 эта теорема была доказана Кон-Фоссенем значительно раньше.

Замечание 10.5.2. Для римановых многообразий справедливо более сильное утверждение: вместо неотрицательности секционных кривизн достаточно предположить неотрицательность кривизн Риччи, см. [СГ].

На протяжении всего доказательства будем обозначать через X пространство Александрова неотрицательной кривизны. Начнем с того, что дадим определение параллельных прямых (используемое только в этом параграфе и не имеющее отношения к параллельным прямым, рассмотренным в главе 9).

Определение 10.5.3. Две прямые γ, γ_1 в X называются *параллельными*, если найдутся две такие параллельные прямые $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1$ на плоскости \mathbb{R}^2 и изометрия метрического пространства $\gamma \cup \gamma_1$ на метрическое пространство $\bar{\gamma} \cup \bar{\gamma}_1$, где метрики этих пространств — это сужения метрик пространств X и \mathbb{R}^2 , соответственно. В таком случае мы будем говорить, что прямые $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}_1$ на плоскости \mathbb{R}^2 *соответствуют* прямым γ и γ_1 в пространстве X . Зафиксируем изометрию из $\gamma \cup \gamma_1$ на $\bar{\gamma} \cup \bar{\gamma}_1$ и будем называть образ точки $a \in \gamma \cup \gamma_1$ при этой изометрии точкой, *соответствующей* точке a .

Лемма 10.5.4. Пусть γ — прямая в пространстве X , $p \in X$. Тогда для любых двух точек $x, y \in \gamma$ углы при вершинах x и y треугольника Δpxu равны соответствующим углам его треугольника сравнения $\tilde{\Delta} pxu$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{\angle} pxu \leq \angle pxu - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим такие две точки $z_i \in \gamma$, что x лежит между z_1 и z_2 , а y — между z_1 и x . Расположим треугольники сравнения $\tilde{\Delta} pxz_1$ и $\tilde{\Delta} pxz_2$ в разных полуплоскостях относительно их общей стороны $\bar{p}\bar{x}$. Затем поместим треугольник сравнения $\tilde{\Delta} \bar{p}\bar{x}\bar{y}$ в ту же полуплоскость, где лежит треугольник $\tilde{\Delta} pxz_1$. Прямоугольники $\tilde{\Delta} \bar{p}\bar{z}_1\bar{x}\bar{z}_2$ и $\tilde{\Delta} \bar{p}\bar{y}\bar{x}\bar{z}_2$ — выпуклые. В силу условия монотонности углов имеем $\tilde{\angle} pxz_1 \leq \angle pxu \leq \angle pxu - \varepsilon$. Отсюда получаем, что $\tilde{\angle} z_1xz_2 < \pi - \varepsilon$. А это невозможно, если z_1 и z_2 расположены достаточно далеко от x , так как $|z_1p| + |pz_2| \geq |z_1x| + |xz_2|$. \square

Из этой леммы по монотонности углов сразу вытекает

Следствие 10.5.5. 1. Для точек $p' \in [px]$ и $y' \in [yx]$ и точек $\bar{p}' \in [\bar{p}\bar{x}]$ и $\bar{y}' \in [\bar{y}\bar{x}]$ таких, что $|p'x| = |\bar{p}'\bar{x}|$, $|y'x| = |\bar{y}'\bar{x}|$, выполняется неравенство $|p'y'| = |\bar{p}'\bar{y}'|$.

2. Для произвольных прямой γ и точки p на γ существует единственная ближайшая к p точка.

Эта ближайшая точка называется *проекцией* точки p на прямую γ . (Заметим однако, что кратчайшая $[pp']$ может быть не единственной.)

Лемма 10.5.6. 1. Для произвольных прямой γ и точки p существует не более одной прямой γ_1 , параллельной прямой γ и проходящей через p .

2. Отношение параллельности является транзитивным.

Доказательство. Предположим, что существуют две прямые, γ_1 и γ_2 , проходящие через p и параллельные прямой γ . Рассмотрим три соответствующие параллельные прямые $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}_2$ на плоскости \mathbb{R}^2 .

Мы будем считать, что $\bar{\gamma}$ лежит между двумя другими прямыми. Пусть точки $\bar{a} \in \bar{\gamma}_1$, $\bar{b} \in \bar{\gamma}_2$ соответствуют таким точкам $a \in \gamma_1$, $b \in \gamma_2$, что $|pa| = |pb|$, и пусть отрезок $[\bar{a}\bar{b}]$ пересекает прямую $\bar{\gamma}$ в точке \bar{c} . Тогда $|ab| \leq |ac| + cb| = |\bar{a}\bar{c}| + |\bar{c}\bar{b}| = |\bar{a}\bar{b}|$. Применяя лемму 10.5.4 к точке a и прямой γ_2 , мы видим, что $|ab| \rightarrow \infty$ при $|pa| = |pb| \rightarrow \infty$. Однако последнее невозможно, так как расстояние $|\bar{a}\bar{b}|$ постоянно.

Вторая часть леммы доказывается аналогично. Единственная разница заключается в том, что нужно рассматривать четыре параллельные прямые. \square

Доказательство теоремы. *Шаг 1.* Зафиксируем прямую γ . Сначала для каждой точки $p \in X \setminus \gamma$ построим прямую γ_p , проходящую через p и параллельную прямой γ . Для этого обозначим $c_i = \gamma(t_i)$ и рассмотрим кратчайшие $[pc_i]$, где $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Существует подпоследовательность этих путей, сходящаяся к геодезическому лучу $\gamma_p^+ : [0, \infty) \rightarrow X$. Аналогично, рассматривая точки $d_i = \gamma(-t_i)$, $t_i \rightarrow \infty$, можно построить геодезический луч $\gamma_p^- : [0, -\infty) \rightarrow X$. Покажем, что эти лучи вместе образуют прямую γ_p , параллельную γ .

Углы сравнения $\tilde{\angle} c_i p d_i$ очевидно стремятся к π , когда $i \rightarrow \infty$. Из того, что $\angle c_i p d_i \geq \tilde{\angle} c_i p d_i$, следует, что углы $\angle c_i p d_i$ также стремятся к π . Следовательно угол между γ_p^+ и γ_p^- в точке p равен π .

Теперь докажем, что γ_p — прямая. Зафиксируем $t > 0$, и пусть b_i^+ и b_i^- — точки на кратчайших $[pc_i]$ и $[pd_i]$ на расстоянии t от точки p . При $i \rightarrow \infty$ эти точки стремятся к точкам $b^+ = \gamma_p(t)$ и $b^- = \gamma_p(-t)$. Рассмотрим треугольник сравнения $\Delta \bar{c}_i \bar{a} \bar{d}_i$ и точки \bar{b}_i^+ , \bar{b}_i^- на его сторонах на расстоянии t от точки \bar{a} . Очевидно, что $|b^+ b^-| = \lim_{i \rightarrow \infty} |b_i^+ b_i^-| \geq \lim_{i \rightarrow \infty} |\bar{b}_i^+ \bar{b}_i^-| = 2t$. Это означает, что каждый отрезок γ_p является кратчайшей. Следовательно γ_p является прямой.

Теперь докажем, что прямые γ и γ_p параллельны. Рассмотрим две прямые $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}_p$ в плоскости \mathbb{R}^2 на расстоянии $|pp'|$ друг от друга, где p' — проекция точки p на γ . Пусть $\bar{p} \in \bar{\gamma}_p$, а \bar{p}' — проекция точки \bar{p} на $\bar{\gamma}$. Тогда, переходя к пределу по подпоследовательности (как это было сделано выше) и используя следствие 10.5.5, получаем, что для любых двух точек $a \in \gamma$, $b \in \gamma_a$ и точек $\bar{a} \in \bar{\gamma}$, $\bar{b} \in \bar{\gamma}_a$, лежащих на соответствующих лучах и таких, что $|pa| = |\bar{p}\bar{a}|$, $|p'b| = |\bar{p}'\bar{b}|$, верно равенство $|ab| = |\bar{a}\bar{b}|$. Это означает, что прямые γ и γ_p параллельны.

Мы доказали, что для любой последовательности $\{t_i\}$ последовательность кратчайших $[p\gamma(t_i)]$ сходится при $t_i \rightarrow +\infty$ к лучу, лежащему на геодезической, параллельной прямой γ (если она вообще сходится). Из того, что такая геодезическая единственна (лемма 10.5.6), следует, что эти кратчайшие сходятся к лучу γ_p^+ для любой последовательности $\{t_i\}$,

$t_i \rightarrow +\infty$. Более того, углы между этими кратчайшими и γ_p^+ стремятся к нулю.

Шаг 2. Применяя лемму 10.5.6, мы видим, что X расщепляется на параллельные прямые, и определено отношение “одна точка является проекцией другой точки”. Мы покажем, что это отношение симметрично и транзитивно.

Чтобы доказать, что это отношение симметрично, возьмем две параллельные прямые γ_1 и γ_2 и две такие точки $a_1 \in \gamma_1$, $a_2 \in \gamma_2$, что a_2 — проекция точки a_1 на прямую γ_2 . Рассмотрим треугольники $a_1 a_2 \gamma(t)$ при $|t| \rightarrow \infty$. Так как $\angle a_1 a_2 \gamma(t) = \angle a_1 a_2 \gamma_2(t) = \pi/2$ и $|a_2 \gamma_2(t)| \rightarrow \infty$, то $\angle a_2 a_1 \gamma_2(t) = \angle a_2 a_1 \gamma_2(t) \rightarrow \pi/2$. Поэтому кратчайшая $[a_1 a_2]$ ортогональна прямой γ_1 , то есть a_1 является проекцией точки a_2 на прямую γ_1 .

Чтобы доказать, что это отношение транзитивно, рассмотрим три параллельные прямые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и пусть a_2 и a_3 — проекции точки $a_1 \in \gamma_1$ на прямые γ_2 и γ_3 , соответственно. Тогда

$$|a_2 \gamma_1(t)| - |a_3 \gamma_1(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

так как $|a_2 \gamma_1(t)| - |a_1 \gamma_1(t)| \rightarrow 0$ и $|a_3 \gamma_1(t)| - |a_1 \gamma_1(t)| \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $\angle a_2 a_3 \gamma(t) \rightarrow \pi/2$, а поэтому кратчайшая $[a_2 a_3]$ ортогональна прямой $\gamma_3^+ = \lim[a_3, \gamma_1(t)]$. Значит a_3 является проекцией точки a_2 на прямую γ_3 .

Шаг 3. Теперь уже нетрудно завершить доказательство теоремы. Для точки $p \in \gamma$ обозначим через $N(p)$ множество ее проекций на все прямые, параллельные прямой γ . Это множество выпукло в X , а следовательно является пространством неотрицательной кривизны. Любые два таких множества $N(p)$ и $N(q)$ канонически изометричны друг другу. Изометрия задается следующим образом: если точка $x \in N(p)$, то ее образ — это $N(q) \cap \gamma_x$, где γ_x — прямая, параллельная γ и проходящая через x .

Зафиксировав $p = \gamma(0)$, мы рассмотрим метрическое пространство $N(p) \times \mathbb{R}^1$ и такое отображение $f : N(p) \times \mathbb{R}^1 \rightarrow M$, что $f(x, t)$ — это точка из $N(\gamma(t))$, соответствующая точке x при канонической изометрии между $N(p)$ и $N(\gamma(t))$. Очевидно, что f является изометрией. \square

Замечание 10.5.7. Есть другое (идеологически даже несколько лучшее) доказательство этой теоремы, основанное на выпуклости функции Буземана и дополнений к оришарам (см. 5.3.3). Мы дадим набросок этого доказательства (см. [CG]), которое, впрочем, не встречает дополнительных технических трудностей лишь в случае римановых многообразий. Напомним, что в пространствах Адамара (внешние) эквидистанты (r -окрестности) выпуклых множеств являются выпуклыми, а следовательно оришары выпуклы. В противоположность этому, в пространствах неотрицательной кривизны

выпуклы “внутренние” эквидистанты выпуклых множеств. В частности, читатель может в качестве упражнения доказать, что выпуклы дополнения оришаров. Это позволит построить семейство вложенных друг в друга выпуклых множеств, покрывающее X . Разбив прямую (из условия теоремы) на два луча и изучая их функции Буземана и соответствующие семейства оришаров, не слишком трудно доказать теорему в римановом случае. Аналогичные рассуждения позволили также доказать теорему Чигера–Громолла о душе (см. [CG1]). Для пространств Александрова этот подход был реализован в [Per], но, к сожалению, так и не был опубликован. Стоит отметить, что в пространствах Александрова даже определение границы выпуклого множества требует весьма трудной теоремы о стратификации (также [Per]). Тем самым в случае общих пространств Александрова этот подход встречает существенные технические трудности. Это объясняет, почему мы использовали модификацию доказательства Милки, избегающую таких трудностей.

Замечание 10.5.8. Из теоремы о расщеплении следует, что пространство Александрова X кривизны ≥ 1 с диаметром π является сферическим конусом (см. упражнение 10.4.3). Действительно, пусть Y — евклидов конус над X . Тогда Y содержит прямую (соответствующую паре точек в пространстве X на расстоянии π друг от друга). Тогда Y — прямое произведение \mathbb{R} на некоторое пространство Z неотрицательной кривизны. Так как X является пространством направлений пространства Y ($X = \Sigma_o(Y)$, где o — вершина), то X является сферическим конусом над пространством направлений $\Sigma_o(Z)$.

10.6. Размерность и объем

10.6.1. Однородность размерности.

Теорема 10.6.1. *Все открытые подмножества полного локально компактного пространства X ограниченной снизу кривизны имеют одну и ту же хаусдорфову размерность, равную хаусдорфовой размерности пространства X , то есть $\dim_H(U) = \dim_H(X)$ для любого открытого подмножества $U \subset X$.*

Сформулированное в теореме свойство мы будем называть *однородностью размерности* пространства X . Мы не исключаем *заранее* не целые и бесконечные значения для размерности.

Доказательство. Любое открытое множество U содержит шар $B_r(p)$ для некоторых $p \in X$ и $r > 0$. Тогда $\dim_H(B_r(p)) \leq \dim_H(U) \leq \dim_H(X)$, так как $B_r(p) \subset U \subset X$. Достаточно доказать, что $\dim_H(B_r(p)) = \dim_H(X)$, а для этого — что $\dim_H(B_r(p)) = \dim_H(B_R(p))$ для произвольных $R > r > 0$. Действительно, если X ограничено, то $X = B_R(p)$, где

$R = \text{diam } X$. Если же X не ограничено, его можно представить в виде объединения счетного числа шаров вида $B_R(p)$ (например, можно взять $R = r + 1, r + 2, \dots$). Если размерности этих шаров равняются $\dim_H(B_r(p))$, то $\dim_H(X) = \dim_H(B_r(p))$ (ср. предложение 1.7.19).

Обозначим $A = B_r(p)$ и $B = B_R(p)$. Неравенство $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ очевидно, так как $A \subset B$. Чтобы доказать, что $\dim_H(B) \leq \dim_H(A)$, мы построим такое отображение $f : B \rightarrow A$, что для некоторой постоянной $c > 0$ будет выполняться $|f(x)f(y)| \geq c|xy|$ для всех $x, y \in A$. Если такое f существует, то обратное ему отображение $f^{-1} : f(B) \rightarrow B$ является липшицевым; тогда, согласно предложению 1.7.19,

$$\dim_H(B) \leq \dim_H(f(B)) \leq \dim_H(A).$$

Это отображение f будет использоваться столь часто в этой главе, что оно заслуживает отдельного описания.

Лемма 10.6.2. Пусть X — полное локально компактное пространство кривизны $\geq k$, $p \in X$ и $0 < \lambda < 1$. Для произвольной точки $x \in X$ возьмем в качестве $f(x)$ такую точку на произвольно выбранной кратчайшей $[px]$, что $|pf(x)| = \lambda|px|$. Тогда

- (1) если $k = 0$, то $|f(x)f(y)| \geq \lambda \cdot |xy|$ для всех $x, y \in X$.
- (2) Если $k < 0$, то для любого $R > 0$ существует такое положительное число $c(k, \lambda, R)$, что $|f(x)f(y)| \geq c(k, \lambda, R) \cdot |xy|$ для всех $x, y \in B_R(p)$.

Фактически можно взять $c(k, \lambda, R) = \frac{\sinh(-k\lambda R)}{\sinh(-kR)}$.

Доказательство. Утверждение леммы сразу следует из условия монотонности углов. Число $c(k, \lambda, R)$ — это коэффициент, для которого требуемое неравенство выполняется в случае аналогичного отображения на k -плоскости. (Наше отображение на k -плоскости является диффеоморфизмом, так что оно билипшицево в любом шаре, поэтому какая-нибудь константа всегда существует. Прямое вычисление показывает, что для k -плоскости можно взять $c(k, \lambda, R) = \frac{\sinh(-k\lambda R)}{\sinh(-kR)}$.) \square

Мы будем называть отображение f из леммы λ -гомотетией с центром в p .

Чтобы закончить доказательство теоремы, обозначим $\lambda = r/R$ и в качестве f возьмем λ -гомотетию с центром в p . Тогда $f(B) = f(B_R(p)) \subset B_r(p) = p$ и

$$|f(x)f(y)| \geq c(k, \lambda, R) \cdot |xy|$$

для всех $x, y \in B_R(p)$. Как было объяснено выше, из этого следует наша теорема. \square

Упражнение 10.6.3. Докажите, что если X локально компактное (но не обязательно полное) пространство ограниченной снизу кривизны, то все предкомпактные открытые множества в X имеют одинаковую хаусдорфову размерность.

Замечание 10.6.4. В действительности, теорема остается верной без предположения о локальной компактности. Это можно доказать используя результаты параграфа 10.8, см. упражнение 10.8.22.

10.6.2. Неравенство Громова–Бишопа. Из доказательства последней теоремы легко видеть, что меру Хаусдорфа большего шара $B_R(p)$ можно оценить снизу через меру Хаусдорфа меньшего шара $B_r(p)$. Другими словами, ограниченность кривизны снизу влечет ограниченность сверху скорости роста объема шаров. В действительности, объемы шаров в пространстве Александрова растут не быстрее, чем объемы шаров в пространстве сравнения той же размерности. Этот факт и составляет неравенство Громова–Бишопа.

Обозначения. Напомним, что *пространственная форма* — это полное пространство постоянной кривизны. Таким образом, односвязная пространственная форма является сферой, евклидовым пространством или гиперболическим пространством (произвольной размерности). Для целого $n \geq 2$, обозначим через M_k^n односвязную n -мерную пространственную форму кривизны k . Отдельно определим $M_k^1 = \mathbb{R}$, если $k \leq 0$, и $M_k^1 = \frac{1}{\sqrt{k}}S^1$ (то есть окружность длины $2\pi/\sqrt{k}$), если $k > 0$. Зафиксируем $n \geq 1$ и обозначим через V_r^k и S_r^k объем шара радиуса r и $(n-1)$ -мерную площадь сферы радиуса r в M_k^n .

Теорема 10.6.5 (Неравенство Громова–Бишопа). Пусть X — локально компактное пространство Александрова кривизны $\geq k$, а n — натуральное число. Тогда для любого $p \in X$ отношение

$$\frac{\mu_n(B_r(p))}{V_r^k}$$

является невозрастающей функцией от r . Здесь $\mu_n(B_r(p))$ — n -мерная мера Хаусдорфа шара радиуса $r > 0$ с центром в p . Другими словами, если $R \geq r > 0$, то

$$\frac{\mu_n(B_R(p))}{V_R^k} \leq \frac{\mu_n(B_r(p))}{V_r^k}.$$

Разумеется, теорема содержательна только если размерность пространства равна n .

Мы дадим полное доказательство только для $k = 0$ (это доказательство по существу такое же, как доказательство однородности размерности).

В общем случае мы дадим доказательство, основанное на формуле

$$(10.5) \quad \mu_n(B_r(p)) = \int_0^r \mu_{n-1}(S_t(p)) dt,$$

где $S_t(p)$ — сфера радиуса t с центром в p . Если X — риманово многообразие, то (10.5) является частным случаем так называемой формулы коплощади (теорема 3.2.11 в [Fe]). Отметим, что для общих пространств Александрова ограниченной снизу кривизны формула (10.5) также верна, но ее доказательство технически довольно сложно.

Альтернативный подход заключается в следующем. Надо изменить доказательство, которое будет приведено ниже, так, чтобы оно использовало конечные суммы вместо интегральной формулы (10.5). А именно, можно разбить $B_r(p)$ набором сфер соответствующих радиусов на тонкие слои и заменить неравенства, содержащие $(n-1)$ -мерный объем сфер, на аналогичные n -мерные объемы слоев. Затем, заменяя интеграл в формуле (10.5) на суммы объемов слоев, можно получить желаемое неравенство с любой наперед заданной точностью. Такая модификация идейно проста и прямолинейна, однако ее детальное изложение содержит множество несущественных технических деталей, связанных с выбором радиусов, поправочных членов и т.д. Поэтому мы даем более прозрачное доказательство, использующее формулу (10.5), оставляя читателю идейно более простой (но технически более громоздкий) подход в качестве упражнения.

Начнем с более простого для доказательства случая $k = 0$.

Доказательство теоремы 10.6.5 для $k = 0$. Рассмотрим (r/R) -гомотетию $f: X \rightarrow X$ с центром в p (см. лемму 10.6.2). Очевидно, что f отображает $B_R(p)$ в $B_r(p)$. Из леммы 10.6.2 следует, что отображение f инъективно, а обратное ему отображение f^{-1} липшицево с константой Липшица R/r . Поэтому

$$\mu_n(B_R(p)) \leq (R/r)^n \mu_n(B_r(p)) = \frac{V_R^0}{V_r^0} \mu_n(B_r(p)).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. \square

Заметим, что для $k \neq 0$ те же рассуждения доказывают неравенство вида $\mu_n(B_R(p)) \leq C(r, R, k) \mu_n(B_r(p))$ для некоторой (не оптимальной) константы $C(r, R, k)$. Это является достаточным для многих целей.

Чтобы доказать теорему в общем случае, нам нужна следующая лемма, которая аналогична неравенству Громова–Бишопа, но в которой рассматриваются сферы вместо шаров.

Лемма 10.6.6. Пусть $S_t(p)$ — сфера радиуса t с центром в $p \in X$. Тогда при $R \geq r > 0$

$$(10.6) \quad \frac{\mu_{n-1}(S_r(p))}{\mu_{n-1}(S_R(p))} \geq \frac{S_r^k}{S_R^k}.$$

Доказательство. Мы докажем неравенство для $k = 1$. Изменяя масштаб, можно получить такое же неравенство для произвольного $k > 0$. Чтобы получить доказательство для $k < 0$, нужно просто заменить в формулах все синусы на гиперболические синусы.

Рассмотрим (r/R) -гомотетию f (см. лемму 10.6.2), суженную на сферу $S_R(p)$ и обозначим через f_0 аналогичное отображение на 1-плоскости. Мы рассматриваем f_0 как отображение из сферы радиуса R в сферу радиуса r на 1-плоскости. Дифференциал функции f_0 умножает длины касательных векторов на $\sin r / \sin R$. Следовательно f_0 локально липшицево с локальной константой Липшица $\sin r / \sin R$, а f_0^{-1} локально липшицево с локальной константой Липшица $\sin R / \sin r$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\frac{|f_0(x)f_0(y)|}{|xy|} \geq (1 - \varepsilon) \frac{\sin r}{\sin R},$$

если только $|xy| < \delta$. Используя треугольники сравнения, можно получить такое же неравенство для f .

Разделим $S_R(p)$ на конечное или счетное семейство множеств D_i диаметров меньших, чем δ . Из вышеприведенного неравенства следует, что

$$\mu_{n-1}(f(D_i)) \geq (1 - \varepsilon) \left(\frac{\sin r}{\sin R} \right)^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}(S_r(p)) &\geq \sum \mu_{n-1}(f(D_i)) \geq (1 - \varepsilon) \left(\frac{\sin r}{\sin R} \right)^{n-1} \mu_{n-1}(S_R(p)) \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{S_r^k}{S_R^k} \mu_{n-1}(S_R(p)). \end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то этим лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 10.6.5. Простые вычисления позволяют вывести неравенство Громова–Бишопа из (10.6) и (10.5). Положим $V(t) = \mu_n(B_t(p))$ и $S(t) = \mu_{n-1}(S_t(p))$. Интегрируя неравенство (10.6) по r на промежутке $[0, R]$, получаем

$$\frac{V(R)}{S(R)} \geq \frac{V_R^k}{S_R^k},$$

или, что равносильно (с заменой R на t),

$$\frac{d}{dt} \log V(t) = \frac{S(t)}{V(t)} \leq \frac{S_t^k}{V_t^k} = \frac{d}{dt} \log V_t^k.$$

Интегрируя это по t на промежутке $[r, R]$, получаем утверждение теоремы.

Чтобы обосновать приведенные выше вычисления с производными, заметим, что из (10.6) следует, что функция $t \mapsto S(t)$ является суперпозицией непрерывного отображения $t \mapsto S_t^k$ и монотонной функции. Следовательно, для всех t , исключая не более чем счетное множество значений, $S(t)$ непрерывно по t и равняется dV/dt . \square

10.6.3. Неравенство Бишопа. Предположим, что X — n -мерное риманово многообразие кривизны $\geq k$. Зафиксируем $p \in X$. Тогда объемы малых шаров в X с центром в p почти евклидовы. Следовательно

$$\frac{\mu_n(B_r(p))}{V_r^k} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0.$$

Поэтому из неравенства Громова–Бишопа следует, что $\mu_n(B_R(p)) \leq V_R^k$ для любого $R > 0$. Этот факт (известный как неравенство Бишопа) может быть обобщен на пространства Александрова.

Теорема 10.6.7 (Неравенство Бишопа). *Предположим, что пространства Александрова X кривизны $\geq k$ имеет конечную целочисленную размерность n . Тогда для любого $p \in X$ и любого $r > 0$*

$$\mu_n(B_r(p)) \leq V_r^k,$$

где V_r^k — объем шара радиуса r в пространственной форме M_k^n (см. обозначения в пункте 10.6.2).

Замечание. В дальнейшем (см. 10.8.2) будет доказано, что если размерность пространства Александрова конечна, то она всегда — целое число.

Если $k > 0$, то из неравенства Бишопа и оценки сверху на диаметр пространства (теорема 10.4.1) следует, что объем пространства X не больше, чем объем n -мерной сферы радиуса $1/\sqrt{k}$. Другими словами, верно следующее утверждение.

Следствие 10.6.8. *Для объема n -мерного пространства Александрова X кривизны $\geq k$, где $k > 0$, верна оценка*

$$\mu_n(X) \leq \frac{\mu_n(S^n)}{k^{n/2}}.$$

Теорема 10.6.7 сразу вытекает из следующего предложения, которое утверждает, что шар $B_r(p)$ “не больше”, чем шар радиуса r в M_k^n в том смысле, что существует несжимающее отображение одного в другой.

Предложение 10.6.9. *Для любой точки p n -мерного пространства Александрова X кривизны $\geq k$ существует такое отображение $f: X \rightarrow M_k^n$, что $|f(x)f(y)| \geq |xy|$ для всех $x, y \in X$ (т.е., f несжимающее) и $|f(p)f(x)| = |px|$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n . Мы используем следующий факт, который докажем ниже (следствие 10.9.6): если $n \geq 2$, то пространство направлений $\Sigma_p(X)$ в любой точке p n -мерного пространства Александрова X является $(n - 1)$ -мерным пространством Александрова кривизны ≥ 1 ; если же X одномерно, то $\Sigma_p(X)$ состоит из одной или двух точек. Из этого факта и индукционного предположения следует, что существует несжимающее отображение из $\Sigma_p(X)$ в $M_1^{n-1} = S^{n-1}$.

Обозначим через $K_p^k(X)$ k -конус (см. пункт 10.2.1) над $\Sigma_p(X)$. Следующая лемма немедленно вытекает из условия на углы.

Лемма 10.6.10. Пусть X — пространство Александрова кривизны $\geq k$, $p \in X$. Рассмотрим отображение $\log_p : X \rightarrow K_p^k(X)$, которое отображает p в вершину конуса, а любую точку $x \in X \setminus \{p\}$ в пару $(\xi, |px|)$, где ξ — направление некоторой (произвольно выбранной) кратчайшей $[px]$. Это отображение \log_p является несжимающим.

По индукционному предположению мы имеем несжимающее отображение из $\Sigma_p(X)$ в S^{n-1} . Оно естественно продолжается до несжимающего отображения $F : K_p^k(X) \rightarrow M_k^n$, сохраняющего расстояния до вершины (заметим, что M_k^n — это k -конус над S^{n-1}). Тогда отображение $F \circ \log_p$ — искомое несжимающее отображение из X в M_k^n .

Отметим, что база индукции существенно использовала то, что мы исключили некоторые одномерные пространства. \square

Упражнение 10.6.11. Докажите, что неравенство в теореме 10.6.7 превращается в равенство тогда и только тогда, когда $B_r(p)$ изометрично шару радиуса r в M_k^n . В частности, если равенство имеет место для сколь угодно больших r , тогда X изометрично M_k^n .

Замечание 10.6.12. В случае римановых многообразий для справедливости неравенств Громова–Бишопа и Бишопа достаточно ограничить снизу кривизны Риччи.

10.6.4. Дополнение: грубая размерность. Здесь мы введем еще одно понятие, которое упрощает рассмотрения во многих случаях. Оно особенно полезно, если пространство не предполагается локально компактным и конечномерным. Рассмотрим метрическое пространство X . Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через $\beta_X(\varepsilon)$ максимальную мощность ε -разделенного подмножества множества X , то есть, такого набора точек $p_i \in X$, что $|p_i p_j| \geq \varepsilon$ для всех $i \neq j$. Случай $\beta_X(\varepsilon) = \infty$ не исключается.

Определение 10.6.13. Грубым d -мерным объемом $\text{Vol}_d X$ называется

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^d \beta_X(\varepsilon).$$

Грубая размерность \dim_r определяется равенством

$$\dim_r(X) = \sup\{d: \text{Vol}_d X = \infty\}.$$

Упражнение 10.6.14. Докажите, что

1. $\dim_H X \leq \dim_r X$, где \dim_H обозначает хаусдорфову размерность.

Подсказка. Это очевидно.

2. Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ такого, что $|f(x)f(y)| \geq c|xy|$ для некоторой константы c , верно неравенство $\dim_r f(X) \geq \dim_r X$.

3. $\dim_r(X) = \inf\{d: \text{Vol}_d(X) = 0\}$.

4. Если $f: X \rightarrow Y$ — липшицево отображение, то $\dim_r f(X) \leq \dim_r X$. В частности, если f билипшицево, то $\dim_r f(X) = \dim_r X$.

10.7. Пределы по Громову–Хаусдорфу

В этом параграфе мы рассмотрим класс пространств Александрова как подмножество “пространства Громову–Хаусдорфа метрических пространств”. Прежде всего, теорема Топоногова позволяет легко доказать, что пространства Александрова образуют замкнутое множество (заметим, что аналогичное утверждение о пространствах кривизны $\leq k$ не верно).

Предложение 10.7.1. *Для последовательности пространств Александрова кривизны $\geq k$ их предел по Громову–Хаусдорфу также является пространством кривизны $\geq k$. То же самое верно и для пределов по Громову–Хаусдорфу некомпактных пространств с отмеченной точкой (в смысле определения 8.1.1).*

Доказательство. По теореме 7.5.1 предел пространств с внутренней метрикой также является пространством с внутренней метрикой. Поэтому достаточно проверить условие на четверки (ср. предложение 10.1.1) для предельного пространства. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность пространств кривизны $\geq k$, $X_n \xrightarrow{\text{GH}} X$. Тогда для четверки $(a; b, c, d)$ в X существует такая последовательность четверок $(a_n; b_n, c_n, d_n)$ в X_n , что $|a_n b_n| \rightarrow |ab|$, $|a_n c_n| \rightarrow |ac|$, и так далее. Теперь условие на четверку $(a; b, c, d)$ следует из этого условия для $(a_n; b_n, c_n, d_n)$ по непрерывности. \square

Главным результатом этого параграфа является приведенная чуть ниже теорема компактности Громова. Предварительно введем два класса ограниченных пространств Александрова; именно, для любых $k \in \mathbb{R}$, $D > 0$ и натурального n определим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(n, k) &= \{X : X \text{ — пространство кривизны } \geq k, \dim_H(X) \leq n\}, \\ \mathfrak{M}(n, k, D) &= \{X \in \mathfrak{M}(n, k) : \text{diam}(X) \leq D\}. \end{aligned}$$

Теорема 10.7.2 (Теорема Громова о компактности). *Класс $\mathfrak{M}(n, k, D)$ компактен в метрике Громова–Хаусдорфа. В частности, если $k > 0$, то множество $\mathfrak{M}(n, k)$ компактно.*

Альтернативный вариант формулировки состоит в следующем: множество $\mathfrak{M}(n, k)$ ограничено компактно, т.е. все его замкнутые ограниченные подмножества компактны.

При доказательстве этой теоремы мы воспользуемся некоторыми фактами, которые будут установлены позднее, в параграфе 10.8. Именно, там будет доказано, что

- все конечномерные пространства Александрова локально компактны (см. следствие 10.8.20). Поэтому все ограниченные пространства Александрова компактны, так что $\mathfrak{M}(n, k, D)$ действительно подмножество в метрическом пространстве Громова–Хаусдорфа.
- Размерность конечномерного пространства Александрова всегда является целым числом (см. следствие 10.8.21).
- Предел по Громову–Хаусдорфу пространств Александрова кривизны $\geq k$ и размерности $\leq n$ также имеет размерность $\leq n$ (следствие 10.8.25). Так как диаметр является непрерывной функцией, то $\mathfrak{M}(n, k)$ является замкнутым множеством в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Если учесть все это, то достаточно доказать следующее.

Предложение 10.7.3. *Для произвольных n, k, D , множество всех (ограниченных) пространств Александрова X кривизны $\geq k$, для которых $\dim_H(X) = n$ и $\text{diam}(X) \leq D$, предкомпактно.*

Доказательство. По теореме 7.4.15 достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon, n, k, D) > 0$, что пространство рассматриваемого типа не может содержать ε -разделенного множества из более, чем N точек.

Пусть X — n -мерное пространство Александрова кривизны $\geq k$ с диаметром $\text{diam}(X) \leq D$. По предложению 10.6.9, существует несжимающее отображение из X в шар радиуса D в пространственной форме M_k^n . Пусть N — максимально возможное количество точек ε -разделенного подмножества шара радиуса D в M_k^n . Тогда ε -разделенное подмножество X содержит не более, чем N точек, так как образ ε -разделенного множества при несжимающем отображении является опять ε -разделенным множеством. \square

Упражнение 10.7.4. Что можно сказать в случае не обязательно ограниченных пространств? (Имея в виду сходимость пространств с отмеченной точкой).

Замечание 10.7.5. Существует другое доказательство, которое даже проще, если использовать необходимые сведения из следующего параграфа. Вместо предложения 10.6.9, можно воспользоваться неравенством Громова–Бишопа (достаточно простой версии с грубой константой), и следующим утверждением, которое следует из неравенства Громова–Бишопа и следствия 10.8.23): объем μ_n n -мерного ограниченного пространства Александрова положителен и конечен.

Пусть теперь пространство X обладает указанными выше свойствами. Тогда по неравенству Громова–Бишопа

$$\mu_n(B_\varepsilon(p)) \geq c(n, k, D)\mu_n(B_D(p)) = \mu_n(X)$$

для любой точки $p \in X$ (заметим, что $\bar{B}_D(p) = X$, так как $\text{diam}(X) \leq D$). Поэтому X не может содержать больше, чем $N = c(n, k, D)^{-1}$ непересекающихся шаров радиуса ε , или, что равносильно, не может содержать (2ε) -разделенных множеств из более, чем N точек. Отсюда следует наше предложение.

Замечание 10.7.6. Описанный в предыдущем замечании метод позволяет также доказать следующее утверждение: класс римановых многообразий размерности n , кривизны Риччи $\geq k$ и диаметра, не превосходящего D , предкомпактно в пространстве Громова–Хаусдорфа (так как неравенство Громова–Бишопа справедливо и в случае ограниченной снизу кривизны Риччи). Однако геометрического описания свойств замыкания этого класса (в пространстве Громова–Хаусдорфа) пока не известно.

Замечание 10.7.7. Предел n -мерных пространств может иметь размерность строго меньшую, чем n . Например, для любого компактного пространства X неотрицательной кривизны перенормированные пространства $\{\lambda X\}$ имеют неотрицательную кривизну и стремятся к точке, когда $\lambda \rightarrow 0$. Размерность может упасть при предельном переходе и в случае, когда кривизна ограничена с двух сторон. Например, “тонкие” плоские торы $S^1 \times (\lambda S^1)$ стремятся к окружности, когда $\lambda \rightarrow 0$.

Последовательность пространств Александрова, предел которой имеет размерность меньшую, чем размерность членов последовательности, называется *коллапсирующей последовательностью*, см. также пункт 10.10.4.

10.8. Локальные свойства

Перейдем к локальным свойствам конечномерных пространств Александрова (напомним, что под размерностью мы понимаем хаусдорфову размерность). Этот параграф содержит много технических деталей. Поэтому мы рекомендуем пропустить при первом чтении длинные доказательства в пункте 10.8.2.

10.8.1. Формулировки. Ниже приведено несколько теорем, которые мы докажем (или объясним как доказать) в этом и следующем параграфах. Первое утверждение — это локальная компактность (свойство, которое мы много где предполагали, чтобы упростить технические детали доказательств).

Теорема 10.8.1. *Все конечномерные пространства Александрова локально компактны.*

Теорема 10.8.2. *Если хаусдорфова размерность пространства Александрова конечна, то она является целым числом.*

Теорема 10.8.3. *n -Мерное пространство Александрова содержит открытое всюду плотное подмножество, являющееся n -мерным многообразием. Более того, существует такое открытое всюду плотное подмножество, что любая его точка имеет окрестность, билипшицево гомеоморфную открытой области в \mathbb{R}^n .*

Эти три теоремы доказаны в конце параграфа 10.8.2; см. следствия 10.8.20, 10.8.21 и 10.8.23.

Теорема 10.8.3 является первым шагом в изучении локальной топологической структуры произвольного пространства Александрова. В соответствии с этой теоремой пространство Александрова можно разбить на множество топологически регулярных точек (имеющих евклидовы окрестности) и нигде не плотное множество топологически сингулярных точек. Чтобы получить более детальную информацию, надо изучить множество сингулярных точек. Некоторые результаты об этом обсуждаются ниже в параграфе 10.10.

Другой способ классификации точек на плохие и хорошие основан на касательных конусах. А именно, точка называется *регулярной*, если касательный конус в ней изометричен \mathbb{R}^n или, что равносильно, пространство направлений изометрично стандартной сфере S^{n-1} .

Теорема 10.8.4. *Пусть X — n -мерное пространство Александрова, $p \in X$. Тогда следующие три утверждения равносильны.*

- (1) *Точка p регулярна.*
- (2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки p , которая в метрике Липшица отличается меньше, чем на ε , от некоторого открытого множества в \mathbb{R}^n . (Определение метрики Липшица см. в параграфе 7.2.)*
- (3) *Касательный конус по Громову–Хаусдорфу пространства X в точке p изометричен \mathbb{R}^n . Другими словами, растянутые шары $\frac{1}{\varepsilon}B_\varepsilon(p)$ сходятся по Громову–Хаусдорфу к единичному шару в \mathbb{R}^n при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Эта теорема составлена из теорем 10.9.3 и 10.9.16. В действительности мы докажем более общее утверждение: если пространство направлений $\Sigma_p(X)$ близко к S^{n-1} в метрике Громова–Хаусдорфа, то окрестность точки p близка к открытому множеству в \mathbb{R}^n в метрике Липшица.

Теорема 10.8.5. *Множество регулярных точек n -мерного пространства Александрова X всюду плотно в нем и, кроме того, является пересечением счетного набора открытых множеств.*

Эта теорема доказана как следствие 10.9.13. В действительности, множество нерегулярных точек имеет хаусдорфову размерность не выше $n-1$, но мы этого не будем доказывать. Более детальные формулировки и обсуждение см. в параграфе 10.10

Пространства направлений и касательные конусы рассматриваются в параграфе 10.9. Среди прочего, мы докажем следующую теорему (см. следствие 10.9.6).

Теорема 10.8.6. *Пусть пространство Александрова X имеет размерность $n \geq 2$. Тогда пространство направлений $\Sigma_p(X)$ в любой точке $p \in X$ является пространством Александрова кривизны ≥ 1 и размерности $n-1$. Пространство направлений одномерного пространства Александрова состоит из одной или двух точек.*

Эта теорема выглядит похожей на соответствующий факт из теории пространств ограниченной сверху кривизны (см. теорему 9.1.44 и следствие 9.1.45). Однако, доказательство в случае ограниченной снизу кривизны не так просто. Даже то, что метрика пространства $\Sigma_p(X)$ является локально внутренней (несмотря на то, что на самом деле она является просто внутренней), оказывается трудно доказать. Мы докажем теорему 10.8.6 используя сходимость по Громову–Хаусдорфу. Основные факты — следующие: $\Sigma_p(X)$ компактно, касательный конус $K_p(X)$ также является касательным конусом по Громову–Хаусдорфу пространства X в точке p . Тогда необходимые свойства пространства направлений $\Sigma_p(X)$ следуют из соответствующих свойств касательного конуса $K_p(X)$, которые, в свою очередь, следуют из общих свойств пределов по Громову–Хаусдорфу.

Замечание 10.8.7. Обычный подход заключается в использовании пространства направлений для того, чтобы провести индукцию по размерности. Это объясняет, почему мы не будем использовать в этом параграфе, нашу обычную идеологию: “доказывать только для локально компактных пространств”. Даже если бы мы это делали, не локально компактные пространства могли бы возникать при переходе к пространству направлений.

Заметим, что компактность пространства направлений не следует из (локальной) компактности самого пространства, если не предположить,

что размерность пространства конечна. Например, рассмотрим прямое произведение бесконечного набора пространств X_i , где X_i — сфера радиуса $1/i$, а i пробегает по всем натуральным числам. Это произведение является компактным пространством неотрицательной кривизны. Однако его пространство направлений в любой точке некомпактно (оно содержит бесконечное $(\pi/2)$ -разделенное множество и, в действительности, изометрично сфере в бесконечномерном гильбертовом пространстве).

Упражнение 10.8.8. Дайте (достаточно хорошее) определение прямого произведения счетного набора метрических пространств и докажите утверждение из предыдущего замечания.

При изучении локальных свойств конечномерных пространств Александрова X кривизны $\geq k$ значение числа k обычно несущественно, так как большинство локальных утверждений не зависит от k . Поэтому мы будем обычно предполагать, что $k \leq 0$ (чтобы треугольники сравнения всегда существовали). Более того, так как наши рассуждения локальны, за счет изменения масштаба всегда можно считать, что k близко к 0. По этим причинам мы предположим, для простоты изложения, что $k = 0$. Для того, чтобы адаптировать рассуждения для отрицательных k , достаточно ввести поправки в формулы (если k близко к нулю, то это — малые поправочные члены).

10.8.2. Распоры. Распор — это полезное техническое понятие, которое немного напоминает понятие ортонормированного репера в \mathbb{R}^n и используется для той же цели — для введения (локальной) системы координат. Чтобы понять происхождение определения распора, рассмотрим такую точку $p \in X$, в которой $\Sigma_p(X)$ изометрично S^{n-1} . Сфера содержит n таких пар точек, что расстояние (угол) между точками в каждой паре равняется π , а все расстояния между точками из разных пар равняются $\pi/2$. Эти точки соответствуют n кривым $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в X , проходящим через p и имеющие попарно ортогональные направления в точке p , также как и координатные оси в \mathbb{R}^n .

Затем можно ввести координаты в окрестности точки p следующим образом: координаты точки q равны расстоянию $|pq|$, умноженному на косинусы углов между кратчайшей $[pq]$ и “координатными осями”. Это дает стандартные координаты, если X — евклидово пространство, но в общем случае эти “координаты” могут быть не непрерывными (например, если кратчайшая $[pq]$ не единственна). Ясно, как можно избавиться от этой проблемы раз и навсегда: зафиксировать точки a_i на каждой кратчайшей γ_i и использовать углы сравнения ($\tilde{\angle} p a_i$) вместо обычных углов. (На самом деле это решает не все возникающие проблемы. Координаты, которые мы введем ниже, немного иные.) После

этого “координатные оси” и даже их направления больше не нужны и мы сформулируем следующее определение.

Определение 10.8.9. Точка $p \in X$ называется (m, ε) -распертой точкой, если существуют такие m пар точек (a_i, b_i) в X , что

$$\begin{aligned}\tilde{\angle} a_i p b_i &> \pi - \varepsilon, \\ \tilde{\angle} a_i p a_j &> \frac{\pi}{2} - 10\varepsilon, \\ \tilde{\angle} a_i p b_j &> \frac{\pi}{2} - 10\varepsilon, \\ \tilde{\angle} b_i p b_j &> \frac{\pi}{2} - 10\varepsilon\end{aligned}$$

для всех $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$. Набор точек $\{(a_i, b_i)\}$ называется (m, ε) -распором для p .

Постоянная 10 в определении не очень важна. Она введена только для того, чтобы упростить формулировку одной из последующих лемм.

Замечание 10.8.10. Напомним, что, согласно условию на четверки, мы имеем $\tilde{\angle} a_i p b_i + \tilde{\angle} a_i p a_j + \tilde{\angle} a_j p b_i \leq 2\pi$. Следовательно углы $\tilde{\angle} a_i p a_j$ и $\tilde{\angle} a_j p b_i$ (и аналогично $\tilde{\angle} b_i p b_j$) не только больше, чем $\frac{\pi}{2} - 10\varepsilon$, но также и меньше, чем $\frac{\pi}{2} + 11\varepsilon$; т.е. они на самом деле близки к $\frac{\pi}{2}$.

Не обязательно устремлять ε к нулю. Для наших целей достаточно зафиксировать раз и навсегда малое ε , скажем, $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{100m}$. Если ε удовлетворяет этому условию, мы будем просто писать “ m -распор” и “ m -распертая точка”. Очевидно, что множество (m, ε) -распертых точек открыто для любых фиксированных m и ε .

Определение 10.8.11. Показателем распертости пространства Александрова X называется супремум таких чисел m , что существует m -распор в X .

Показателем распертости в точке $x \in X$ называется супремум таких чисел m , что в любой окрестности точки x существует m -распертая точка.

В этом параграфе мы увидим, что показатель распертости равен хаусдорфовой размерности пространства (в частности, это доказывает, что размерность является целым числом или бесконечностью). Легко видеть, что в X есть $(1, \varepsilon)$ -распор для любого $\varepsilon > 0$, если X не одноточечное пространство. Чтобы доказать это, рассмотрим две точки $a, b \in X$ и их почти-середину p (точнее, δ -середину, где δ зависит от $|ab|$ и ε). Тогда пара (a, b) является $(1, \varepsilon)$ -распором в точке p .

Следующее предложение показывает, что понятие распертой точки — локальное, более того, что его можно сформулировать в терминах пространства направлений.

Предложение 10.8.12. *Предположим, что набор $\{(a_i, b_i)\}$ является (t, ε) -распором в точке $p \in X$.*

1. *Если кратчайшие $[a_i p]$, $[b_i p]$ существуют для всех i и $a'_i \in [a_i p]$, $b'_i \in [b_i p]$ для $i = 1, \dots, t$, то набор $\{(a'_i, b'_i)\}$ также является (t, ε) -распором в точке p . В частности, существует (t, ε) -распор $\{(a'_i, b'_i)\}$ с произвольно малыми расстояниями $|pa'_i|$ и $|pb'_i|$.*

Даже если кратчайшие не существуют, то же самое верно для точек a'_i и b'_i , взятых на подходящих “почти кратчайших” (см. ниже замечание).

2. *Если кратчайшие $[a_i p]$, $[b_i p]$ существуют для всех i , то углы между этими кратчайшими удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} \angle a_i p b_i &> \pi - \varepsilon, \\ \angle a_i p a_j &> \frac{\pi}{2} - 10\varepsilon, \\ \angle a_i p b_j &> \frac{\pi}{2} - 10\varepsilon, \\ \angle b_i p b_j &> \frac{\pi}{2} - 10\varepsilon \end{aligned}$$

для всех $i, j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j$.

3. *Обратно, если неравенства из второго утверждения выполнены для некоторых точек p , $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, $i = 1, \dots, t$, то p является (t, ε) -распертой точкой.*

Замечание. Под словами “почти кратчайшие” можно просто понимать следующее: точки a_i выбираются так, чтобы $|pa'_i| + |a'_i a_i| - |pa_i| \leq \delta \min\{|pa'_i|, |a'_i a_i|\}$, где δ мало по сравнению с ε , и аналогично выбираются точки b_i . Можно построить и кривую с требуемыми свойствами (сравните с понятием квазигеодезической из главы 5).

Доказательство. Первое утверждение вытекает из условия монотонности углов. Второе получается из первого предельным переходом, когда a'_i и b'_i стремятся к p по соответствующим кратчайшим. Чтобы доказать третье утверждение, заметим, что набор $\{(a'_i, b'_i)\}$ является (t, ε) -распором, если a'_i и b'_i лежат на соответствующих кратчайших $[pa_i]$ и $[pb_i]$ достаточно близко к p . \square

Следующие две леммы просты, но содержат важные технические факты, которые используются на протяжении всего параграфа. Первая из них является аналогом того, что сумма смежных углов равняется π , но с распорами и углами сравнения вместо геодезических и углов между ними.

Лемма 10.8.13. *Пусть точки a, b образуют $(1, \varepsilon)$ -распор в точке p , а точка $q \in X$ удовлетворяет условию*

$$|pq| < \frac{\varepsilon}{4} \min\{|pa|, |pb|\}.$$

Тогда

$$|\tilde{\angle}arq + \tilde{\angle}brq - \pi| < \varepsilon.$$

В частности, если кратчайшие $[ra]$, $[rb]$ и $[rq]$ существуют, то углы между ними близки к углам сравнения:

$$\begin{aligned} 0 < \angle arq - \tilde{\angle}arq < 2\varepsilon, \\ 0 < \angle brq - \tilde{\angle}brq < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство. Применение к набору $(p; a, b, q)$ условия на четверки дает

$$\tilde{\angle}arq + \tilde{\angle}brq \leq 2\pi - \tilde{\angle}arb < \pi + \varepsilon.$$

Остается доказать, что $\tilde{\angle}arq + \tilde{\angle}brq > \pi - \varepsilon$. Предположим противное и расположим треугольники сравнения $\triangle \bar{a}\bar{r}\bar{q}$ и $\triangle \bar{b}\bar{r}\bar{q}$ в различных полуплоскостях относительно $[\bar{r}\bar{q}]$. Тогда

$$\angle \bar{a}\bar{r}\bar{b} = \angle \bar{a}\bar{r}\bar{q} + \angle \bar{b}\bar{r}\bar{q} < \pi - \varepsilon < \tilde{\angle}arb,$$

следовательно $|ab| > |\bar{a}\bar{b}|$. Из неравенства $|rq| < \frac{\varepsilon}{4}|ra|$ следует, что $\tilde{\angle}raq < \arcsin \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$$\angle \bar{a}\bar{q}\bar{r} = \pi - \tilde{\angle}raq - \tilde{\angle}arq > \pi - \frac{\varepsilon}{2} - \tilde{\angle}arq$$

и, аналогично, $\angle \bar{b}\bar{q}\bar{r} > \pi - \varepsilon/2 - \tilde{\angle}brq$. Таким образом,

$$\angle \bar{a}\bar{q}\bar{r} + \angle \bar{b}\bar{q}\bar{r} > 2\pi - \varepsilon - (\tilde{\angle}arq + \tilde{\angle}brq) > \pi$$

(т.е., угол при вершине \bar{q} четырехугольника $\bar{a}\bar{r}\bar{b}\bar{q}$ больше, чем π). Так как $|ab| > |\bar{a}\bar{b}|$, то отсюда следует

$$\tilde{\angle}aqb > \angle \bar{a}\bar{q}\bar{b} = 2\pi - \angle \bar{a}\bar{q}\bar{r} - \angle \bar{b}\bar{q}\bar{r},$$

или, что равносильно, $\tilde{\angle}aqb + \tilde{\angle}aqr + \tilde{\angle}bqr > 2\pi$. Последнее что противоречит условию на четверки для набора $(q; a, b, p)$.

Второе утверждение леммы (об углах между кратчайшими) следует из первого. В самом деле, из условия на четверки следует, что $\angle arq + \angle brq \leq 2\pi - \angle arb < \pi + \varepsilon$. Поэтому

$$(\angle arq - \tilde{\angle}arq) + (\angle brq - \tilde{\angle}brq) < (\pi + \varepsilon) - (\pi - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Так как обе разности $\angle arq - \tilde{\angle}arq$ и $\angle brq - \tilde{\angle}brq$ положительны, то обе они меньше 2ε . \square

Лемма 10.8.14. Если (a_1, b_1) и (a_2, b_2) два таких $(1, \varepsilon)$ -распора в точке p , что

$$|a_2b_2| < \frac{\varepsilon}{4} \min\{|pa_1|, |pb_1|\}$$

и

$$||a_1a_2| - |a_1b_2|| < \varepsilon|a_2b_2|,$$

то (a_1, b_1) и (a_2, b_2) образуют $(2, \varepsilon)$ -распор в точке p .

PSfrag replacements

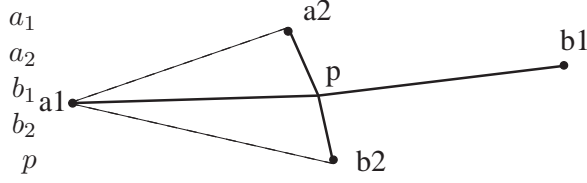


Рис. 10.2: Lemma 10.8.14.

Доказательство. Достаточно доказать, что оба угла сравнения, $\tilde{\angle}a_1pa_2$ и $\tilde{\angle}a_1pb_2$, больше, чем $\frac{\pi}{2} - 8\varepsilon$. В самом деле, если это так, то из условия на четверку $(p; a_1, a_2, b_2)$ следует, что эти два угла меньше, чем $\frac{\pi}{2} + 9\varepsilon$ (сравните с замечанием 10.8.10 после определения распора). Заметим, что $|pa_2| < |a_2b_2|$, $|pb_2| < |a_2b_2|$. Поэтому можно применить лемму 10.8.13 к 1-распору (a_1, b_1) в точке p и любой из точек $q = a_2$, $q = b_2$. Из леммы 10.8.13 следует, что углы $\tilde{\angle}a_2pb_1$ и $\tilde{\angle}b_1pb_2$ больше, чем $\frac{\pi}{2} - 10\varepsilon$.

Предположим противное, например пусть $\tilde{\angle}a_1pa_2 < \frac{\pi}{2} - 8\varepsilon$. Тогда по лемме 10.8.13,

$$\tilde{\angle}a_2pb_1 > \pi - \varepsilon - \tilde{\angle}a_1pa_2 > \frac{\pi}{2} + 7\varepsilon,$$

а в силу условия на четверки, примененного к $(p; a_2, b_1, b_2)$, имеем

$$\tilde{\angle}b_1pb_2 < 2\pi - \tilde{\angle}a_2pb_1 - \tilde{\angle}b_1pa_2 < \frac{\pi}{2} - 6\varepsilon.$$

Наконец, в силу леммы 10.8.13,

$$\tilde{\angle}a_1pb_2 > \pi - \varepsilon - \tilde{\angle}b_1pb_2 > \frac{\pi}{2} + 5\varepsilon.$$

Мы хотим показать, что разность $|a_1b_2| - |a_1a_2|$ слишком велика, чтобы удовлетворять последнему условию леммы.

Для этого (а также ниже в этом параграфе) нам понадобится следующий элементарный факт: для треугольника $\triangle xyz$ в \mathbb{R}^2 выполнено неравенство

$$(10.7) \quad |xz| > |xy| + |yz| \cdot \sin(\angle xyz - \frac{\pi}{2}).$$

Чтобы его доказать, заметим, что правая часть неравенства равняется расстоянию от точки x до проекции точки z на прямую xy .

Так как $|pa_2| < |a_2b_2| < \frac{\varepsilon}{4}|pa_1|$, то $\tilde{\angle}pa_1a_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\tilde{\angle}a_1a_2p > \pi - \tilde{\angle}a_1pa_2 - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\pi}{2} + 7\varepsilon.$$

Применяя (10.7) к треугольнику сравнения для $\triangle a_1a_2p$, мы получаем, что $|a_1p| > |a_1a_2| + \sin(7\varepsilon)|a_2p|$. Аналогично, из неравенства $\tilde{\angle}a_1pb_2 > \frac{\pi}{2} + 5\varepsilon$ следует, что $|a_1b_2| > |a_1p| + \sin(5\varepsilon)|pb_2|$. Таким образом,

$$|a_1b_2| > |a_1a_2| + \sin(5\varepsilon)(|a_2p| + |pb_2|) > |a_1a_2| + \varepsilon|a_2b_2|,$$

что противоречит последнему условию леммы. \square

Теперь введем локальные координаты в окрестности распертой точки. В качестве координатных функций будем использовать расстояния до точек a_i . Более формально, имея m -распор $\{(a_i, b_i)\}$ в точке p , мы определим отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, где U окрестность точки p , равенством

$$f(x) = (|xa_1|, \dots, |xa_m|).$$

Функции $x \mapsto |xa_i|$ (как и само отображение f) мы будем называть *дистанционными координатами*, ассоциированными с распором $\{(a_i, b_i)\}$. Очевидно, что отображение f липшицево, так как координатные функции липшицевы.

Мы предполагаем окрестность U достаточно малой. Во-первых, множество тех $x \in X$, для которых набор $\{(a_i, b_i)\}$ является m -распором в точке x , является открытым (напомним, что m -распором называется (m, ε) -распор, для которого $\varepsilon = \frac{1}{100m}$). Мы будем предполагать, что U содержится в этом множестве. Во-вторых, мы потребуем, чтобы диаметр множества U был значительно меньше, чем $\min\{|pa_i|, |pb_i|\}$.

Если $X = \mathbb{R}^n$ и $m = n$, то множества уровней для функций $x \mapsto |xa_i|$ являются сферами, пересекающимися почти ортогонально вблизи точки p . Поэтому для каждого набора радиусов (r_1, \dots, r_n) , близкого к $(|px_1|, \dots, |px_n|)$, пересечение соответствующих сфер одноточечно и эта точка лежит вблизи p . Аналогичное утверждение справедливо и для максимального распора в пространстве Александрова. Это утверждение состоит из двух частей: то, что f является открытым отображением (т.е., образ любого открытого множества открыт), и то, что f инъективное отображение, причем его обратное отображение является липшицевым. Мы начнем с первой части (которая верна для любого распора, не только для максимального).

Предложение 10.8.15. *Любая (m, ε) -распертая точка $p \in X$ (где $\varepsilon = \frac{1}{100m}$) имеет такую окрестность U , что дистанционные координаты определяют открытое отображение из U в \mathbb{R}^m .*

Доказательство. Рассмотрим (m, ε) -распор $\{(a_i, b_i)\}$ в точке p . Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — ассоциированные с этим распором дистанционные координаты. Мы можем считать, что $|qa_i| > 1$ и $|qb_i| > 1$ для всех $q \in U$, $i = 1, \dots, m$. Этого можно добиться за счет изменения масштаба и выбора достаточно малой окрестности U . Более того, мы можем считать, что U настолько мала, что $\{(a_i, b_i)\}$ является (m, ε) -распором в любой точке $q \in U$. Мы покажем, что $f(U)$ содержит окрестность точки $f(p)$ в \mathbb{R}^m . Те же рассуждения, примененные вместо p к произвольной точке

$q \in U$, доказывают, что $f(U)$ содержит окрестность точки $f(q)$. Поэтому f — открытое отображение.

Пусть точка $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ лежит в малой окрестности точки $f(p)$. Найдем такую точку $x \in U$, что $f(x) = y$. Мы сделаем это с помощью последовательных приближений. Идея в следующем. Возьмем $x = p$, как начальное приближение. Затем, на каждом шаге, берем $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ и сдвигаем x вдоль одной из кратчайших $[xa_{i_0}]$ или $[xb_{i_0}]$ пока расстояние $|xa_{i_0}|$ не примет нужное значение (т.е., не станет равным y_{i_0}). Так как мы двигаем x почти ортогонально другим кратчайшим $[xa_i]$, то расстояния $|xa_i|$ ($i \neq i_0$) почти не меняются. Поэтому точка $f(x)$ становится все ближе и ближе к y . С другой стороны, расстояния между старым и новым положениями нашей точки x приблизительно равно изменению i_0 -й координаты точки $f(x)$ или, что почти то же самое, расстоянию между старым и новым положениями точки $f(x)$. Так как $f(x)$ приближается к y достаточно быстро, то путь, по которому идет эта точка, не может быть длинным. Поэтому x также не может далеко уйти и процесс сходится. Ниже приведены формальные детали.

Положим $x_0 = p$ и рассмотрим последовательность x_0, x_1, \dots точек, где x_{n+1} выбирается рекурсивно зависящим от x_n следующим образом. Положим $\delta_i = \delta_{i,n} = |y_i - |x_n a_i||$ для $i = 1, \dots, m$ и $\Delta_n = \|y - f(x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^m |\delta_{i,n}|$. Мы покажем по индукции, что $\Delta_n < \Delta_0$. При этом мы можем считать, что $\Delta_0 < \varepsilon/10$. Предположим, что $x_n \in U$ (это тоже нужно будет проверить по индукции). Положим $\delta = \max_i |\delta_i|$ и выберем i_0 так, чтобы $|\delta_{i_0}| = \delta$. Очевидно, что $\frac{1}{m}\Delta_n \leq \delta \leq \Delta_n$. Теперь выберем точку x_{n+1} на объединении кратчайших $[x_n a_{i_0}] \cup [x_n b_{i_0}]$ так, что $|x_{n+1} a_{i_0}| = y_{i_0}$. (Существование такой точки очевидно ввиду малости всех поправок по сравнению с распором). Тем самым i_0 -я координата точки $f(x_{n+1})$ принимает нужное значение. (Если кратчайшие не существуют, нужно использовать вместо этого “почти кратчайшие”.) Покажем, что другие координаты точки $f(x_{n+1})$ лишь немного отличаются от соответствующих координат точки $f(x_n)$.

Во-первых, заметим, что $|x_n x_{n+1}| < 2\delta$. Если $|x_n a_{i_0}| > |x_{n+1} a_{i_0}|$, то $x_{n+1} \in [x_n a_{i_0}]$, и мы имеем $|x_n x_{n+1}| = |x_n a_{i_0}| - |x_{n+1} a_{i_0}| = \delta$. В противном случае $x_{n+1} \in [x_n b_{i_0}]$. Тогда по монотонности углов $\tilde{\angle} a_{i_0} x_n x_{n+1} \geq \tilde{\angle} a_{i_0} x_n b_{i_0} > \pi - \varepsilon$, а из (10.7) и соотношения $|x_{n+1} a_{i_0}| = |x_n a_{i_0}| + \delta$ следует неравенство $|x_n x_{n+1}| < 2\delta$.

Напомним, что $\{(a_i, b_i)\}$ остаются (m, ε) -распором в точках x_n до тех пор, пока $x_n \in U$, а по предложению 10.8.12 этот набор остается (m, ε) -распором, если заменить a_{i_0} или b_{i_0} (в зависимости от того, какому из отрезков $[x_n a_{i_0}]$ или $[x_n b_{i_0}]$ принадлежит точка x_n) на x_{n+1} . Следовательно, $|\tilde{\angle} a_i x_n x_{n+1} - \frac{\pi}{2}| < 11\varepsilon$ для любых $i \neq i_0$ (ср. замечание

10.8.10). Из того, что $|a_i x_n| > 1$ и $|x_n x_{n+1}| < 2\delta$, следует, что $|\tilde{\angle} x_n a_i x_{n+1}| < 4\delta < \varepsilon$. Поэтому при $i \neq i_0$ имеем. $|\tilde{\angle} a_i x_{n+1} x_n - \frac{\pi}{2}| < 12\varepsilon$ Тем самым из (10.7) следует, что

$$||a_i x_n| - |a_i x_{n+1}|| < |x_n x_{n+1}| \cdot \sin(12\varepsilon) < 24\delta\varepsilon,$$

а поэтому $|\delta_{i,n+1}| < |\delta_{i,n}| + 24\varepsilon\delta$ for all $i \neq i_0$. Таким образом,

$$\Delta_{n+1} < \Delta_n - \delta + 24(m-1)\varepsilon\delta < \Delta_n - \frac{1}{2}\delta < (1 - \frac{1}{2m})\Delta_n$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\varepsilon \leq \frac{1}{100m}$). Заметим, что мы проверили одно из наших индуктивных предположений: $\Delta_{n+1} < \Delta_n < \Delta_0$. Более того, $\Delta_n < (1 - \frac{1}{2m})^n \Delta_0$, поэтому последовательность $\{\Delta_n\}$ сходится к нулю, а значит $f(x_n) \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, если только $x_n \in U$ для всех n .

Осталось проверить, что последовательность $\{x_n\}$ не покидает U и является последовательностью Коши. Напомним, что

$$|x_n x_{n+1}| < 2\Delta_n < 2\Delta_0(1 - \frac{1}{2m})^n,$$

пока $x_n \in U$. Поэтому

$$|px_{n+1}| = |x_0 x_{n+1}| \leq \sum_{j=0}^n |x_j x_{j+1}| < \Delta_0 \cdot C(m),$$

где $C(m) = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2m})^j < \infty$. Мы можем выбрать наше $y \in \mathbb{R}^m$ настолько близко к $f(p)$, что $\Delta_0 = \|y - f(p)\|_1 < \text{diam}(U)/C(m)$. Тогда $|px_{n+1}| < \text{diam}(U)$ и, по индукции, последовательность $\{x_n\}$ целиком содержится в U . Так как $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n x_{n+1}| < \text{diam}(U) < \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью Коши, а ее предел принадлежит U . Этот предел и есть нужная нам y (есть такая, что $f(x) = y$) точка x . \square

Следствие 10.8.16. *Показатель распертости пространства Александрова не превосходит ее хаусдорфовой размерности.*

Доказательство. Если существует m -распор в X , то, по предложению 10.8.15, существует липшицево отображение из подмножества пространства X в открытое множество $V \subset \mathbb{R}^m$. Следовательно, $\dim_H(X) \geq \dim_H(V) = m$, так как липшицевы отображения не увеличивают хаусдорфову размерность (предложение 1.7.19). \square

Напомним, что m -распор определен как (m, ε) -распор при достаточно малом $\varepsilon > 0$, точнее, $\varepsilon = \frac{1}{100m}$. Возможно, естественнее было бы потребовать существование (m, ε) -распора для произвольно малых ε . К счастью, это более сильное требование выполняется автоматически: как только найден m -распор, его “качество” можно улучшить неограниченно.

Предложение 10.8.17 (Улучшение распора). *Для любой (m, ε) -распертой точки p , где $\varepsilon \leq \frac{1}{100m}$, и любого $\varepsilon' > 0$ в каждой окрестности точки p существует (m, ε') -распертые точки.*

Доказательство. Мы начнем с (m, ε) -распора $\{(a_i, b_i)\}$ в точке p и передвинем все эти точки (включая точку p) так, чтобы получить (m, ε') -распор. Будем обозначать новые точки теми же буквами p, a_i, b_i . Улучшение распора будет сделано в два этапа. Сначала мы сделаем углы $\tilde{\angle} a_i p b_i$ очень близкими к π . Затем делаются очень близкими к $\frac{\pi}{2}$ остальные углы.

Чтобы обеспечить близость углов $\tilde{\angle} a_{i_0} p b_{i_0}$ к π , сделаем следующее. Рассмотрим дистанционные координаты $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, ассоциированные с $\{(a_i, b_i)\}$, где U — очень малая окрестность точки p . Так как $f(U)$ открыто в \mathbb{R}^m , можно найти две такие точки $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ в $f(U)$, что $x_i = y_i$ при всех $i \neq i_0$, и $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Выберем такие a и b в U , что $x = f(a)$ и $y = f(b)$. Тогда $|a_i a| = |a_i b|$ для всех $i \neq i_0$. Заменим a_{i_0} на a , b_{i_0} — на b , а p — на середину p' между точками a и b (или на такую почти-середину p' , что $\tilde{\angle} a p' b > \pi - \varepsilon'$). Из леммы 10.8.14, примененной к точкам p', a_i, b_i, a, b , следует, что новый набор точек является (m, ε) -распором для новой точки $p = p'$.

Применяя эту конструкцию по очереди при $i_0 = 1, \dots, m$, можно получить (m, ε) -распор, в котором $\tilde{\angle} a_i p b_i > \pi - \varepsilon'$ при всех i . (Читатель может удивиться, почему соотношения (например $\tilde{\angle} a_1 p b_1 > \pi - \varepsilon'$) сохраняются, когда мы изменяем другие углы. Ответ прост: окрестности, в которых мы выбираем точки, каждый раз берутся достаточно малыми, чтобы эти неравенства сохранялись.)

Теперь применим нашу процедуру еще один раз. Так как все (a_i, b_i) теперь являются $(1, \varepsilon')$ -распорами, то из леммы 10.8.14 следует, что получившийся набор точек является (m, ε') -распором. \square

Теорема 10.8.18. *Если точка $p \in X$ является m -распертой и число m равняется показателю распертости в точке p , то существует окрестность точки p билипшицево гомеоморфная открытой области в \mathbb{R}^n .*

В качестве такого гомеоморфизма можно взять дистанционные координаты ассоциированные с любым m -распором. Более того, константы Липшица этого отображения и ему обратного не превосходят $500m$.

Доказательство. Рассмотрим m -распор $\{(a_i, b_i)\}$ в точке $p \in X$ и соответствующие дистанционные координаты $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Предположим, что в малой окрестности U точки p нет $(m+1)$ -распертых точек. Мы уже знаем, что f открыто (предложение 10.8.15).

Чтобы продемонстрировать идею доказательства, покажем, сначала, что f инъективно (а поэтому является локальным гомеоморфизмом). Предположим, что это не так, т.е. существуют такие точки $a, b \in U$, что $|a_i a| = |a_i b|$ для $i = 1, \dots, m$. Тогда по лемме 10.8.14 почти-середина между точками a и b является $(m+1)$ -распертой точкой, причем распором может служить набор из исходных точек $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и пары (a, b) , взятой в качестве (a_{m+1}, b_{m+1}) .

Чтобы доказать, что f билипшицево, мы применим такие же доводы для того, чтобы оценить снизу $|f(a)f(b)|$ через $|ab|$. По лемме 10.8.14 по крайней мере для одного i

$$||a_i a| - |a_i b|| \geq \frac{\varepsilon}{4} |ab|,$$

где $\varepsilon = \frac{1}{100m}$. Действительно, в противном случае существовал бы $(m+1)$ -распор для почти-середины между a и b . Теперь $|f(a)f(b)| \geq ||a_i a| - |a_i b|| \geq \frac{1}{500m} |ab|$. Следовательно, отображение f^{-1} липшицево с константой Липшица $500m$.

Так как координатное отображение не увеличивает расстояния, то постоянной Липшица для f может служить число m . \square

Замечание 10.8.19. Константа Липшица $500m$ в теореме является очень слабым достижением. Более тонкие рассуждения показывают, что константа Липшица для f и f^{-1} (сколь угодно) близка к 1, если только точка p имеет (m, ε) -распор с достаточно малым ε .

Теперь мы перейдем к доказательству сформулированных в начале параграфа теорем.

Следствие 10.8.20. *Все конечномерные пространства Александрова локально компактны.*

Доказательство. Пусть X — пространство Александрова с показателем распертости m . Мы знаем, что $m \leq \dim_H(X) < \infty$. В X существует m -распертая точка p . Тогда, по теореме 10.8.18, некоторая окрестность U точки p гомеоморфна \mathbb{R}^m . В частности, U локально компактна, поэтому существует такое $r > 0$, что шар $B_r(p)$ предкомпактен.

Докажем, что для любого $R > 0$ шар $B_R(p)$ также предкомпактен. Предположим противное. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_R(p)$ содержит бесконечное ε -разделенное множество S . Напомним конструкцию из леммы 10.6.2: если метрика строго внутренняя, то можно определить “гомотетию” $f : B_R(p) \rightarrow B_r(p)$, для которой $|f(x)f(y)| \geq \frac{r}{R}|xy|$. По определению гомотетии, образом $f(x)$ точки $x \in B_R(p)$ служит такая точка кратчайшей $[px]$, что $|pf(x)| = \frac{r}{R}|px|$. Хотя в нашем случае метрика X не обязательно строго внутренняя, но можно изменить

эту конструкцию, используя “почти кратчайшие” вместо кратчайших. Таким образом, можно гарантировать неравенство $|f(x)f(y)| > \frac{r}{2R}|xy|$ для точек x, y из любого конечного множества, в частности, любого конечного подмножества $S' \subset S$. Таким образом, шар $B_r(p)$ содержит $\frac{r}{2R}$ -разделенное множество $f(S')$ с любым количеством точек, а поэтому он не предкомпактен. Полученное противоречие показывает, что любой шар с центром в p (а следовательно и вообще любой шар в X) предкомпактен, а значит X локально компактно. \square

Следствие 10.8.21. *Хаусдорфова размерность локально компактного пространства Александрова (в частности конечномерного) равняется показателю распертости.*

Поэтому хаусдорфова размерность любого пространства Александрова либо является целым числом, либо бесконечностью.

Доказательство. Пусть m — показатель распертости пространства Александрова X . Мы уже знаем (следствие 10.8.16), что $m \leq \dim_H(X)$. Если $m = \infty$, то больше ничего доказывать не надо. В противном случае рассмотрим такую окрестность U m -распертой точки, которая билипшицево гомеоморфна \mathbb{R}^m . Так как билипшицев гомеоморфизм сохраняет хаусдорфову размерность, то $\dim_H(U) = m$. В силу однородности размерности (теорема 10.6.1) получаем, что $\dim_H(X) = \dim_H(U) = m$. \square

Упражнение 10.8.22. Докажите это следствие без предположения о локальной компактности.

Подсказка. Единственный случай, который еще не разобран — это когда $\dim_H(X) = \infty$, но $m < \infty$. Так как $m < \infty$, то существует по крайней мере одно предкомпактное открытое множество (например, окрестность m -распертой точки). Покажите, что доказательство однородности размерности (точнее конструкция гомотетии) работает и в этом случае.

Следствие 10.8.23. *Множество n -распертых точек n -мерного пространства Александрова X открыто и всюду плотно в X . Кроме того, это множество является n -мерным многообразием.*

Доказательство. То, что множество n -распертых точек образует n -мерное многообразие, немедленно следует из теоремы 10.8.18. Первое утверждение следствия равносильно тому, что показатель распертости в каждой точке $p \in X$ равен n . Пусть m — показатель распертости в точке p . Тогда некоторая окрестность U точки p билипшицево гомеоморфно \mathbb{R}^m , а следовательно $\dim_H(U) = m$. Тогда $m = \dim_H(X) = n$ по однородности размерности. \square

Комбинируя следствие 10.8.23 и предложение 10.8.17 об улучшении распора, мы получаем такое

Следствие 10.8.24. *В n -мерном пространстве Александрова X для любого $\varepsilon > 0$ множество (n, ε) -распертых точек открыто и всюду плотно в X .*

В заключение мы получим ту оценку на размерность предела по Громову–Хаусдорфу, которая использовалась в доказательстве теоремы Громова о компактности 10.7.2. Эта оценка имеет множество других приложений.

Следствие 10.8.25. *Предел по Громову–Хаусдорфу последовательности компактных пространств Александрова кривизны $\geq k$ и размерности $\leq n$ также является пространством Александрова кривизны $\geq k$ и размерности $\leq n$.*

То же самое верно и для пределов по Громову–Хаусдорфу (возможно неограниченных) пространств с отмеченной точкой.

Доказательство. Доказательства для компактных пространств и пространств с отмеченными точками аналогичны. Пусть $\{X_i\}$ — последовательность компактных пространств Александрова кривизны $\geq k$, причем $\dim_H(X_i) \leq n$ для всех i и $X_i \xrightarrow{GH} X$ при $i \rightarrow \infty$. По предложению 10.7.1 пространство X компактно и имеет кривизну $\geq k$. Предположим, что $\dim_H(X) > n$. Так как $\dim_H(X)$ равняется показателю распертости пространства X (следствие 10.8.21), то существует $(n+1)$ -распертая точка $p \in X$. Зафиксируем $(n+1)$ -распор $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{n+1}$ для p . Как только X_i становятся достаточно близкими к X , в них можно найти такие точки p', a'_j, b'_j , что расстояния между ними почти равны расстояниям между соответствующими точками p, a_j, b_j в X . Тогда углы сравнения ($\tilde{\angle}$) для троек этих точек в X_i почти равны соответствующим углам сравнения в X , ибо углы $\tilde{\angle}$ непрерывно зависят от расстояний. В частности, неравенства из определения распертой точки будут выполнены для набора p', a'_j, b'_j . Таким образом, X_i содержит $(n+1)$ -распор, а поэтому $\dim_H(X_i) \geq n+1$ для всех достаточно больших i . \square

10.9. Пространства направлений и касательные конусы

10.9.1. Основные свойства.

Предложение 10.9.1. *Пространство направлений в любой точке конечномерного пространства Александрова компактно.*

Доказательство. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 10.9.2. *Существует постоянная $C = C(n, k)$ со следующими свойствами. В любом n -мерном пространстве Александрова X кривизны $\geq k$ никакой шар $B_r(p)$, где $p \in X$, $0 < r < 1$, ни при каком $0 < \varepsilon < 1$ не может содержать (εr) -разделенное множество, содержащее более, чем C/ε^n точек.*

Доказательство леммы. Эта лемма — просто уточнение следствия 10.8.20 о локальной компактности. Все, что нам нужно — это дать точную оценку на число точек в ε -разделенном множестве.

Наметим схему доказательства. Утверждение леммы очевидно для шаров в \mathbb{R}^n . Тем самым оно справедливо для окрестностей n -распертых точек p с постоянной C , выраженной через ту константу Липшица, которая указана во второй части теоремы 10.8.18. После этого мы распространим утверждение леммы на все шары, используя гомотетию из леммы 10.6.2. (Однако, чтобы доказательство работало и в случае $k < 0$, требуется ограничить радиусы шаров сверху.) Перейдем к деталям доказательства.

Рассмотрим n -распертую точку p и пусть r настолько мало, что $U = B_r(p)$ допускает билипшицево отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, с растяжением $\text{dil } f \leq c_1$ и $\text{dil } f^{-1} \leq c_1$, где $c_1 = 500n$ (см. теорему 10.8.18). Тогда любому (εr) -разделенному множеству в $B_r(p)$ соответствует $(\varepsilon r/c_1)$ -разделенное множество в шаре радиуса $c_1 r$ пространства \mathbb{R}^n . Последнее множество не может содержать больше, чем C/ε^n точек, где $C = c_2 \cdot c_1^2$, а c_2 — соответствующая константа для \mathbb{R}^n .

Почти та же самая постоянная C годится и для шаров с центром в любой точке. Действительно, рассмотрим (εr) -разделенное множество $S \subset B_r(p)$ для произвольной точки $p \in X$, где $0 < r < 1$. Найдем очень близко к p n -распертую точку q и малый шар $U = B_\delta(q)$, удовлетворяющий теореме 10.8.18. Рассмотрим $(\delta/2r)$ -гомотетию $f : B_{2r}(q) \rightarrow B_\delta(q)$. Мы знаем, что $|f(x)f(y)| \geq (\delta/2r) \cdot |xy|$ для всех x, y . Следовательно, $f(S)$ является $(\varepsilon\delta/2)$ -разделенным множеством в $B_\delta(q)$. Поэтому число точек в $f(S)$, а значит и в S , не превосходит $C(\varepsilon/2)^n$.

Если $k < 0$, то эти формулы нужно немного изменить. Достаточно умножить нашу константу на число $\sinh^m(-k)$, которое соответствует поправочному коэффициенту $\sinh(-k)$, возникающему в оценке снизу для $|f(x)f(y)|$ в единичном шаре на k -плоскости. \square

Теперь продолжим доказательство предложения. Мы покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ пространство направлений не может содержать ε -разделенного множества, состоящего из более, чем C/ε^n точек, где C — некоторая константа (почти та же, что и в лемме). Пусть $S = \{x_i\}_{i=1}^N$ — ε -разделенное множество в $\Sigma_p(X)$. Мы можем предполагать, что точки

x_i представимы выходящими из p (параметризованными длиной дуги) кратчайшими γ_i .

По определению угла, $\angle \tilde{\gamma}_i(t) p \gamma_j(t) \rightarrow \angle(\gamma_i, \gamma_j) = |x_i x_j|$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому можно найти столь малое $r > 0$, что кратчайшие γ_i определены на промежутке $[0, r]$ и $\angle \tilde{\gamma}_i(r) p \gamma_j(r) > \frac{1}{2}|x_i x_j| > \varepsilon/2$. Следовательно, $|\gamma_i(r) \gamma_j(r)| > 2r \sin(\varepsilon/4) > r\varepsilon/4$, для всех i, j ($i \neq j$). Другими словами, мы получаем $(r\varepsilon/4)$ -разделенное множество в шаре радиуса r . Применение леммы 10.9.2 дает желаемую оценку сверху на количество точек в этом множестве. Так как ε произвольно, то $\Sigma_p(X)$ компактно. \square

Напомним, что касательным конусом $K_p(X)$ в точке $p \in X$ называется конус над пространством направлений $\Sigma_p(X)$; он состоит из вершины o и точек вида (ξ, r) , где $x \in \Sigma_p(X)$ и $r > 0$. Расстояние от (ξ, r) до вершины равно r , а расстояние между $a_1 = (\xi_1, r_1)$ и $a_2 = (\xi_2, r_2)$ определяется так, что угол $\angle(\xi_1, \xi_2)$ равен евклидову углу сравнения $\angle_0 a_1 o a_2$.

Теорема 10.9.3. *В каждой точке $p \in X$ конечномерного пространства Александрова X существует касательный конус (по Громову–Хаусдорфу), причем он изометричен конусу $K_p(X)$ над пространством направлений в этой точке.*

Доказательство. Обозначим через B единичный шар с центром в вершине o в конусе $K_p(X)$. Нам надо показать, что “раздутые” шары $\frac{1}{r}B_r(p)$ сходятся в метрике Громова–Хаусдорфа к B при $r \rightarrow 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По одному из критериев сходимости по Громову–Хаусдорфу (а именно, по предложению 7.4.11) достаточно найти такие конечные ε -сети, $\{x_i\}$ в B и $\{y_i\}$ в $\frac{1}{r}B_r(p)$, соответственно, что для всех достаточно малых r выполняется $||x_i x_j| - |y_i y_j|| < \varepsilon$ при всех i, j .

Выберем в B такую конечную ε -сеть $\{x_i\}$, что все ее элементы представимы кратчайшими. Обозначим через γ_i кратчайшую, представляющую x_i и имеющую постоянную скорость, равную $|ox_i|$. Предположим, что r настолько мало, что точка $p_i = \gamma_i(r)$ определена при всех i и

$$\left| \frac{|p_i p_j|}{r} - |x_i x_j| \right| < \varepsilon$$

при всех i, j . (Для достаточно малых r это неравенство является прямым следствием определения касательного конуса.) Пусть теперь точки $\{y_i\}$ раздутого шара $\frac{1}{r}B_r(X)$ соответствуют точкам $\{p_i\}$. Приведенное выше неравенство означает, что $||y_i y_j| - |x_i x_j|| < \varepsilon$ для всех i, j .

Осталось показать, что $\{y_i\}$ является ε -сетью в $\frac{1}{r}B_r(X)$, или, что равносильно, в единичном шаре пространства $X' = \frac{1}{r}X$. Для этого, напомним, что для пространств X неотрицательной кривизны “логарифмическое” отображение $\log_p : X' \rightarrow K_p(X') = K_p(X)$ из леммы 10.6.10 является

несжимающим. Так как $\{x_i\}$ является ε -сетью в единичном шаре пространства $K_p(X)$, то для любой точки y в единичном шаре пространства X' найдется такая точка x_i , что $|\log_p(y)x_i| < \varepsilon$. Поскольку мы можем считать, что $x_i = \log_p(y_i)$, а отображение \log_p — несжимающее, то $|yy_i| \leq \varepsilon$. Поэтому $\{y_i\}$ является ε -сетью.

Если кривизна ограничена снизу числом $k \neq 0$, то проходят те же самые рассуждения с незначительными изменениями. Так как перенормированное пространство $X' = \frac{1}{r}X$ имеет кривизну $\geq kr^2$ (и эта оценка стремится к нулю при $r \rightarrow 0$), то для достаточно малых r логарифмическое отображение удовлетворяет в единичном шаре неравенству $|\log_p(x) \log_p(y)| \geq \frac{1}{2}|xy|$. Тем самым $\{y_i\}$ является (2ε) -сетью. \square

Замечание 10.9.4. Заметим, что проведенные рассуждения не только доказывают, что $K_p(X)$ — предел по Громову–Хаусдорфу раздутых шаров, но и подсказывает, как построить отображения с малым искажением из шаров в конус. В действительности искажение “логарифмического” отображения стремится к нулю, когда радиусы шаров стремятся к нулю. Формулируя это в терминах углов вместо расстояний, можно получить следующий полезный факт: для любых $p \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что $|\tilde{\angle}xpy - \angle xpy| < \varepsilon$, если $|px|$ и $|py|$ меньше, чем r .

Следствие 10.9.5. *В каждой точке p любого n -мерного пространства Александрова X касательный конус $K_p(X)$ является n -мерным пространством Александрова неотрицательной кривизны.*

Доказательство. Конус $K_p(X)$ является пространством с внутренней метрикой и имеет неотрицательную кривизну как предел по Громову–Хаусдорфу пространств неотрицательной кривизны (по предложению 10.7.1). Подробнее, если X имеет кривизну $\geq k$, то кривизна пространства $\lambda^{-1}X$ не меньше λ^2k , и эта оценка стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$. Значит, предел по Громову–Хаусдорфу $K_p(X)$ имеет кривизну $\geq -\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, следовательно, он имеет неотрицательную кривизну.

Осталось доказать равенство размерностей $\dim_H K_p(X) = \dim_H X$. Неравенство $\dim_H(K_p(X)) \geq \dim_H(X)$ следует из того, что существует несжимающее отображение из X в $K_p(X)$, а именно, “логарифмическое” отображение (см. лемму 10.6.10). Обратное неравенство следует из теоремы 10.9.3 и следствия 10.8.25 о размерности предела по Громову–Хаусдорфу. \square

Следствие 10.9.6. *В любой точке p n -мерного пространства Александрова X пространство направлений $\Sigma_p(X)$ при $n \geq 2$ является $(n-1)$ -мерным пространством Александрова кривизны ≥ 1 , если же $n = 1$, то $\Sigma_p(X)$ состоит из одной или двух точек.*

Доказательство. Конус $K_p(X)$ имеет неотрицательную кривизну. Поэтому из теоремы 10.2.3 следует, что $\Sigma_p(X)$ или является пространством с внутренней метрикой кривизны ≥ 1 или (при $n = 1$) состоит ровно из двух точек. (Дополнительное условие, что в $\Sigma_p(X)$ не существует треугольника с периметром большим, чем 2π , следует из упражнения 10.1.3.) Так как $\dim_H K_p(X) = n$, то $\dim_H \Sigma_p(X) = n - 1$. Последнее, очевидное на вид, заключение мы оставляем читателю в качестве упражнения. \square

10.9.2. Регулярные точки.

Определение 10.9.7. Точка p n -мерного пространства Александрова называется *регулярной*, если пространство направлений $\Sigma_p(X)$ в этой точке изометрично стандартной сфере S^{n-1} .

Очевидно, что p регулярна тогда и только тогда, когда касательный конус $K_p(X)$ изометричен \mathbb{R}^n .

Пример 10.9.8. Если X — поверхность выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 , то все ее точки, кроме вершин, регулярны. Это вызвано тем, что внутренняя метрика такой поверхности плоская всюду, кроме вершин.

Пример 10.9.9. Если X — дважды покрытый круг (то есть, две копии круга, склеенные по границе), то все точки пространства X регулярны.

Следующая лемма содержит интересный “глобальный” факт о пространствах Александрова кривизны ≥ 1 . Она говорит о том, как можно охарактеризовать стандартную сферу заданием конечного набора точек с предписанными расстояниями между ними.

Лемма 10.9.10. Пусть в пространстве Александрова Y кривизны ≥ 1 и размерности не больше, чем $n - 1$ ($n \geq 2$), существуют такие n пар точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ в Y , что $|x_i y_i| = \pi$ для всех i и $|x_i x_j| = |x_i y_j| = |y_i y_j| = \frac{\pi}{2}$, если $i \neq j$. Тогда Y изометрично S^{n-1} .

Мы будем называть набор $\{(x_i, y_i)\}$, удовлетворяющий условиям леммы, *ортогональным набором*. Такие наборы у нас появятся в ситуациях, когда Y будет пространством направлений. В этих случаях лемма говорит, что точка n -мерного пространства Александрова регулярна тогда и только тогда, когда в ней существует ортогональный набор из n пар направлений.

Доказательство. Мы докажем эту лемму индукцией по n . Так как $\text{diam}(Y) = \pi$, то Y — надстройка (сферический конус) над пространством Александрова Z кривизны ≥ 1 (см. упражнение 10.4.3). Кроме того, можно взять пару (x_n, y_n) в качестве полюсов надстройки. Тогда

$$Z = \{x \in Y : |x x_n| = |x y_n| = \frac{\pi}{2}\}.$$

В частности, Z содержит точки x_i и y_i для всех $i = 1, \dots, n-1$. Таким образом, по индукционному предположению, Z изометрично S^{n-2} , а поэтому Y изометрично S^{n-1} . База ($n = 2$) доказывается точно также (используя теорему 10.2.3). \square

Упражнение 10.9.11. Предположим, пространство Александрова Y кривизны ≥ 1 содержит такие n пар точек $\{(x_i, y_i)\}$, что $|x_i y_i| = \pi$ при всех i , а определитель $n \times n$ матрицы $(\cos |x_i x_j|)$ не равен нулю. Докажите, что тогда Y содержит подмножество, изометричное стандартной сфере S^{n-1} , в частности Y изометрично S^{n-1} , если $\dim_H(Y) \leq n-1$.

Следствие 10.9.12. Точка p n -мерного пространства Александрова регулярна тогда и только тогда, когда она (n, ε) -расперта для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Предположим, что p регулярна. Тогда существует n пар направлений $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty$ в $\Sigma_p(X)$, для которых $\angle(\xi_i, \eta_i) = \pi$ при всех i и $\angle(\xi_i, \xi_j) = \angle(\xi_i, \eta_j) = \angle(\eta_i, \eta_j) = \pi/2$ при $i \neq j$. Рассмотрим кратчайшие, направления которых близки к ξ_i и η_i , и возьмем на этих кратчайших точки, близкие к p . Эти точки образуют (n, ε) -распор (см третий пункт предложения 10.8.12).

Теперь предположим, что p (n, ε) -расперта для любого $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ пространство направлений $\Sigma_p(X)$ содержит n пар точек (ξ_i, η_i) , для которых $|\xi_i \eta_i| > \pi - \varepsilon$, а другие расстояния между этими точками отличаются от $\frac{\pi}{2}$ не более, чем на (11ε) (см. второй пункт предложения 10.8.12). Так как $\Sigma_p(X)$ компактно, то можно выбрать сходящуюся подпоследовательность таких пар, соответствующую последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$. В пределе мы получим набор точек в Σ_p , удовлетворяющий условиям леммы 10.9.10. Следовательно, $\Sigma_p(X)$ изометрично S^{n-1} . \square

Следствие 10.9.13. Множество регулярных точек пространства Александрова всюду плотно и, более того, является пересечением счетного набора открытых всюду плотных множеств.

Доказательство. В n -мерном пространстве Александрова X каждому натуральному i сопоставим множество S_i $(n, 1/i)$ -распертых точек. По следствию 10.8.24 множество S_i открыто и всюду плотно. По следствию 10.9.12, множество регулярных точек является пересечением всех S_i . Теперь, по теореме Бэра 1.5.13, это множество всюду плотно в X . \square

Следующей нашей целью будет доказательство того, что достаточно малая окрестность регулярной точки близка в метрике Липшица к евклидовой области. Начнем с уточнения леммы 10.9.10. Оно говорит о некоторой стабильности в лемме 10.9.10. А именно, если пространство

кривизны ≥ 1 содержит “почти ортогональный” набор направлений, то оно близко в метрике Громова–Хаусдорфа к сфере.

Эта теорема иллюстрирует важную идею использования теоремы Громова о компактности. Эта идея позволяет во многих случаях почти автоматически извлечь утверждения о стабильности из утверждений о жесткости (см., например, упражнение 10.9.15).

Лемма 10.9.14. *Для любого целого $n \geq 2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что выполнено следующее.*

Предположим, что пространство Александрова Y кривизны ≥ 1 и размерности, не превосходящей $n - 1$, содержит такие n пар точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, что $|x_i y_i| > \pi - \delta$ для всех i , а расстояния $|x_i x_j|$, $|x_i y_j|$ и $|y_i y_j|$ ($i \neq j$) все отличаются от $\pi/2$ не больше, чем на δ . Тогда $d_{GH}(Y, S^{n-1}) < \varepsilon$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность пространств $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям леммы для $\delta = \delta_m$ (где $\delta_m \rightarrow 0$) и такая, что $d_{GH}(Y_m, S^{n-1}) \geq \varepsilon$. В силу теоремы о компактности 10.7.2 можно считать, что последовательность $\{Y_m\}$ сходится по Громову–Хаусдорфу к пространству Александрова Y кривизны ≥ 1 и размерности, не превосходящей $n - 1$. Мы покажем, что тогда Y изометрично S^{n-1} . Последнее противоречит нашему предположению.

Напомним (теорема 7.3.25), что существует соответствие между Y_m и Y с искажением, не большим $2d_{GH}(Y_m, Y)$. Таким образом, “почти ортогональный” набор точек в Y_m соответствует “почти ортогональному” набору точек в Y (где δ_m заменяется на $\delta_m + d_{GH}(Y_m, Y)$, которое все равно стремится к нулю). Извлекая сходящуюся подпоследовательность из этих наборов в Y , можно в пределе получить ортогональный набор. Из этого по лемме 10.9.10 следует, что $Y \simeq S^{n-1}$. \square

Вот несколько упражнений на сходное использование теоремы о компактности.

Упражнение 10.9.15. Докажите, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого n -мерного пространства Александрова X кривизны ≥ 1 выполнено следующее.

1. Если $\text{diam}(X) > \pi - \delta$, то X удалено в метрике Громова–Хаусдорфа не больше, чем на ε , от сферического конуса над некоторым пространством Александрова кривизны ≥ 1 и размерности, не превосходящей $n - 1$. (Сравните с упражнением 10.4.3.)
2. Если радиус пространства X (см. упражнение 10.4.5) больше, чем $\pi - \delta$, то X ε -близко к S^n , то есть $d_{GH}(X, S^n) < \varepsilon$.
3. Если $\mu_n(X) > \mu_n(S^n) - \delta$, то $d_{GH}(X, S^n) < \varepsilon$.

Подсказка. Используя неравенство Бишопы, сведите это неравенство к предыдущему.

Теорема 10.9.16. *Для любого натурального n и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждая (n, δ) -распертая точка любого пространства Александры имеет окрестность, отличающуюся в метрике Липшица (см. параграф 7.2) от некоторой открытой области в \mathbb{R}^n не больше, чем на ε .*

Мы дадим два доказательства, демонстрирующие различные подходы.

Доказательство. Покажем, что в достаточно малой окрестности U константы Липшица отображения $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, полученного с помощью дистанционных координат, ассоциированных с (n, δ) -распором $\{(a_i, b_i)\}$, и обратного ему отображения f^{-1} обе не превосходят $1 + \varepsilon$. Мы можем считать, что $\{(a_i, b_i)\}$ является (n, δ) -распором для любой точки нашей окрестности U . Нам надо показать, что для любых двух точек $x, y \in U$ отношение $|f(x)f(y)|/|xy|$ близко к 1. Рассматривая треугольник сравнения для $\Delta a_i xy$, можно заметить, что

$$f_i(y) - f_i(x) = |a_i y| - |a_i x| = |xy| \cdot \cos \tilde{\angle} a_i xy + o(|xy|).$$

Тогда

$$|f(y) - f(x)|^2 = \sum |f_i(y) - f_i(x)|^2 = |xy|^2 \cdot \sum \cos^2 \tilde{\angle} a_i xy + o(|xy|^2).$$

Чтобы показать, что отношение $|f(x) - f(y)|/|xy|$ близко к 1, достаточно доказать, что сумма $\sum \cos^2 \tilde{\angle} a_i xy$ близка к 1. Зафиксируем кратчайшие, соединяющие x с y , a_i и b_i , и обозначим через ξ , ξ_i и η_i соответствующие элементы пространства направлений $\Sigma_x(X)$. В силу последнего утверждения леммы 10.8.13 углы $|\xi \xi_i| = \angle a_i xy$ между этими кратчайшими почти равны углам сравнения $\tilde{\angle} a_i xy$. Поэтому достаточно доказать, что сумма $\sum \cos^2 |\xi \xi_i|$ близка к 1.

Заметим, что если пространство направлений $\Sigma_x(X)$ является стандартной сферой S^{n-1} , а $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ — ортогональный набор (в смысле леммы 10.9.10), то эта сумма равняется 1. Мы знаем, что $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ является “почти ортогональным набором” (с точностью до членов порядка δ) и, следовательно, по лемме 10.9.14 пространство направлений $\Sigma_x(X)$ близко к S^{n-1} в метрике Громова–Хаусдорфа. Тогда, по теореме 7.3.25, существует соответствие с малым искажением между $\Sigma_x(X)$ и S^{n-1} . Пусть $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}_i$ и $\bar{\eta}_i$ — точки на сфере, соответствующие точкам ξ , ξ_i и η_i . Тогда

$$\sum \cos^2 |\xi \xi_i| \approx \sum \cos^2 |\bar{\xi} \bar{\xi}_i| \approx 1$$

(второе приближенное равенство следует из того, что на сфере есть настоящий ортогональный набор, близкий к $\{(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)\}$). \square

Другое доказательство. Эту теорему можно также доказать, используя регулярные точки вместо леммы 10.9.14. А именно, приведенные выше рассуждения показывают, что приближенное равенство $\sum \cos^2 |\xi \xi_i| \approx 1$ выполнено, если $\Sigma_x(X)$ изометрично S^{n-1} , т.е. если x — регулярная точка. Значит, для регулярных точек неравенство $(1 + \varepsilon)^{-1}|xy| \leq |f(x)f(y)| \leq (1 + \varepsilon)|xy|$ выполняется. А так как регулярные точки всюду плотны, то это неравенство справедливо для любых x, y . \square

Заметим, что второе доказательство позволяет получить точную оценку δ через ε , в то время как первое только доказывает, что такое δ существует (посмотрите, как была доказана лемма 10.9.14).

Иногда полезна следующая переформулировка теоремы 10.9.16.

Следствие 10.9.17. *Для любого натурального $n \geq 1$ и любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что справедливо следующее утверждение. Если в точке p в n -мерном пространстве Александрова X выполнено неравенство $d_{GH}(\Sigma_p(X), S^{n-1}) < \varepsilon$, то существует окрестность точки p , удаленная в метрике Липшица от некоторой открытой области в \mathbb{R}^n меньше, чем на δ .*

Замечание 10.9.18. Точки $p \in X$, для которых $d_{GH}(\Sigma_p(X), S^{n-1}) < \varepsilon$, называются ε -регулярными точками. Множество X_ε ε -регулярных точек обладает рядом полезных свойств. Очевидно любая точка из X_ε является $(n, 2\varepsilon)$ -распертой и, следовательно, (при малых ε) имеет окрестность, гомеоморфную евклидовой. По тем же причинам внутренность множества X_ε всюду плотна в X (см. следствие 10.8.23).

Более того, хотя это звучит несколько неожиданно, множество X_ε выпукло в смысле, что любая кратчайшая, соединяющая две точки из X_ε , целиком лежит в X_ε . Это следует из того, что касательный конус постоянен вдоль любой кратчайшей, за исключением ее концов (и, кроме того, семейство касательных конусов полунепрерывно снизу). Другими словами, если x и y принадлежат внутренности некоторой кратчайшей, то $K_x(X)$ изометрично $K_y(X)$ [Pet].

Следствие 10.9.19. *Любая регулярная точка n -мерного пространства Александрова X имеет окрестность сколь угодно близкую в метрике Липшица к некоторой открытой области в \mathbb{R}^n .*

Упражнение 10.9.20. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что верно следующее утверждение. Если точка X принадлежит n -мерному пространству Александрова кривизны $\geq k$, и $\mu_n(B_r(p)) > V_{k,r}^n - \delta$, где $V_{k,r}^n$ — объем шара радиуса r в односвязной n -мерной пространственной форме кривизны k , то существует гомеоморфная \mathbb{R}^n окрестность точки p .

В частности, если объем любого шара радиуса r в X не меньше, чем $V_{k,r}^n - \delta$, то X — многообразие.

Подсказка. Используя модификацию рассуждений из доказательства неравенства Бишопа, покажите, что $(n - 1)$ -мерная мера пространства $\Sigma_p(X)$ близка к мере сферы S^{n-1} . Затем примените последнюю часть упражнения 10.9.15.

10.10. Дальнейшая информация

10.10.1. Стратификация. Говорят, что набор $\{X_i\}_{i=1}^N$ подмножеств топологического пространства X образует (конечную) *стратификацию* пространства X на топологические многообразия, если

- (1) множества X_i попарно не пересекаются и $\bigcup_{i=1}^N X_i = X$.
- (2) Каждое множество X_i является топологическим многообразием (без границы).
- (3) $\dim X_1 > \dim X_2 > \dots > \dim X_N$.
- (4) Множества $X_k^+ = \bigcup_{i=k}^N X_i$, $k = 1, \dots, N$, замкнуты в X . Или, что то же самое, при всех k замыкание множества X_k содержится в X_k^+ .

Эти множества X_i называются *стратами*. Страты могут быть несвязны.

Теорема 10.10.1. *Любое конечномерное пространство Александрова X допускает стратификацию на топологические многообразия.*

Более того, существует каноническая стратификация, при которой каждая компонента связности C любой страты топологически однородна в следующем смысле: любые точки $p, q \in C$ имеют в X окрестности, гомеоморфные, как пространства с отмеченными точками (последнее означает, что гомеоморфизм переводит p в q).

Эту стратификацию можно описать следующим образом: страта X_1 состоит из точек, каждая из которых имеет окрестность в X , гомеоморфную евклидову пространству \mathbb{R}^n , где n — размерность X . Далее, X_2 состоит из тех точек множества $X \setminus X_1$, которые имеют в $X \setminus X_1$ окрестности, гомеоморфные евклидовым областям максимальной возможной размерности (т.е. $n - 1$), и т.д. Главное в том, что при этой процедуре исчерпывается целиком все пространство.

Например, диск стратифицируется на его внутренность и границу, а конус над \mathbf{RP}^2 стратифицируется на дополнение вершины (которое является трехмерным плоским пространством) и саму вершину.

Следствие 10.9.6 позволяет дать индуктивное определение *границы* пространства Александрова. Во-первых, граница одномерного пространства — это его топологическая граница (напомним, что одномерными

пространствами Александрова являются только отрезки, лучи, прямые и окружности). Затем, предполагая, что понятие границы уже определено для размерностей $1, \dots, n - 1$, определим границу n -мерного пространства Александрова X как множество тех точек $p \in X$, для которых пространство направлений $\Sigma_p(X)$ имеет непустую границу.

Используя теорему о стратификации, можно доказать, что граница пространства Александрова обладает теми важными свойствами, которые у нас обычно ассоциируются со словом граница. Например граница всегда является замкнутым подмножеством коразмерности один. В действительности граница совпадает с замыканием страты коразмерности один.

Можно доказать, что не существует страт коразмерности два. Поэтому если пространство Александрова не имеет границы, то множество его топологически сингулярных точек очень тонкое: оно имеет коразмерность по крайней мере три.

Следующая теорема служит локальным уточнением теоремы 10.10.1.

Теорема 10.10.2. *Любая точка p конечномерного пространства Александрова имеет окрестность гомеоморфную касательному конусу в точке p (как пространства с отмеченными точками).*

Хотя теорема 10.10.2 выглядит проще, чем теорема 10.10.1, но “простого” доказательства для нее не известно. Дело в том, что обе теоремы доказываются одновременно индукцией по размерности и доказательство второй в размерности n использует первую теорему в размерностях меньших, чем n .

Доказательство обеих этих теорем (а также много других сильных результатов) имеется в препринте (точнее, рукописи) Г. Перельмана “A.D.Alexandrov’s spaces with curvatures bounded from below, II”. К сожалению эта работа не опубликована.

В действительности теорема 10.10.1 верна даже в более сильной форме: существует стратификация пространства Александрова на так называемые *примитивные экстремальные* подмножества. Это доказано в [Per1].

Мы не будем здесь определять, что такое экстремальное подмножество. Отметим только, что граница пространства Александрова всегда является экстремальным подмножеством. Другим примером экстремального подмножества может служить множество точек, у каждой из которых диаметр пространства направлений меньше, чем π .

Доказательства данных выше теорем сложны и опираются на изучение аналитических свойств функций расстояния и неэлементарные факты из топологии. Но это лежит за рамками нашей книги.

В размерности 2 результаты о топологической структуре пространства Александрова принимают очень простой вид:

Следствие 10.10.3. *Любое двумерное пространство Александрова является топологическим многообразием, возможно с границей.*

Упражнение 10.10.4. 1. Докажите следствие 10.10.3 напрямую (без ссылки на теоремы о стратификации).

2. Пусть X — трехмерное пространство Александрова без границы. Докажите, что топологически сингулярные точки пространства X изолированы и пространство направлений $\Sigma_p(X)$ в любой точке p гомеоморфно \mathbf{RP}^2 .

Читатель может заметить, что классификация топологических особенностей в размерности n , грубо говоря, равносильна классификации топологических типов пространств Александрова кривизны ≥ 1 в размерности $n - 1$. Последняя классификация достаточно проста для $n \leq 3$ (см. упражнения выше), но в общем случае получить такую классификацию кажется безнадежным.

В том же препринте Г. Перельмана имеется очень сильная *теорема стабильности*, которую можно рассматривать как далекое обобщение теоремы 10.10.2

Теорема 10.10.5 (Теорема стабильности). *Для любого $k \in \mathbb{R}$ и любого компактного пространства Александрова X^n кривизны $\geq k$ существует такое $\varepsilon > 0$, что каждое компактное пространство Александрова Y^n кривизны $\geq k$, для которого*

$$d_{GH}(X^n, Y^n) < \varepsilon,$$

гомеоморфно X^n (здесь d_{GH} — метрика Громова–Хаусдорфа, а верхний индекс означает размерность).

В частности, из этой теоремы следует, что пространство Александрова, имеющее топологические особенности, не может быть аппроксимировано римановыми многообразиями той же размерности и с той же нижней границей кривизны.

10.10.2. Выпуклость. Пусть X — локально компактное пространство со строго внутренней метрикой. Напомним, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется выпуклой, если сужение ее на каждую геодезическую является выпуклой функцией одной переменной.

Теорема 10.10.6. *Для конечномерного пространства Александрова X неотрицательной кривизны и с непустой границей, функция $d(\cdot, \partial X)$ (расстояние до границы X) выпукла. Более того, она является строго выпуклой, если кривизна пространства X не меньше, чем число $k > 0$.*

Очевидно, что выпуклое подмножество пространства Александрова кривизны $\geq k$ также является пространством Александрова кривизны

$\geq k$. В частности, для таких подмножеств определена граница. Вместе с предыдущей теоремой это позволило распространить доказательство знаменитой *теоремы о душе*, полученной Дж. Чигером и Д. Громоллом ([CG1]), на пространства Александрова.

Теорема 10.10.7. *В неограниченном конечномерном пространстве Александрова X^n неотрицательной кривизны существует компактное выпуклое подмножество $S \subset X^n$ без границы, являющееся деформационным ретрактом пространства X^n .*

Заметим, что выпуклое замкнутое подмножество без границы риманова многообразия является вполне геодезическим подмногообразием.

Замечание 10.10.8. В случае риманова многообразия теорема о душе верна в более сильной форме: риманово многообразие X гомеоморфно (на самом деле, диффеоморфно) пространству нормального расслоения подмногообразия S в X . Следующий пример показывает, что аналогичное усиление для пространств Александрова, вообще говоря, неверно.

Пример 10.10.9. (Г. Перельман) Факторпространство комплексного пространства \mathbb{C}^k по эквивалентности $x \sim \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, является конусом над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Мы обозначим его $K_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$.

Каноническая проекция $(z_1, \dots, z_3) \rightarrow (z_1, z_2)$ пространства \mathbb{C}^3 в \mathbb{C}^2 индуцирует проектирование $\pi : K_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \rightarrow K_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$. Рассмотрим в $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ каноническую метрику; ее секционные кривизны заключены между 1 и 4. Снабдим конус над \mathbb{C}^k соответствующей метрикой конуса. Пусть $\bar{B}_0(1)$ — единичный шар в $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ с центром в вершине. Положим $X^5 = \pi^{-1}(\bar{B}_0(1))$. Множество X^5 выпукло в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Поэтому оно является (полным) некомпактным пространством Александрова неотрицательной кривизны с непустой границей. Можно доказать, что удвоение \bar{X}^5 пространства X^5 является пространством того же типа, но без границы. Так как точка 0 — топологически сингулярная точка пространства X^5 , то пространство \bar{X}^5 имеет две сингулярные точки. Можно показать, что удвоение S множества $\bar{B}_0(1)$ является душой пространства \bar{X}^5 . Так как S гомеоморфно сфере S^3 , то расслоение над S является многообразием, а потому не может быть гомеоморфно \bar{X}^5 .

10.10.3. Мера Хаусдорфа. Напомним, что m -мерная мера Хаусдорфа $\mu_m(X)$ множества регулярных точек m -мерного компактного пространства Александрова X всегда конечна и положительна. И мы уже упоминали после теоремы 10.8.5, что множество нерегулярных точек имеет нулевую меру. В частности, множество топологических особенностей имеет нулевую меру. Более того, $\mu_m(X \setminus X_\varepsilon) = 0$ для любого достаточно

малого $\varepsilon > 0$ (например, при $\varepsilon < \frac{1}{100m}$), где X_ε — множество ε -регулярных точек.

Пусть последовательность метрических компактов $\{X_i\}$ сходится к X , т. е. $X_i \xrightarrow{GH} X$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда можно выбрать такую последовательность чисел ν_i , что X_i является ν_i -приближением для X , причем $\nu_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. По следствию 7.3.28 существуют такие отображения $f_i : X \rightarrow X_i$, что $\text{dis } f_i < 2\nu_i$, а $f_i(X)$ является $2\nu_i$ -сетью в X_i . Говорят, что меры ω_i , определенные на X_i , слабо сходятся к мере ω на X , если для любого замкнутого множества $E \in X$, удовлетворяющего условию $\omega(\partial E) = 0$, имеет место сходимость $\omega_i(U_{2\nu_i}(f_i^{-1}(E))) \rightarrow \omega(E)$ при $i \rightarrow \infty$.

Теорема 10.10.10. *Если m -мерные компактные пространства Александрова X и X_i , $i = 1, 2, \dots$, имеют общую нижнюю границу кривизны и $X_i \xrightarrow{GH} X$ при $i \rightarrow \infty$, то m -мерные меры Хаусдорфа пространств X_i слабо сходятся к m -мерной мере Хаусдорфа пространства X (при любом выборе f_i и ν_i в определении слабой сходимости).*

Эта теорема имеет очевидное следствие.

Следствие 10.10.11. *Пусть m -мерные компактные пространства Александрова X_i кривизны $\geq k$ сходятся к компактному пространству X . Тогда для сходимости $\mu_m(X_i) \rightarrow 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim_H X < m$.*

10.10.4. Коллапс. Ситуация, описанная в предыдущем следствии, называется *коллапс*. Более точно, говорят, что последовательность $\{X_i\}$ m -мерных пространств Александрова кривизны $\geq k$ *коллапсирует* к компактному пространству Y , если $X_i \xrightarrow{GH} Y$ и $\mu_m X_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ (или, что равносильно, $\dim Y < m$).

Очевидно, в этом случае Y является m -мерным пространством Александрова кривизны $\geq k$. Ограничимся ненадолго частным случаем, когда пространства X_i являются гомеоморфными между собой многообразиями, или, равносильно, когда все метрики заданы на одном многообразии.)

Тогда, если предельное пространство Y является римановым многообразием или по крайней мере Y имеет только слабые особенности, то пространства X_i (для всех достаточно больших i) допускают структуру локально-тривиального расслоения над (см. [Yam]).

Если у коллапсирующей последовательности многообразий кривизна равномерно ограничена не только снизу, но и *сверху*, то слои этого расслоения имеют очень специальный вид; а именно, они являются так называемыми ниль-многообразиями (см. [CFG]).

До сих пор неизвестно, можно ли данное пространство Александрова кривизны $\geq k$ приблизить римановыми многообразиями с той же

нижней границей кривизны? Напомним, что в силу теоремы о стабильности 10.10.5 пространство Александрова X с топологическими особенностями не может быть аппроксимировано римановыми многообразиями той же размерности. Однако это не исключает аппроксимацию многообразиями более высоких размерностей, т.е., с коллапсом. Есть пример пространства Александрова неотрицательной кривизны, которое нельзя аппроксимировать (даже с коллапсом) римановыми многообразиями неотрицательной кривизны. Это, однако, априори не исключает аппроксимацию римановыми многообразиями, имеющими несколько меньшую нижнюю грань кривизны. Никаких положительных результатов этого сорта не пока что известно и вопрос выглядит трудным.

10.10.5. Квазигеодезические. Геодезические на гладкой поверхности или римановом многообразии можно охарактеризовать двумя способами: как локально кратчайшие и как наипрямейшие пути. Последнее означает, что геодезические — это кривые нулевой геодезической кривизны. Геодезические в пространстве со строго внутренней метрикой были определены как локально кратчайшие пути. К сожалению, геодезические в пространствах Александрова не имеют некоторых полезных свойств геодезических в римановых многообразиях. Во-первых, могут существовать точки, через которые не проходит ни одна геодезическая (например, вершина острого двумерного конуса). Даже в регулярной точке могут существовать направления, которые не могут быть представлены кратчайшими выходящими из этой точки. И не любая геодезическая может быть продолжена за свою конечную точку, даже если эта точка регулярна. Эти обстоятельства побуждают рассматривать более широкий класс кривых, так называемых *квазигеодезических*. Грубо говоря, квазигеодезические — это локально прямейшие пути.

Чтобы дать формальное определение, напомним обсуждение свойств дистанционных функций, предпринятое в пункте 4.1.2. Пусть в пространстве X со строго внутренней метрикой дана точка p и параметризованная длиной геодезическая γ . Мы рассматривали дистанционные функции $g(t) = d(\gamma(t), p)$ и сравнивали их с подходящими дистанционными функциями g_k в пространстве постоянной кривизны k . Одно из (равносильных) определений пространства кривизны $\geq k$ утверждает, что для достаточно малого отрезка геодезической γ и любой точки p , достаточно близкой к ней, функция $g(t)$ не менее вогнута, чем g_k .

Однако то же самое условие сравнения может выполняться и для кривых γ , которые не являются геодезическими. Кривые, удовлетворяющие этому условию, называются k -квазигеодезическими. *Квазигеодезической* называется k -квазигеодезическая в пространстве Александрова кривизны $\geq k$.

Квазигеодезические обладают многими замечательными свойствами. В частности, всеми теми упоминавшимися выше свойствами, которыми не обладают геодезические.²

Кроме того, класс квазигеодезических замкнут относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу при отсутствии коллапса.

Отметим еще одно полезное свойство. Две точки $a, b \in X$ пространства Александрова X кривизны ≥ 1 называются антиподами, если $|ax| + |xb| \leq \pi$ для всех $x \in X$. Если две квазигеодезические имеют общий конец, а их направления в точке p являются антиподами в пространстве направлений, то их объединение также является квазигеодезической. Это позволяет строить квазигеодезическую “из кусков”.

Геодезическая в экстремальном множестве (в частности геодезическая в границе пространства) является квазигеодезической в объемлющем пространстве Александрова [PP].

Есть несколько важных применений квазигеодезических. Например, доказательство следующей теоремы о склеивании (см. [Pet1] и упомянутый выше препринт).

Теорема 10.10.12. *Предположим, что пространства Александрова X и Y , оба кривизны $\geq k$ одной размерности, имеют изометричные границы. Тогда пространство Z , полученное склеиванием X и Y по изометрии их границ, также является пространством кривизны $\geq k$.*

10.10.6. Анализ на пространствах Александрова. Напомним, что почти каждая точка пространства Александрова X имеет окрестность, билипшицево гомеоморфную евклидовой области. Поэтому можно рассматривать “атласы” билипшицево согласованных карт, покрывающих X с точностью до множества меры нуль. В такой карте можно определить метрический тензор (почти всюду); это следует из того, что липшицевы функции дифференцируемы почти всюду, касательный конус пространства X почти всюду является евклидовым пространством. Коэффициенты такого метрического тензора априори только измеримые функции и они не позволяют описывать только самые начальные метрические свойства пространства X . Можно, однако, пытаться выбрать локальные координаты более удачно, так, чтобы начал работать аппарат дифференциальной геометрии. Например, чтобы было можно определить символы Кристоффеля (как функции или же как меры), использовать римановы формулы первой и второй вариации и так далее. Для того, чтобы достичь этого, надо найти координаты, в которых коэффициенты метрического тензора имели бы максимально возможную “гладкость” (по крайней мере, были

²См. препринт Г. Перельмана и А. Петрунина *Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces*.

бы дифференцируемы почти всюду), или использовать интегральные интерпретации формул дифференциальной геометрии.

Есть несколько положительных результатов в этом направлении. Из уже опубликованных работ мы упомянем [OS] и [Ot]. Еще некоторые работы должны вскоре появиться в печати. (Эта область далека от завершения и развивается довольно быстро.)

10.10.7. Пространства с двусторонне ограниченной кривизной.

Читатель может задать вопрос, что известно о пространствах, у которых кривизна ограничена и сверху, и снизу. Ответ прост, хотя доказательства этих результатов довольно трудное: грубо говоря, такое пространство является римановым многообразием, метрический тензор которого имеет несколько меньшую гладкость, чем это обычно предполагается в римановой геометрии. Более точно, верна следующая теорема.

Теорема 10.10.13 (И. Николаев, см. [BN]). *Пусть (X, d) — (конечномерное) пространство с внутренней метрикой кривизны одновременно $\geq k$ и $\leq K$. Если (X, d) не имеет границы, то X является гладким многообразием, причем на нем существует такой C^3 -гладкий атлас, что в его картах метрику d можно задать с помощью метрического тензора, коэффициенты g_{ij} которого принадлежат классу W_p^2 для любого $p > 1$.*

Если граница X не пуста, то внутренность пространства X является почти римановым многообразием в том же смысле, что и выше (однако граница может быть не гладкой).

Если $k = K$ и X не имеет границы, то (X, d) — обычное пространство постоянной кривизны.

Напомним, что W_p^2 означает пространство функций, вторые производные которых принадлежат L_p . (В частности, в силу теорем вложения, $g_{ij} \in C^{1,\alpha}$ при всех $\alpha < 1$.)

Эта теорема позволяет определить формальные символы Кристоффеля и тензор кривизны через производные коэффициентов g_{ij} . Эти формальные величины определены почти всюду; тем не менее они имеют разумный геометрический смысл. Например, параллельный перенос, определенный геометрически, совпадает (для почти всех путей) с параллельным переносом, определенным с помощью символов Кристоффеля. Формальные секционные кривизны также имеют геометрический смысл.

Кроме того, И. Николаев доказал, что такие пространства могут быть (равномерно) аппроксимированы римановыми многообразиями той же размерности так, что границы кривизны этих многообразий сходятся к k и K , соответственно.

Литература

- [AB] S. Alexander, R. Bishop, *The Hadamard-Cartan theorem in locally convex metric spaces*, Enseign. Math. (2) **36** (1990), no. 3-4, 306-320
- [AB1] S. Alexander, R. Bishop, *Warped products of Hadamard spaces*, Manuscripta Math., **96** (1998), 487-505
- [A] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей* Гостехиздат, 1948
- [Bab] I.K.Babenko, *Fortes souplesse intersystolique de variétés fermées et de polyèdres*, Annales de l'Ecole Norm. Super. (to appear).
- [Bal] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Seminar **25**, Birkhäuser (1995), viii+112.
- [Ban] V. Bangert *Minimal geodesics*, Erg. Theory and Dyn. Syst. **10** (1990), 263–286.
- [BB] Ю. Бураго, С. Буяло, *Метрики ограниченной сверху кривизны на 2-полиэдрах. II*, Алгебра и Анализ. **10** вып. 4 (1998), стр. 62 - 112.
- [BC] Р.Л. Бишоп, Р.Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Изд-во “Мир”, Москва, 1964.
- [BGP] Ю. Бураго, М. Громов, Г. Перельман, *Пространства А. Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами*, Успехи математических наук **47**, вып. 2 (1992), 4–51.
- [BI] D. Burago and S. Ivanov, *On asymptotic volume of tori*, Geom. Func. Anal. **5** (1995), 800–808
- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, and V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics **61**, Birkhäuser, Boston (1985), vi+263.
- [BH] M. R. Bridson and A. Haefliger *Metric spaces of non-positive curvature*, in Ser. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BN] В. Берестовский, И. Николаев, *Многомерные обобщенные римановы пространства*, в книге . Нерегулярная риманова геометрия, сер. “Соврем. проблемы математики. Фундам. направления”, том 70 (Геометрия IV), Москва, 1989, 190–272.

- [BM] M. Bonk, *Quasi-geodesic segments and Gromov hyperbolic spaces*, Geom. Dedicata **62** (1996), no. 3, 281–298.
- [BP] R. Benedetti and C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer, 1992
- [BR] A. Belläche and J.-J. Risler (editors), *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics, vol. 144, Birkhäuser, 1996.
- [Bur] D. Burago, *Periodic metrics*, Advances in Soviet Math. **9** (1992), 205–210.
- [Бу] С. Буяло, *Кратчайшие пути на выпуклых поверхностях в римановом многообразии*, Записки научных семинаров ЛОМИ. Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова (ЛОМИ), **66** (1976) 114–132
- [BZ] Yu. Burago and V. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics **285**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Car] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [CE] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, New York, 1975.
- [CFG] J. Cheeger, K. Fukaya, and M. Gromov *Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **5**, no. 2, (1992) 327–372.
- [CG] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geometry **6** (1971–72), 119–128.
- [CG1] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. of Math. **96** (1972), 413–443.
- [Ch] , C. H. Chen *Warped products of metric spaces of curvature bounded from above*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4727–4740.
- [Cha] I. Chavel, *Riemannian Geometry — a modern introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [E] P. B. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1996.
- [Fe] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Изд-во “Наука”, Москва, 1987.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1990, xiv+284.
- [Gro1] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **18** (1983), 1–147.
- [Gro2] M. Gromov, *Systols and intersystolic Inequalities*, Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l’honneur de Marcel Berger. Collection SMF **1** (1996), 291–362.
- [Gro3] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [Grove] K. Grove, *Metric differential geometry*, Lecture Notes in Math. **1263** (1987), 171–227.
- [GP] K. Grove and P. Petersen (Editors), *Comparison geometry*, Papers from the Special Year in Differential Geometry held in Berkeley, CA. 1993–94. Research Institute Publications, **30** (1997), Cambridge University Press, Cambridge, x+262 pp.
- [HM] S. Hartman and J. Mikusiński, *The theory of Lebesgue measure and integration*, International series of monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 15, 1961.
- [HS] J. Hass and P. Scott, *Bounded 3-manifolds admits negatively curved metric with concave boundary*, J. Differential Geom. **40** (1994), no. 3, 449–459

- [J] J. Jost, *Nonpositive curvature: Geometric and analytic Aspects*, Lectures in Mathematics ETH Birkhäuser, 1997.
- [Ka] H. Karcher, *Riemannian comparison constructions*, in Global Differential Geometry (S. S. Chern ed.), MAA Studies in Mathematics **27** (1989), 170–222.
- [Kl] B. Kleiner, *The local structure of length spaces with curvature bounded above*, Math. Z. **231** (1999), no. 3, 409–456.
- [KS] M. Katz and A. Suciuc, *Systolic freedom of loop space*, (2000), 1-13, препринт.
- [Mas] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 56. Springer, New York, 1987.
- [Mk] А. Д. Милка, *Метрическое строение одного класса пространств, содержащих прямые линии*, Украинск. матем. сборник **vyp. 4** (1967), Харьков, 43-48.
- [Mi] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia, 1965.
- [Mo] F. Morgan, *Geometric measure theory: a beginner's guide*, Academic Press, 1988.
- [OS] Y. Otsu and T. Shioya *The Riemannian structure of Alexandrov spaces* J. Differential Geom. **39** (1994), no. 3, 629–658.
- [Ot] Y. Otsu, *Differential geometric aspects of Alexandrov spaces*, in Comparison Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ **30** Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997), 135–148.
- [Per] G. Perelman, *A.D. Alexandrov spaces with curvatures bounded below, II*, Preprint (1992).
- [Per1] Г. Перельман, *Начала теории Морса для пространств Александрова*, Алгебра и Анализ. **5** (1994), no. 1, 205-214.
- [Pet] A. Petrunin, *Parallel transportation for Alexandrov spaces with curvature bounded below*, Geom. Funct. Analysis **8** (1998), no. 1, 123-148.
- [Pet1] A. Petrunin, *Applications of quasigeodesics and gradient curves*, in Comparison Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ **30**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997), 203-219
- [Pl] C. Plaut, *Metric spaces of curvature $\geq k$* , in “A handbook of geometric topology”, North-Holland, Amsterdam, (2002) 819–898,.
- [PP] G. Perelman and A. Petrunin, *Экстремальные подмножества в пространствах Александрова и обобщенная теорема Либермана*, Алгебра и Анализ, **5** (1994), no. 1, 215-227.
- [PP1] G. Perelman and A. Petrunin, *Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces*, препринт (1994), 1-23.
- [Resh] Ю. Г. Решетняк, *Нерастягивающие отображения в пространстве кривизны, не большей K* , Сибирск. матем. журнал. **9**, no. 4 (1968), 918-927.
- [Sp] M. Spivak, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1965, xii+144 pp.
- [Ru] У. Рудин. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [St] L. Stoyanov, *An estimate from above of the number of periodic orbits for semi-dispersed billiards* Comm. Math. Phys. **24** (1989), no. 2, 217-227.
- [VG] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*, в книге “Динамические системы – 7” (серия “Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, том 16”, Москва, 1987.

-
- [Yam] T. Yamaguchi, *A convergence theorem in the geometry of Alexandrov spaces*, Actes de la Table Ronde de Geometrie Differentielle (Luminy, 1992), 601–642, Semin. Congr., 1, Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [GO] М. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед *Контрпримеры в анализе*, Мир, Москва, 1967.

Предметный указатель

- $(-k)$ -гиперболический конус, 408
- (m, ε) -распертая точка, 437
- (m, ε) -распор, 437
- C -квазигеодзическая, 331
- \mathbb{Z}^2 -периодическая метрика, 345
- δ -гиперболичность, 326
- ε -аппроксимация, 299
- ε -изометрия, 295
- ε -регулярная точка, 456
- ε -середина, 47, 48
- ε -сеть, 15
- λ -выпуклая функция, 382
- λ -гомотетия, 426
- σ -аддитивность, 20
- σ -алгебра, 20
 - борелевская, 21
- k -надстройка, 408
- k -плоскость, 148, 354
- k -сферический конус, 408
- m -распертая точка, 438
- m -распор, 438

- САТ-условия, 123

- Адамара пространство, 373
- Александрова
 - лемма, 133
 - пространство, 117
- Арцела–Асколи теорема, 54

- абелева группа
 - кручение, 342
 - ранг, 342
- абсолютная геометрия, 183
- асимптотический
 - конус
 - выпуклого множества, 278
 - Громова–Хаусдорфа, 315
 - объем, 349

- Безиковича неравенство, 233, 236
- Бибераха неравенство, 25
- Бишопа неравенство, 429
- Бляшке теорема, 290
- Буземана функция, 197
- Бэра теорема, 15

- базис
 - ортонормированный, 7
- барицентр, 384
- билипшицево отображение, 285
- бильярд,
 - полурассеивающий, 394
 - предположение невырожденности, 399
- бильярдная траектория, 394
- борелевская σ -алгебра, 21
- борелевская мера, 21
- борелевское множество, 21
- букет метрический, 128

- Витали теорема, 24
- Вороного области, 205

- вариация кривой, 243
- вектор
 - кривизны, 256
- вектор вращения, 345
- векторное поле, 160
 - коммутирующие поля, 248
 - координатное, 160

- параллельное, 254
- верхний угол, 113
- вершина, 77
 - графа, 81
- внешние свойства, 168
- внутренняя метрика
 - индуцированная, 41
- вполне ограниченное пространство, 16
- вполне однородное пространство, 193
- вполне равномерно ограниченный класс, 301
- вторая основная форма, 253
- выпуклая
 - поверхность, 410
 - функция, 381
- выпуклое множество, 103
- вырожденные координаты, 161

- Гаусса лемма, 172
- Гаусса–Бонне формула, 199, 260
- Громова теорема о компактности, 432
- Громова–Бишопа неравенство, 426
- Громова–Хаусдорфа
 - метрика, 290
 - сходимость, 291

- гауссова кривизна, 169
- геодезическая, 58, 174, 255
 - минимальная, 59
- геодезически полное пространство, 366
- геометрия
 - абсолютная, 183
 - внутренняя, 167
 - сферическая, 173
- гиперболическая плоскость, 173, 178, 184
- гиперболический конус, 408
- гиперболическое
 - расстояние, 188
- гиперболическое по Громову
 - пространство, 332
- главная кривизна, 168, 253
- главное направление, 253
- граница
 - Буземана, 199
 - на бесконечности
 - пространства Адамара, 386
 - пространства Александрова, 457
 - Титца, 199
- граф, 77
 - Кэли, 84
 - метрический, 81
- грубая размерность, 431
- грубый объем, 431
- группа
 - действие, 87
 - действующая изометриями, 319
 - конечно порожденная, 84
 - накрытия, 94
 - преобразований скольжения, 94
- группы
 - квази-изометричные, 322

- движение
 - гиперболическое, 185
- действие
 - вполне разрывное, 95
 - группы, 87
 - кокомпактное, 319
 - коограниченное, 319
 - свободное, 95
- дерево, 85
- диагональный процесс Кантора, 54
- диаметр, 12
 - k -плоскости, 354
- дистанционные координаты, 441
- дифференциал, 160
- дифференцирование ковариантное, 247
- длина, 30
 - вектора, 164
 - индуцированная, 39
 - кривой, 38, 39
 - первая вариация, 257
 - пути, 30
 - формула первой вариации, 256
- допустимая
 - кривая, 207, 208
 - плоскость, 207

- евклидова структура, вспомогательная, 169

- замена параметра, 31

- идеальная граница, 195
- идеальный треугольник, 196
- изгибание, 169
- измеримое множество, 20
- изометрическое вложение, 99
- изометрия, 2, 86
 - локальная, 90
 - на образ, 85
 - пунктированных пространств, 312
- изотропное пространство, 192
- инверсия, 185, 205
- инволюция, 206
- индуцированная внутренняя метрика, 41
- индуцированный функционал длины, 36, 39
- интегральная кривая, 161
- интервал, 30
- инъективности радиус, 176
- искажение
 - отображения, 284
 - соответствия, 293

- Карно–Каратеодори метрика, 207
 Картана–Адамара теорема, 374
 Картана–Александрова–Топоногова теорема, 241, 274
 Клейна бутылка, 205
 Кэли граф, 84
- касательный
 вектор, 159
 конус, 369
 выпуклого множества, 277
 по Громову–Хаусдорфу, 314, 369
- квази-изометричные
 группы, 322
 пространства, 317
- квази-изометрия, 318
 квазигеодезическая, 331, 462
 в гиперболической геометрии, 203
- кинетическая энергия, 394
- ковариантная производная, 248
 ковариантное дифференцирование, 247
 ковариантные производные, 245
 компактное действие, 319
- комасса, 231
- коммутирующие векторные поля, 248
- компактификация Буземана, 198
- компактное
 множество, 15
 пространство, 15
- компактности условия, 16
- конус, 104, 314
 ($-k$)-гиперболический, 408
 k -сферический, 408
 асимптотический, 278, 315
 гиперболический, 408
 касательный, 369
 метрика, 105
 сферический, 109
- конфигурационное пространство, 394
- конформно плоская структура, 37
- конформное отображение, 194
- коограниченное действие, 319
- координатные линии, 160
- координатный вектор, 160
- координаты
 вырожденные, 161
 дистанционные, 441
 нормальные, 176, 177
- коэффициенты
 метрического тензора, 164
- кратчайшая, 54, 55, 59
- кривая
 непараметризованная, 50
 простая, 52
 спрямляемая, 39
- кривизна, 179
 гауссова, 169
- главная, 168, 253
 оператор, 257
 секционная, 258
 сферы, 189
 тензор, 257
- Лебега
 интеграл, 63, 224
 лемма, 17
 число, 18
- Лебега мера, 21
- Леви-Чивита лемма, 249
- Ли скобка, 210
- Лобачевского плоскость, 184
- лагранжиан, 162
- левоинвариантная метрика, 320
 на фундаментальной группе, 321
- лемма
 Александрова, 133
 Буземана–Феллера, 411
 Гаусса, 172, 177
 Лебега, 17
 Леви-Чивита, 249
 Морса, 203, 332
 о накрывающей гомотопии, 93
- линк, 109
- липшицево
 отображение, 10
 расстояние, 285
- логарифмическое отображение, 370
- локальная изометрия, 90
- локально
 компактное топологическое
 пространство, 56
 внутренняя метрика, 367
 выпуклое множество, 103
- локальность внутренней метрики, 68
- луч, 385
- Минковского пространство, 5
- Морса лемма, 203, 332
- максимальная полуметрика, 75
- масштаб, изменение, 4
- мера, 20
 борелевская, 21
 Лебега, 21
 Хаусдорфа, 22
- метрика, 1
 G -инвариантная, 96, 319
 \mathbb{Z}^2 -периодическая, 345
 внутренняя, 33
 дизъюнктного объединения, 72
- Громова–Хаусдорфа, 290
- индуцированная, 44
- Карно–Каратеодори, 207

- локально внутренняя, 367
- максимальная, 74
- неголономная, 207
- орбиты, 320
- произведения, 102
- прямого произведения, 101
- равномерная, 99
- риманова, 164
- слов, 85, 279
- строго внутренняя, 34, 47, 48
- угловая, 35
- фактор, 88
- факторпространства, 71
- метрики
 - липшицево эквивалентные, 11
- метрический букет, 128
- метрическое пространство, 1
 - полное, 12
 - пунктированное, 310
- минимальная геодезическая, 59
- многоугольник правильный, 204
- множество
 - борелевское, 21
 - выпуклое, 103
 - измеримое, 20
 - локально выпуклое, 103
 - нигде не плотное, 14
 - полярное, 231
 - правильно накрытое, 91
- модель Пуанкаре
 - в круге, 186
 - в полуплоскости, 184
- настройка, 109
- накрывающее
 - универсальное, 92
- накрытие, 91
 - база, 91
 - преобразование скольжения, 94
 - регулярное, 93, 94
 - универсальное, 92, 93
 - число листов, 91
- накрытия, 90
 - группа, 94
 - эквивалентные, 92
- направление, 115, 116
- натуральная параметризация, 52
- неголономная метрика, 207
- неголономные связи, 208
- неотрицательной кривизны
 - пространство, 132
- непараметризованная кривая, 50
- неподвижная точка, 13
- неположительной кривизны
 - пространство, 132
- неравенство
 - Безиковича, 233, 236
 - Бибераха, 25
 - Бишопа, 429
 - Громова–Бишопа, 426
 - треугольника для углов, 113, 114
- норма, 5
 - асимптотическая, 343
 - евклидова, 6
- нормальная
 - область, 124, 134, 359
 - окрестность, 359
- нормальный шар, 359
- нормированное пространство, 5
- объем
 - грубый, 431
 - липшицева отображения, 227
 - риманов, 223
 - симплектический, 231
 - финслеров, 223
 - Холмса–Томпсона, 231
- ограниченно компактное пространство, 17
- однородное пространство, 86
- однородность, 172
 - размерности, 425
- оператор кривизны, 257
- описанный шар, 384
- орбита, 88, 320
- орикруг, 197
- орицикл, 197
- ортогональный набор, 452
- основная форма
 - вторая, 253
 - первая, 253
- отображение
 - билипшицево, 11, 285
 - конформное, 194
 - липшицево, 10
 - логарифмическое, 370
 - локально липшицево, 10
 - накрывающее, 91
 - нерастягивающее, 10, 90
 - равномерно непрерывное, 18
 - сохраняющее расстояния, 2
 - экспоненциальное, 370
- Пуанкаре модель, 184, 186
 - в верхней полуплоскости, 184
- параллельное векторное поле, 254
- параллельные
 - лучи, 385
 - прямые, 195, 385
- параллельный перенос, 253, 254
- параметризация, 51
 - длиной дуги, 52
 - натуральная, 52

- с постоянной скоростью, 52
- первая
 - вариация длины, 257
 - основная форма, 253
- плоское пространство, 86
- плоскость гиперболическая, 173, 178
- площадь риманова, 171
- поверхность
 - вполне геодезическая, 104
 - выпуклая, 410
- подконус, 330
 - конечный, 330
- подмногообразие вполне геодезическое, 104
- подъем, 93
 - метрики, 91
- показатель распертости, 438
- полиэдральное пространство, 38, 77
 - грань, 78
 - ребро, 77
- полный функционал длины, 34
- полуметрика, 2
 - максимальная, 75
 - факторпространства, 71
- полунепрерывность углов, 137
- полунепрерывный функционал, 40
- полярное множество, 231
- пополнение, 14
- порядок вершины, 81
- последовательность
 - Коши, 12
- правильно накрытое множество, 91
- предположение невырожденности, 399
- преобразование скольжения, 94
- пространства
 - изометричные, 2, 86
- пространственная форма, 358, 426
- пространство
 - δ -гиперболическое, 326
 - Адамара, 373
 - Александрова, 117
 - кривизны $\geq k$, 403
 - вполне ограниченное, 16
 - вполне однородное, 193
 - Громова–Хаусдорфа, 296
 - геодезически полное, 366
 - изотропное, 180, 192
 - квазигеодезически стабильное, 332
 - компактное, 15
 - конфигурационное, 394
 - кривизны $\geq k$, 148, 405
 - кривизны $\leq k$, 148, 354, 355
 - линейно связное
 - локально, 33
 - локально изометричное, 86
 - локально линейно связное, 92
 - локально односвязное в целом, 92
 - Минковского, 5
 - модельное, 179
 - направлений, 113, 116, 366
 - неотрицательной кривизны, 119, 124, 125, 132
 - неположительной кривизны, 119, 124, 125, 132
 - нормированное, 5
 - ограниченно компактное, 17
 - ограниченной сверху кривизны, 354
 - однородное, 86
 - плоское, 86
 - полиэдральное, 79
 - конечное, 80
 - локально конечное, 80
 - размерностно однородное, 80
 - полулокально односвязное, 92
 - с внутренней метрикой, 32, 33
 - прямая, 385, 420
 - прямые
 - параллельные, 195, 421
 - расходящиеся, 195
 - соответствующие, 421
 - пунктирная линия, 48
 - пунктированное метрическое пространство, 310
 - путь, 30
 - безостановочный, 51
 - простой, 52
 - пятый постулат Евклида, 182
 - Радемахера теорема, 227
 - Рауха теорема сравнения, 270
 - Рашевского–Чоу теорема, 212, 213
 - Решетняка теорема, 363
 - Рикатти уравнение, 266
 - равномерная
 - сходимость на компактах, 310
 - равномерная метрика, 99
 - равномерная непрерывность, 18
 - радиус
 - выпуклости, 359
 - выпуклости множества, 359
 - радиус пространства, 420
 - разбиение, 39
 - развертка, 78
 - разделенная сеть, 317
 - размерность
 - геометрическая, 392
 - грубая, 431
 - полиэдрального пространства, 80
 - размерность хаусдорфова, 26
 - распор, 437
 - распределение, 207
 - расстояние, 1
 - по Липшицу, 285

- по Хаусдорфу, 288
- растяжение, 10, 285
 - в точке, 10
- ребро графа, 81
- регулярная точка, 233, 435, 451
- регулярное
 - значение, 233
 - накрытие, 93, 94
- репер
 - ортонормированный, 7
- риманов объем, 223
 - в координатах, 226
- риманова
 - метрика, 164
 - изометрия, 165
- риманово многообразии, 166
- Сарда–Брауна теорема, 233
- свободное действие, 95
- секционная кривизна, 258
- середина, 47
- сеть, 317
 - ϵ -разделенная, 16
- симплекс, 79
- симплектический объем, 231
- система координат, 160
- систола, 238
- скалярное произведение, 6
- склеивание, 69, 71
- скобка Ли, 248
- скорость кривой, 63
- слабая сходимость, 460
- смещения функция, 382
- соответствие, 292, 293
- сопряженная точка, 267
- сопряженные точки, 272
- спрямляемая кривая, 39
- сравнения
 - треугольник, 123
- стабильная норма, 343, 344
 - строго выпуклая, 348
- степень
 - для ориентированных многообразий, 236
 - по модулю 2, 234
 - для многообразий с краем, 235
- страта, 457
- стратификация, 456
- строго внутренняя метрика, 34, 47, 48
- строго выпуклая функция, 382
- сфера, 8
- сферическая геометрия, 36
- сферический конус, 109
- сходимость
 - кривых
 - равномерная, 54
 - липшицева, 285
 - по Громову–Хаусдорфу, 291, 297
 - пунктированных пространств, 311
 - равномерная, 284
 - метрических пространств, 284
 - слабая, 460
- Титца граница, 199
- Топоногова теорема, 414
- тензор кривизны, 257
- теорема
 - Арцела–Асколи, 54
 - Бляшке, 290
 - Бэра, 15
 - Витали, 24
 - Громова о компактности, 432
 - Картана–Адамара, 374
 - Картана–Александрова–Топоногова, 241, 274
 - о душе, 459
 - о расщеплении, 420
 - Радемахера, 227
 - Рашевского–Чоу, 212, 213
 - Решетняка, 363
 - Сарда–Брауна, 233
 - сравнения Рауха, 270
 - стабильности, 459
 - Топоногова, 414
 - Фробениуса, 249
 - Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена, 59
- теорема о параллелепипеде, 214
- тонкий треугольник, 380
- топология Громова–Хаусдорфа, 296
- тор плоский, 74
- точка
 - ϵ -регулярная, 456
 - регулярная, 435, 451
 - сопряженная, 267
 - фокальная, 267
- треугольник
 - идеальный, 196
 - сравнения, 123, 354
 - тонкий, 380
- угловая метрика, 35
- угол, 111
 - верхний, 113
 - неравенство треугольника, 113
 - сравнения, 405
- универсальное накрытие, 92, 93
- управление, 208
- уравнение
 - геодезической, 255
 - Рикатти, 266
 - Эйлера–Лагранжа, 242
 - Якоби, 261

- условие
 - монотонности углов, 132
 - сравнения дистанционных функций, 119
 - сравнения треугольников, 124
 - сравнения углов, 125
 - четырех точек, 405
- Фробениуса теорема, 249
- факторметрика, 71
- факторпространство, 409
- финслеров функционал длины, 37
- финслерова структура, 229
- фокальная точка, 267
- форма
 - билинейная, 6
 - квадратичная, 6
- формула
 - Гаусса–Бонне, 199
 - замены переменных, 225
 - первой вариации, 141, 143, 255, 256
- функционал
 - длины, 30
 - конформный, 162
 - полный, 34
 - финслеров, 162
 - полунепрерывный, 40
- функционал длины
 - полунепрерывный, 45
- функция
 - F -вогнутая, 139
 - F -выпуклая, 139
 - λ -выпуклая, 382
 - Буземана, 197
 - дистанционная одномерная, 119
 - сравнения, 119
 - строго выпуклая, 382
 - управляющая, 208
- Хаусдорфа мера, 22
- Холмса–Томпсона объем, 231
- Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена теорема, 59
- хаусдорфова размерность, 26
- хаусдорфово расстояние, 288
- центр масс, 384
- число Лебега, 18
- число листов, 91
- шар
 - метрический, 8
- шарнир, 132
- эквивалентные кривые, 159
- эквилибральная вариация, 264
- экспоненциальное отображение, 370
- экстремальное подмножество, 458
- Якоби
 - векторное поле, 262
 - уравнение, 261
- якобиан, 224