МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра вычислительной математики

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
по курсу Вычислительная математика

МОСКВА 2003

Составитель В.В. Демченко
УДК 519.6

Рецензент
чл.-корр. РАН, профессор *А.С. Холодов*

Нелинейные уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная математика / Сост.: В.В. Демченко. – М.: МФТИ, 2003. – 40 с.

Кратко изложены способы преобразования системы нелинейных уравнений к одному алгебраическому уравнению в задаче о распаде разрыва в газовой и конденсированной средах. Предложен метод локализации и уточнения корней алгебраического уравнения для его реализации на ЭВМ при выполнении лабораторного практикума.

Предназначено для студентов 3-го курса ФАКИ Московского физико-технического института.

УДК 519.6

Нелинейные уравнения
и системы уравнений

Учебно-методическое пособие
по курсу Вычислительная математика

Составитель Демченко Владимир Владимирович

Редактор *О.П. Котова.* Корректор *И.А. Волкова*
Подписано в печать 18.06.03. Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,5. Уч.- изд. л. 2,5. Тираж 100 экз. Заказ № ф-39.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем "ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ"
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

ВВЕДЕНИЕ

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Многие современные задачи механики сплошных сред связаны с изучением возникновения и распространения различных разрывных течений. На разрывах должны выполняться три основных закона сохранения: массы, количества движения и энергии. К ним, как правило, добавляют дополнительные соотношения, которые следуют либо из экспериментальных исследований, либо являются обобщением большого числа натурных наблюдений. В ряде случаев оказывается, что решения справа и слева от поверхности разрыва однородны, т.е. значения газодинамических величин не зависят ни от временной переменной, ни от пространственных координат. С течением времени меняются только размеры этих областей, но не значения физических переменных в них. Это свойство оказывается справедливым в течение некоторого временного интервала.

При этих условиях появляется возможность сформулировать математическую задачу, представляющую собой систему нелинейных уравнений, решая которую можно опредлить скорость распространения разрывов, а следовательно, и размеры соответствующих областей.

Рассмотрим несколько таких случаев.

I. РАСПАД РАЗРЫВА С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Одним из важных условий правильного описания поведения разрывного решения является выполнение основных законов сохранения на поверхности разрыва. Получим полезные соотношения для дальнейших преобразований.

Для простоты остановимся на одномерном пространственном варианте и будем рассматривать задачу в неподвижной декартовой системе координат, которую назовем лабораторной.

Пусть справа от разрыва давление в среде P_0, массовая скорость U_0, а слева – давление P_1, массовая скорость U_1. Предположим, что сам разрыв перемещается по пространству в лабораторной системе координат со скоростью D_0. В этом случае законы сохранения массы и импульса на разрыве могут быть записаны в следующем виде:

$$\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0), \tag{1}$$

$$P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2, \tag{2}$$

где ρ_0 и ρ_1 – это значения плотности справа и слева от поверхности разрыва.

Выражая $U_1 - D_0$ из уравнения (1), подставляя во второе уравнение и разрешая относительно $(U_0 - D_0)^2$, получаем

$$(U_0 - D_0)^2 = \frac{\rho_1(P_1 - P_0)}{\rho_0(\rho_1 - \rho_0)}. \tag{3}$$

Совершенно аналогично находим, что

$$(U_1 - D_0)^2 = \frac{\rho_0(P_1 - P_0)}{\rho_1(\rho_1 - \rho_0)}. \tag{4}$$

Вычтем из (4) почленно (3) и преобразуем получившееся выражение:

$$\left(U_1^2 - 2U_1D_0 - U_0^2 + 2U_0D_0\right) =$$

$$= (U_1 - U_0)\cdot(U_1 - D_0 + U_0 - D_0) = -\frac{(\rho_1 + \rho_0)(P_1 - P_0)}{\rho_0\rho_1}. \tag{5}$$

Выразим $U_1 - D_0$ через $U_0 - D_0$ из (1) и подставим в (5):

$$(U_1 - U_0)(U_0 - D_0)\frac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1} = -\frac{(\rho_1 + \rho_0)(P_1 - P_0)}{\rho_1 \rho_0}.$$

Сокращая на $\dfrac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1}$, имеем

$$(U_1 - U_0)(U_0 - D_0) = -\frac{P_1 - P_0}{\rho_0}. \tag{6}$$

Извлечем квадратный корень из левой и правой части (3), исключим $U_0 - D_0$ из (6) и разрешим относительно $U_1 - U_0$:

$$U_1 - U_0 = \mp\sqrt{\frac{(P_1 - P_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 \rho_0}}. \tag{7}$$

При выводе соотношения (7) были использованы законы сохранения массы и импульса. Добавим к ним закон сохранения энергии:

$$\begin{gathered}(U_1 - D_0)\cdot\left\{\rho_1\left[\varepsilon_1 + \frac{(U_1 - D_0)^2}{2}\right] + P_1\right\} = \\ = (U_0 - D_0)\left\{\rho_0\left[\varepsilon_0 + \frac{(U_0 - D_0)^2}{2}\right] + P_0\right\},\end{gathered} \tag{8}$$

предварительно преобразовав его, где через ε_0, ε_1 обозначены удельные внутренние энергии справа и слева от точки разрыва. Так как по предположению газ идеальный, то удельная внутренняя энергия, плотность, давление и показатель адиабаты связаны соотношением

$$P_i = (\gamma_0 - 1)\rho_i \varepsilon_i; \quad i = 0,1. \tag{9}$$

Вынесем из фигурных скобок в уравнении (8) справа – ρ_0, а слева – ρ_1. Затем почленно поделим на (1):

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(U_1 - D_0)^2}{2} = \varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{(U_0 - D_0)^2}{2}. \tag{10}$$

Найдем ε_0 и ε_1 из (9) и подставим в (10):

$$\frac{\gamma_0 P_1}{(\gamma_0 - 1)\rho_1} + \frac{(U_1 - D_0)^2}{2} = \frac{\gamma_0 P_0}{(\gamma_0 - 1)\rho_0} + \frac{(U_0 - D_0)^2}{2}. \tag{11}$$

Выразим отношение плотностей по разные стороны от разрыва через отношение давлений. Для этого подставим (3) и (4) в (11):

$$\frac{\gamma_0 P_1}{(\gamma_0 - 1)\rho_1} + \frac{\rho_0 (P_1 - P_0)}{2\rho_1(\rho_1 - \rho_0)} = \frac{\gamma_0 P_0}{(\gamma_0 - 1)\rho_0} + \frac{\rho_1 (P_1 - P_0)}{2\rho_0(\rho_1 - \rho_0)}.$$

После умножения правой и левой части этого равенства на разность и произведение плотностей, приведения подобных членов, приходим к

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{(\gamma_0 + 1)P_0 + (\gamma_0 - 1)P_1}{(\gamma_0 - 1)P_0 + (\gamma_0 + 1)P_1} = \frac{(\gamma_0 + 1) + (\gamma_0 - 1)\dfrac{P_1}{P_0}}{(\gamma_0 - 1) + (\gamma_0 + 1)\dfrac{P_1}{P_0}}. \tag{12}$$

Найдем теперь отношение $(P_1 - P_0)/(U_1 - U_0)$, поделив $P_1 - P_0$ на (7):

$$\frac{P_1 - P_0}{U_1 - U_0} = \mp\sqrt{\frac{(P_1 - P_0)\rho_0\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}} = \mp\sqrt{\frac{\rho_0 P_0\left(\dfrac{P_1}{P_0} - 1\right)}{\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_1}\right)}} =$$

$$= \mp \rho_0 \sqrt{\frac{P_0\left(\frac{P_1}{P_0}-1\right)}{\rho_0\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)}}. \tag{13}$$

Скорость звука в газе связана с плотностью и давлением выражением $C_0 = \sqrt{\gamma_0 \frac{P_0}{\rho_0}}$. Подставим C_0 и отношение плотностей из (12) в правую часть (13). В результате имеем

$$\frac{P_1 - P_0}{U_1 - U_0} = \mp \rho_0 C_0 \sqrt{\frac{(\gamma_0 - 1) + (\gamma_0 + 1)\frac{P_1}{P_0}}{2\gamma_0}} \tag{14}$$

Допустим, что справа от разрыва значения плотности ρ_0, скорости U_0, давления P_0, а также показатель адиабаты γ_0 нам известны, а нужно определить значения слева от разрыва, имеющие индекс 1 и скорость движения фронта разрыва D_0. Соотношения (1) – (14) позволяют это сделать, если дополнительно известно одно из искомых неизвестных $\rho_1, U_1, P_1, \varepsilon_1, D_0$ или какая-то комбинация из них.

Известны четыре основных варианта распада разрыва [1]:

во-первых, с образованием двух ударных волн;

во-вторых, с ударной волной и волной разряжения;

в-третьих, с двумя волнами разряжения;

в-четвертых, с двумя центрированными волнами разряжения.

Остановимся более подробно на первых двух.

I.1. Распад разрыва с возникновением двух ударных волн

Пусть в начальный момент все пространство можно разделить на два однородных полупространства, граница между которыми проходит по плоскости разрыва. Для определенности будем считать, что газодинамические величины справа от этой плоскости имеют индекс 0, а слева – индекс 3 (см. рис. 1).

$$\gamma_3; P_3; U_3; \rho_3; \varepsilon_3 \;\Big|\; \varepsilon_0; \rho_0; U_0; P_0; \gamma_0$$

Рис. 1

Со временем в результате распада разрыва по правому и левому полупространствам начинают распространяться две ударные волны. Припишем индекс 1 газодинамическим параметрам за правой ударной волной и индекс 2 – за левой (см. рис. 2).

D_3		Контактный разрыв		D_0
$\gamma_3; U_3; U_3;$ $\rho_3; \varepsilon_3$	|	$\gamma_3; P_2; U_2;$ $\rho_2; \varepsilon_2$	¦	$\gamma_0; P_1; U_1;$ $\rho_1; \varepsilon_1$	|	$\gamma_0; P_0; U_0;$ $\rho_0; \varepsilon_0$

Рис. 2

Запишем три основных закона сохранения массы, количества движения и энергии на левой и правой ударных волнах и условия непрерывности давления и массовой скорости на контактном разрыве:

$$\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0),$$

$$P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2,$$

$$(U_1-D_0)\left\{\rho_1\left[\varepsilon_1+\frac{(U_1-D_0)^2}{2}\right]+P_1\right\}=$$

$$=(U_0-D_0)\left\{\rho_0\left[\varepsilon_0+\frac{(U_0-D_0)^2}{2}\right]+P_0\right\},$$

$$\rho_3(U_3-D_3)=\rho_2(U_2-D_3)\,, \qquad (15)$$

$$P_3+\rho_3(U_3-D_3)^2=P_2+\rho_2(U_2-D_3)^2,$$

$$(U_3-D_3)\left\{\rho_3\left[\varepsilon_3+\frac{(U_3-D_3)^2}{2}\right]+P_3\right\}=$$

$$=(U_2-D_3)\left\{\rho_2\left[\varepsilon_2+\frac{(U_2-D_3)^2}{2}\right]+P_2\right\}.$$

$$P_2=P_1,\, U_2=U_1.$$

Используя формулу (14), из первых трех уравнений системы (15) получаем, что

$$\frac{P_1-P_0}{U_1-U_0}=\mp\rho_0 C_0\sqrt{\frac{(\gamma_0-1)+(\gamma_0+1)\frac{P_1}{P_0}}{2\gamma_0}}\,,$$

а из четвертого, пятого и шестого уравнений —

$$\frac{P_2-P_3}{U_2-U_3}=\mp\rho_3 C_3\sqrt{\frac{(\gamma_3-1)+(\gamma_3+1)\frac{P_2}{P_3}}{2\gamma_3}}\,, \qquad (16)$$

где $C_3=\sqrt{\gamma_3\frac{P_3}{\rho_3}}$ — скорость звука в области «3».

Заменяя в (16) P_2 на P_1 и U_2 на U_1, приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными P_1 и U_1:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_1-P_0}{U_1-U_0}&=\mp\rho_0 C_0\sqrt{\frac{(\gamma_0-1)+(\gamma_0+1)\frac{P_1}{P_0}}{2\gamma_0}},\\ \frac{P_1-P_3}{U_1-U_3}&=\mp\rho_3 C_3\sqrt{\frac{(\gamma_3-1)+(\gamma_3+1)\frac{P_1}{P_3}}{2\gamma_3}}.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Введем обозначения $Y=\frac{P_1}{P_0}$; $X=\frac{P_3}{P_0}$; $\alpha_0=\frac{(\gamma_0+1)}{(\gamma_0-1)}$; $\alpha_3=\frac{(\gamma_3+1)}{(\gamma_3-1)}$. Умножим первое уравнение (17) на U_1-U_0 и поделим на правую часть, а затем аналогично второе уравнение (17) умножим на U_1-U_3 и разделим на правую часть:

$$\left.\begin{aligned}U_1-U_0&=\mp\frac{C_0\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma_0(\gamma_0-1)}}\frac{(Y-1)}{\sqrt{1+\alpha_0 Y}},\\ U_1-U_3&=\mp\frac{C_3\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma_3(\gamma_3-1)}}\frac{(Y-X)}{\sqrt{X(X+\alpha_3 Y)}}.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Возведем в квадрат первое и второе уравнения (18) и вычтем из второго первое:

$$-(U_3-U_0)(U_1-U_3+U_1-U_0)=$$

$$=\frac{2C_3^2}{\gamma_3(\gamma_3-1)}\frac{(Y-X)^2}{X(X+\alpha_3 Y)}-\frac{2C_0^2(Y-1)^2}{\gamma_0(\gamma_0-1)(1+\alpha_0 Y)}. \qquad (19)$$

Подставляя в (19) вместо $U_1 - U_3$ и $U_1 - U_0$ их выражения из (18) и сокращая на общий множитель, получим

$$\sqrt{\frac{2C_3^2}{\gamma_3(\gamma_3-1)(U_3-U_0)^2}}\,\frac{(Y-X)}{\sqrt{X(X+\alpha_3 Y)}} \pm \\ \pm\sqrt{\frac{2C_0^2}{\gamma_0(\gamma_0-1)(U_3-U_0)^2}}\,\frac{(Y-1)}{\sqrt{1+\alpha_0 Y}} = \pm 1. \tag{20}$$

Обозначим

$$e_3 = \frac{2C_3^2}{\gamma_3(\gamma_3-1)(U_3-U_0)^2};$$

$$e_0 = \frac{2C_0^2}{\gamma_0(\gamma_0-1)(U_3-U_0)^2}$$

и сделаем соответствующую замену в (20):

$$\frac{\sqrt{e_3}(Y-X)}{\sqrt{X(X+\alpha_3 Y)}} \pm \frac{\sqrt{e_0}(Y-1)}{\sqrt{(1+\alpha_0 Y)}} = \pm 1. \tag{21}$$

Из (21) нужно определить неизвестное Y. Возведем в квадрат левую и правую части (21):

$$1 - \frac{e_3(Y-X)^2}{X(X+\alpha_3 Y)} - \frac{e_0(Y-1)^2}{(1+\alpha_0 Y)} = \pm\frac{2\sqrt{e_0 e_3}(Y-X)(Y-1)}{\sqrt{X(X+\alpha_3 Y)(1+\alpha_0 Y)}} \tag{22}$$

Затем еще раз возведем в квадрат, но уже равенство (22)

$$\begin{aligned} &e_3^2(Y-X)^4(1+\alpha_0 Y)^2 + X^2(X+\alpha_3 Y)^2(1+\alpha_0 Y)^2 - \\ &-2e_0 e_3 X(X+\alpha_3 Y)(1+\alpha_0 Y)(Y-X)^2(Y-1)^2 + \\ &+e_0^2 X^2(X+\alpha_3 Y)^2(Y-1)^4 - \\ &-2e_3 X(X+\alpha_3 Y)(1+\alpha_0 Y)^2(Y-X)^2 - \\ &-2e_0 X^2(X+\alpha_3 Y)^2(1+\alpha_0 Y)(Y-1)^2 = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Если в (23) привести подобные члены и сгруппировать их при одинаковых степенях Y, то получим алгебраическое уравнение шестой степени:

$$a_0 Y^6 + a_1 Y^5 + a_2 Y^4 + a_3 Y^3 + a_4 Y^2 + a_5 Y + a_6 = 0, \tag{24}$$

где коэффициенты $a_i(i = 0 \div 6)$ выражаются через ранее введенные константы:

$$a_0 = (\alpha_0 e_3 - \alpha_3 X e_0)^2;$$

$$\begin{aligned} a_1 = 2\{ &(\alpha_0 e_3 - \alpha_3 X e_0)[e_3(1-2\alpha_0 X) - e_0 X(X-2\alpha_3)] - \\ &-\alpha_0\alpha_3 X(\alpha_0 e_3 + \alpha_3 X e_0) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = {} &e_3^2(6\alpha_0^2 X^2 - 8\alpha_0 X + 1) - \\ &-2e_0 e_3 X[\alpha_0\alpha_3(X^2 + 4X + 1) - 2(X+1)(\alpha_3 + \alpha_0 X) + X] + \\ &+e_0^2 X^2(6\alpha_3^2 - 8\alpha_3 X + X^2) + \alpha_0^2\alpha_3^2 X^2 - \\ &-2\alpha_0 X e_3(\alpha_0 X - 2\alpha_0\alpha_3 X + 2\alpha_3) - \\ &-2\alpha_3 X^2 e_0(\alpha_3 + 2\alpha_0 X - 2\alpha_0\alpha_3), \end{aligned}$$

$$a_3=-2X\Big\{2e_3^2\left(\alpha_0^2X^2-3\alpha_0X+1\right)+e_0e_3\big[\left(\alpha_3+\alpha_0X\right)\left(X^2+4X+1\right)-$$
$$-2\alpha_0\alpha_3X(X+1)-2X(X+1)\big]+2e_0^2X\left(X^2-3\alpha_3X+\alpha_3^2\right)-$$
$$-\alpha_0\alpha_3X\left(\alpha_0X+\alpha_3\right)+$$
$$+e_3\left[\alpha_0^2\alpha_3X^2-2X\left(2\alpha_0\alpha_3+\alpha_0^2X\right)+\left(2\alpha_0X+\alpha_3\right)\right]+$$
$$+e_0X\left[\alpha_0\alpha_3^2-2\alpha_3\left(\alpha_3+2\alpha_0X\right)+2\alpha_3X+\alpha_0X^2\right]\Big\},$$

$$a_4=X^2\Big\{e_3^2\left(\alpha_0^2X^2-8\alpha_0X+6\right)-$$
$$-2e_0e_3\left[\alpha_0\alpha_3X-2(X+1)\left(\alpha_3+\alpha_0X\right)+X^2+4X+1\right]+$$
$$+e_0^2\left(\alpha_3^2-8\alpha_3X+6X^2\right)+\left(\alpha_3^2+4\alpha_0\alpha_3X+\alpha_0^2X^2\right)-$$
$$-2e_3\left[\left(\alpha_0^2X+2\alpha_0\alpha_3\right)X-2\left(2\alpha_0X+\alpha_3\right)+1\right]-$$
$$-2e_0\left[\alpha_3\left(2\alpha_0X+\alpha_3\right)-2X\left(2\alpha_3+\alpha_0X\right)+X^2\right]\Big\},$$

$$a_5=2X^3\Big[e_3^2\left(\alpha_0X-2\right)-e_0e_3\left(\alpha_0X-2+\alpha_3-2X\right)+$$
$$+e_0^2\left(\alpha_3-2X\right)+\left(\alpha_3+\alpha_0X\right)-$$
$$-e_3\left(2\alpha_0X+\alpha_3-2\right)-e_0\left(2\alpha_3+\alpha_0X-2X\right)\Big],$$

$$a_6=X^4\left[\left(e_3-e_0\right)^2+1-2\left(e_3+e_0\right)\right].$$

Общие подходы к нахождению корней алгебраических уравнений будут рассмотрены ниже, а сейчас рассмотрим вариант распада разрыва с образованием ударной волны и волны разряжения.

I.2. Распад разрыва с образованием ударной волны и волны разряжения

Снова, как и в пункте I.1, будем предполагать, что в начальный момент все пространство можно разделить на два однородных полупространства, газодинамическим величинам, в которых припишем индекс 0 для правого и индекс 3 для левого полупространств. Граница раздела между ними – плоскость (см. рис. 1 и рис. 2)

В результате распада разрыва по правому полупространству начинает распространяться ударная волна, а по левому – волна разряжения. На ударной волне должны выполняться три основных закона сохранения массы, количества движения и энергии:

$$\rho_1\left(U\ -D_0\right)=\rho_0\left(U_0-D_0\right),$$

$$P_1+\rho_1\left(U_1-D_0\right)^2=P_0+\rho_0\left(U_0-D_0\right)^2,$$

$$\left(U_1-D_0\right)\left\{\rho_1\left[\varepsilon_1+\frac{\left(U_1-D_0\right)^2}{2}\right]+P_1\right\}=$$
$$=\left(U_0-D_0\right)\left\{\rho_0\left[\varepsilon_0+\frac{\left(U_0-D_0\right)^2}{2}\right]+\rho_0\right\}.$$

В волне разряжения на характеристике семейства $U+C$ сохраняются значения инварианта (25) и справедливы соотношения для адиабатического процесса (26):

$$U_3+\frac{2C_3}{\gamma_3-1}=U_2+\frac{2C_2}{\gamma_3-1}, \qquad (25)$$

$$C_2=C_3\left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3-1}{2\gamma_3}}, \qquad (26)$$

а на контактной границе остаются непрерывными давление и нормальные составляющие скорости:

$$P_1=P_2, \qquad (27)$$
$$U_1=U_2. \qquad (28)$$

В конечном итоге нужно найти корни системы из семи уравнений с семью неизвестными $\rho_1, U_1, P_1, D_0, C_2, U_2, P_2$. Первые три уравнения удобно записать в форме (14):

$$\frac{P_1 - P_0}{U_1 - U_0} = \pm\rho_0 C_0 \sqrt{\frac{(\gamma_0 - 1) + (\gamma_0 + 1)\dfrac{P_1}{P_0}}{2\gamma_0}}$$

а затем, используя соотношения (25) и (26), получить для волны разрежения:

$$\frac{P_2 - P_3}{U_2 - U_3} = \frac{(\gamma_3 - 1)\rho_3 C_3\left(\dfrac{P_2}{P_3} - 1\right)}{2\gamma_3\left[1 - \left(\dfrac{P_2}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}}\right]}.$$

Тогда с учетом равенств (27) и (28) система из семи уравнений может быть сведена к системе из двух уравнений с двумя неизвестными P_1 и U_1:

$$U_1 - U_3 = \frac{2C_3}{\gamma_3 - 1}\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}}\right],$$

$$U_1 - U_0 = \pm\frac{C_0\left(\dfrac{P_1}{P_3}\dfrac{P_3}{P_0} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{\gamma_0(\gamma_0 - 1)}{2}\left[1 + \dfrac{(\gamma_0 + 1)}{(\gamma_0 - 1)}\dfrac{P_1}{P_3}\dfrac{P_3}{P_0}\right]}}. \qquad (29)$$

Система уравнений (29) допускает дальнейшее упрощение, если исключить из нее U_1:

$$U_3 - U_0 = \frac{2C_3}{\gamma_3 - 1}\left[\left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}} - 1\right] \pm$$

$$U_3 - U_0 = \frac{2C_3}{\gamma_3 - 1}\left[\left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}} - 1\right] \pm$$

$$\pm\frac{C_0\left(\dfrac{P_1}{P_3}\dfrac{P_3}{P_0} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{\gamma_0(\gamma_0 - 1)}{2}\left[1 + \dfrac{(\gamma_0 + 1)}{(\gamma_0 - 1)}\dfrac{P_1}{P_3}\dfrac{P_3}{P_0}\right]}} \qquad (30)$$

Перенесем из правой части (30) первое слагаемое влево, возведем в квадрат и умножим на знаменатель:

$$2\varepsilon_0\left(\frac{P_1}{P_3}\frac{P_3}{P_0} - 1\right)^2 =$$

$$= \left\{U_3 - U_0 - \frac{2C_3}{\gamma_3 - 1}\left[\left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}} - 1\right]\right\}^2\left[1 + \frac{(\gamma_0 + 1)}{(\gamma_0 - 1)}\frac{P_1}{P_3}\frac{P_3}{P_0}\right], \qquad (31)$$

где $\varepsilon_0 = P_0/[\rho_0(\gamma_0 - 1)]$ – начальная удельная внутренняя энергия в правом полупространстве.

Если ввести обозначения $\alpha_0 = (\gamma_0+1)/(\gamma_0-1)$,

$n = 2\gamma_3/(\gamma_3-1)$; $\mu = (U_1 - U_0)\sqrt{\dfrac{(\gamma_0-1)\rho_0}{2P_0}}$,

$\nu = \dfrac{2}{\gamma_3-1}\sqrt{\dfrac{\gamma_3(\gamma_0-1)}{2}\dfrac{P_3}{P_0}\dfrac{\rho_0}{\rho_3}}$; $X = \dfrac{P_3}{P_0}$; $Z = (P_1/P_3)^{\frac{1}{n}}$,

тогда уравнение (31) можно записать в виде

$$X^2 Z^{2n} - 2XZ^n + 1 = \left[\mu^2 - 2\mu\nu(Z-1) + \nu^2(Z-1)^2\right](1+\alpha XZ^n)$$

или, раскрывая скобки и приводя подобные члены,

$$\begin{aligned} &X^2Z^{2n} - \alpha_0\nu^2 XZ^{n+2} + 2\alpha_0\nu(\mu+\nu)XZ^{n+1} - \\ &-\left[2+(\mu+\nu)^2\alpha_0\right]XZ^n - \nu^2Z^2 + 2\nu(\mu+\nu)Z - \\ &-(\mu+\nu)^2 + 1 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

В результате исследования двух вариантов распада газодинамического разрыва удалось системы нелинейных уравнений восьмого и седьмого порядка свести к одному алгебраическому уравнению с действительными коэффициентами. К вопросам нахождения корней алгебраических уравнений вернемся после изучения случаев распада разрывов с уравнением состояния, отличным от уравнения состояния идеального газа.

II. РАСПАД РАЗРЫВА С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ ТИПА ГРЮНАЙЗЕНА (ЗАБАБАХИНА)

При высокоскоростном ударе конденсированных веществ система уравнений (15) должна измениться, так как функциональная зависимость между давлением, плотностью и удельной внутренней энергией оказывается другой, отличающейся от

уравнения состояния идеального газа. Е.И. Забабахиным было предложено уравнение, устанавливающее связь между давлением и плотностью, как за фронтом ударной волны в конденсированном веществе, так и при изэнтропическом сжатии или расширении:

$$P = \frac{\rho_0 C_0^2}{\gamma_0}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_0} \frac{h_0\dfrac{\rho_1}{\rho_0} - 1}{\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\gamma_0}\left(h_0 - \dfrac{\rho_1}{\rho_0}\right)} - 1\right], \tag{33}$$

где γ_0 – показатель адиабаты конденсированного вещества, ρ_0 – плотность, C_0 – постоянная вещества (условно скорость звука), $h_0 = (\gamma_0+1)/(\gamma_0-1)$, ρ_1 – плотность за фронтом ударной волны, ρ, P – плотность, давление в волне сжатия или разрежения, если она формируется в области за ударным фронтом. Если область за фронтом ударной волны однородна, тогда выражение (33) упрощается и превращается в адиабату ударного сжатия (Гюгонио) для конденсированного вещества:

$$P = \rho_0 C_0^2 \frac{(h_0-1)\left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right)}{h_0 - \dfrac{\rho}{\rho_0}}. \tag{34}$$

II.1. Распад разрыва в конденсированном веществе с образованием двух ударных волн

Допустим, что в начальный момент происходит соударение двух однородных полупространств, состоящих из конденсированных веществ, одно из которых занимает область положительных значений координаты x и ему соответствует индекс «0», и второго – занимающего отрицательную область x и имеющего индекс «3»(см. рис. 3)

$$\gamma_3;\ P_3;\ U_3;\ \rho_3 \ \Big|\ \rho_0;\ U_0;\ P_0;\ \gamma_0$$

Рис. 3

После соударения при достаточно большой относительной скорости по правому полупространству начинает распространяться ударная волна D_0 с давлением P_1, плотностью ρ_1 и массовой скоростью U_1 за ее фронтом. Аналогично по левому полупространству перемещается ударная волна со скоростью D_3, имеющая давление P_2, плотность ρ_2 и массовую скорость U_2 за фронтом (см. рис. 4).

$$\gamma_3;\ P_3;\ U_3;\ \rho_3 \ \overset{D_3}{\Big|}\ \rho_2;U_2;\ P_2;\ \gamma_3 \ \Big\vert\ \gamma_0;\ P_1;U_1;\ \rho_1 \ \overset{D_0}{\Big|}\ \rho_0;U_0;P_0;\gamma_0$$

контактный
разрыв
Рис. 4

Разделяет эти два полупространства контактный разрыв. Будем считать, что на каждой из ударных волн выполняются законы сохранения массы, количества движения, справедливы адиабаты ударного сжатия (Гюгонио), а на контактном разрыве – непрерывны давления и массовые скорости. Сисема из восьми уравнений с восьмью неизвестными D_3, ρ_2, $U_2, P_2, P_1, U_1, \rho_1, D_0$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0),\\
&P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_1 = \frac{\alpha_0(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 h_0 - \rho_1},\\
&\rho_3(U_3 - D_3) = \rho_2(U_2 - D_3),\\
&P_3 + \rho_3(U_3 - D_3)^2 = P_2 + \rho_2(U_2 - D_3)^2,\\
&P_2 = \frac{\alpha_3(\rho_2 - \rho_3)}{\rho_3 h_3 - \rho_2},\\
&P_2 = P_1,\ U_2 = U_1,
\end{aligned} \tag{35}$$

где $\alpha_0 = \rho_0 C_0^2(h_0 - 1), \alpha_3 = \rho_3 C_3^2(h_3 - 1)$,
$h_0 = (\gamma_0 + 1)/(\gamma_0 - 1),\ h_3 = (\gamma_3 + 1)/(\gamma_3 - 1)$.

Первые два уравнения системы (35) согласно формуле (7) можно переписать в виде

$$U_1 - U_0 = \mp\sqrt{\frac{(P_1 - P_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1\rho_0}}, \tag{36}$$

а четвертое и пятое – в виде

$$U_2 - U_3 = \mp\sqrt{\frac{(P_2 - P_3)(\rho_2 - \rho_3)}{\rho_2\rho_3}}. \tag{37}$$

Вычитая почленно уравнение (36) из (37), учитывая соотношения семь и восемь из системы уравнений (35), получаем

$$U_0 - U_3 = \mp\sqrt{\frac{(P_1 - P_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1\rho_0}} \mp \sqrt{\frac{(P_1 - P_3)(\rho_2 - \rho_3)}{\rho_2\rho_3}}. \tag{38}$$

Третье и шестое уравнения из системы (35) разрешим относительно ρ_1 и ρ_2 и заменим в последнем P_2 на P_1:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{P_1 h_0 + \alpha_0}{P_1 + \alpha_0}, \tag{39}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{P_1 h_3 + \alpha_3}{P_1 + \alpha_3}. \tag{40}$$

Преобразуем подкоренные выражения в (38), поделив числитель и знаменатель первого слагаемого на ρ_0, а второго – на ρ_3:

$$U_0 - U_3 = \mp\sqrt{\frac{(P_1 - P_0)\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)}{\rho_0 \cdot \dfrac{\rho_1}{\rho_0}}} \mp \sqrt{\frac{(P_1 - P_3)\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_3} - 1\right)}{\rho_3 \cdot \dfrac{\rho_2}{\rho_3}}}. \tag{41}$$

Подставим (39) и (40) в (41) и введем обозначение

$$V = U_0 - U_3 = \pm\sqrt{\frac{(h_0 - 1)P_1(P_1 - P_0)}{\rho_0(P_1 h_0 + \alpha_0)}} \mp \mp\sqrt{\frac{(h_3 - 1)P_1(P_1 - P_3)}{\rho_3(P_1 h_3 + \alpha_3)}}. \tag{42}$$

Возведем левую и правую части (42) в квадрат, затем перенесем в левую часть слагаемые, не содержащие радикалов:

$$V^2 - \frac{(h_0 - 1)P_1(P_1 - P_0)}{\rho_0(P_1 h_0 + \alpha_0)} - \frac{(h_3 - 1)P_1(P_1 - P_3)}{\rho_3(P_1 h_3 + \alpha_3)} = \pm 2P_1\sqrt{\frac{(h_0 - 1)(h_3 - 1)(P_1 - P_0)(P_1 - P_3)}{\rho_0\rho_3(P_1 h_0 + \alpha_0)(P_1 h_3 + \alpha_3)}}. \tag{43}$$

Введем обозначения $Y = \dfrac{P_1}{\rho_0\rho_3 V^2}$, $X = \dfrac{P_3}{\rho_0\rho_3 V^2}$,

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\rho_0\rho_3 V^2},\ \beta_3 = \frac{\alpha_3}{\rho_0\rho_3 V^2},$$

$$\delta_0 = (h_0 - 1)\rho_3,\ \delta_3 = (h_3 - 1)\rho_0,\ e = \frac{P_0}{\rho_0\rho_3 V^2}$$

уравнение можно записать в виде и возведем в квадрат левые и правые части (43). Получившееся

$$\sum_{i=0}^{6} a_i Y^{6-i} = 0, \tag{44}$$

где $a_0 = (\delta_0 h_3 - \delta_3 h_0)^2$,

$$\begin{aligned}
a_1 = 2[\ & h_3\delta_0^2(\beta_3 - h_3 e) + h_0\delta_3^2(\beta_0 - Xh_0) - h_0h_3(\delta_0 h_3 + \delta_3 h_0) - \\
& - \delta_0\delta_3(h_0\beta_3 + h_3\beta_0) + \delta_0\delta_3 h_0 h_3(X + e)\ ],
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = {} & h_0^2h_3^2 + \delta_0^2(h_3^2e^2 + \beta_3^2 - 4\beta_3h_3e) + \delta_3^2(\beta_0^2 + h_0^2X^2 - 4\beta_0Xh_0) - \\
& - 2\delta_0h_3(2\beta_3h_0 + h_3\beta_0 - eh_0h_3) - 2\delta_3h_0(2\beta_0h_3 + h_0\beta_3 - h_0h_3X) - \\
& - 2\delta_0\delta_3(Xeh_0h_3 + \beta_0\beta_3) + 2\delta_0\delta_3(X + e)(\beta_3h_0 + h_3\beta_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = 2[\ & h_0h_3(\beta_0h_3 + \beta_3h_0) + \delta_0^2e\beta_3(h_3e - \beta_3) + \delta_3^2\beta_0X(Xh_0 - \beta_0) - \\
& - \delta_0(h_0\beta_3^2 - e\beta_0h_3^2) - 2\delta_0h_3\beta_3(\beta_0 - eh_0) - \delta_3(h_3\beta_0^2 - X\beta_3h_0^2) - \\
& - 2\delta_3\beta_0h_0(\beta_3 - Xh_3) - e\delta_0\delta_3X(h_0\beta_3 + h_3\beta_0) + \delta_0\delta_3\beta_0\beta_3(X + e)\ ],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = {} & \beta_0^2h_3^2 + \beta_3^2h_0^2 + 4\beta_0\beta_3h_0h_3 + \delta_0^2\beta_3^2e^2 + \delta_3^2\beta_0^2X^2 - \\
& - 2\delta_0(\beta_0\beta_3^2 - e\beta_3^2h_0 - 2eh_3\beta_0\beta_3) - \\
& - 2\delta_3\beta_0[\beta_0(\beta_3 - Xh_3) - 2\beta_3Xh_0] - 2e\delta_0\delta_3\beta_0\beta_3X,
\end{aligned}$$

$$a_5 = 2[\beta_0\beta_3(\beta_0 h_3 + \beta_3 h_0) + \beta_0\beta_3(\delta_0 e\beta_3 + \delta_3 X\beta_0)],$$

$$a_6 = \beta_0^2\beta_3^2 .$$

II.2. Распад разрыва в конденсированном веществе с образованием двух ударных волн с нулевым начальным давлением

В случае столкновения невозмущенных конденсированных веществ, когда плотности в них соответствуют исходным, начальное давление равно нулю. Это упрощает выражение (43), т. к. в нем можно положить $P_0 = 0$ и $P_3 = 0$:

$$V^2 - \frac{(h_0-1)P_1^2}{\rho_0(P_1 h_0 + \alpha_0)} - \frac{(h_3-1)P_1^2}{\rho_3(P_1 h_3 + \alpha_3)} = \pm 2P_1^2\sqrt{\frac{(h_0-1)(h_3-1)}{\rho_0\rho_3(P_1 h_0 + \alpha_0)(P_1 h_3 + \alpha_3)}}. \qquad (46)$$

Приведем (46) к общему знаменателю и сократим на него, а затем поделим всё уравнение на $(\rho_0 V^2)^3$. В результате получим

$$\rho_3\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}h_0 + \frac{\alpha_0}{\rho_0V^2}\right)\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}h_3 + \frac{\alpha_3}{\rho_0V^2}\right) - (h_0-1)\rho_3\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}\right)^2\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}h_3 + \frac{\alpha_3}{\rho_0V^2}\right) - (h_3-1)\rho_0\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}\right)^2\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}h_0 + \frac{\alpha_0}{\rho_0V^2}\right) = \pm 2\left(\frac{P_1}{\rho_0V^2}\right)^2\sqrt{(h_0-1)(h_3-1)\left(\frac{P_1h_0}{\rho_0V^2} + \frac{\alpha_0}{\rho_0V^2}\right)\left(\frac{P_1h_3}{\rho_0V^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_0V^2}\right)}. \qquad (47)$$

Введем обозначения $Y = \frac{P_1}{\rho_0V^2}$, $\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\rho_0V^2}$, $\beta_3 = \frac{\alpha_3}{\rho_0V^2}$, $e = \frac{\rho_3}{\rho_0}$ и возведем левые и правые части (47) в квадрат. Тогда уравнение относительно Y примет вид

$$\sum_{i=0}^{6} a_i Y^{6-i} = 0, \qquad (48)$$

где

$$a_0 = [(h_0-1)h_3 e - (h_3-1)h_0]^2,$$

$$a_1 = 2[\ (h_0-1)^2 e^2 h_3\beta_3 + (h_3-1)^2 h_0\beta_0 - (h_0-1)e^2 h_0 h_3^2 - (h_3-1)eh_0^2 h_3 - (h_0-1)(h_3-1)e(\beta_0 h_3 + h_0\beta_3)\ ],$$

$$a_2 = e^2h_0^2h_3^2 + (h_0-1)^2e^2\beta_3^2 + (h_3-1)^2\beta_0^2 - 2(h_0-1)e^2h_3(\beta_0h_3 + 2h_0\beta_3) - 2(h_3-1)eh_0(h_0\beta_3 + 2h_3\beta_0) - 2(h_0-1)(h_3-1)e\beta_0\beta_3,$$

$$a_3 = 2\left[\ e^2 h_0 h_3(\beta_0 h_3 + h_0\beta_3) - (h_0 - 1)e^2\beta_3(\beta_3 h_0 + 2h_3\beta_0) - \right.$$
$$\left. - (h_3 - 1)e\beta_0(h_3\beta_0 + 2h_0\beta_3)\ \right],$$

$$a_4 = e^2\left(\beta_0^2 h_3^2 + h_0^2\beta_3^2 + 4h_0 h_3\beta_0\beta_3\right) - 2(h_0 - 1)e^2\beta_0\beta_3^2 -$$
$$- 2(h_3 - 1)e\beta_3\beta_0^2,$$

$$a_5 = 2e^2\beta_0\beta_3(h_0\beta_3 + h_3\beta_0),$$

$$a_6 = e^2\beta_0^2\beta_3^2.$$

III. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущих разделах I и II с помощью математических преобразований удалось свести системы нелинейных уравнений (15), (25) – (28), (35) к отдельным алгебраическим урав- нениям (24), (32), (44), (48), из которых нужно определить искомое неизвестное Y. Задачу нахождения корней алгебраического уравнения можно разделить на две подзадачи: во-первых, локализации корней, а, во-вторых, уточнения значения каждого корня до нужной степени точности.

Под задачей локализации корней подразумевается указание таких частей области определения уравнения, в которых существует только по одному его решению.

Допустим, что имеется алгебраическое уравнение вида

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} = 0 \qquad (49)$$

с действительными коэффициентами $a_i,\ i = 0 \div n$ (n – натуральное число большее единицы), решение которого z может быть как действительным, так и комплексным числом.
Введем в рассмотрение два числа:

$$A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\} \quad \text{и} \qquad B = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\},$$

где a_i – коэффициенты уравнения (49). Тогда следствием из основной теоремы алгебры комплексных чисел является следующее утверждение [2]:
Все корни алгебраического уравнения (49) расположены на комплексной плоскости в кольце

$$\frac{|a_n|}{|a_n + B|} \le |z| \le 1 + \frac{A}{|a_0|}. \qquad (50)$$

Существует еще ряд признаков, позволяющих определить область нахождения корней. Приведем два из них.

Метод Ньютона

Пусть многочлен из (49) имеет действительные коэффициенты $a_i (i = 0 \div n)$ и $a_0 \rangle 0$. Тогда, если при $z = c$ выполнены неравенства

$$f(c)\rangle 0,\ f'(c)\rangle 0,\ \ldots,\ f^{(n)}(c)\rangle 0,$$

то число c служит верхней границей положительных корней уравнения (49).

Теорема Декарта

Число положительных корней уравнения (49) с учетом их кратности равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, (причем, равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.

С другими аналитическими подходами к локализации корней можно ознакомиться в работах [2], [3].

После того как с помощью неравенств (50) или еще каким-либо другим способом определена область существования корней, подзадачу локализации можно свести к выполнению следующего алгоритма.

Вся область делится на N частей, где N – достаточно большее число. На границах определяются значения функции $f(z)$. Для дальнейшего рассмотрения оставляют те подобласти, на границах которых функция $f(z)$ принимает значения разных знаков. Если число таких подобластей равняется n-степени алгебраического многочлена (49), то подзадача локализации считается решенной. Если же число подобластей с разными значениями функции $f(z)$ на границах меньше n, то процесс можно повторить, например, удвоив число частей разбиения $M = 2N$. Продолжим этот процесс, пока не будут локализованы все n-корней уравнения (49). Реализация этого алгоритма на языке программирования высокого уровня, как правило, не вызывает никаких дополнительных сложностей.

После того как решена подзадача локализации корней, уточнение приближенного значения корня до нужной степени точности может быть выполнено методом половинного деления, методом простой итерации, методом Ньютона или какимнибудь приближенным методом с обязательным контролем точности приближенного значения корня и выполнения всех условий сходимости выбранного метода [3].

Список литературы

1. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М: Гос. Изд. Физ.-мат. лит., 1963.
2. *Курош А.К.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975.
3. *Демченко В.В.* Распад произвольного гидродинамического разрыва. Учебное пособие, МФТИ. — М: 1998.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вариант № 1

Распад плоского разрыва в одномерной газовой динамике может происходить с образованием двух ударных волн и контактного разрыва. Припишем газодинамическим параметрам перед первой ударной волной индекс «0»; между фронтом первой ударной волны и контактным разрывом – «1», между контактным разрывом и фронтом второй ударной волны – «2», невозмущенному газу перед второй ударной волной – «3». Тогда справедливы соотношения Рэнкина–Гюгонио на фронте ударных волн в лабораторной системе координат:

$$\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0),$$

$$P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U - D_0)^2,$$

$$(U_1 - D_0)\left\{\rho_1\left[\varepsilon_1 + \frac{(U_1 - D_0)^2}{2}\right] + P_1\right\} =$$

$$= (U_0 - D_0)\left\{\rho_0\left[\varepsilon_0 + \frac{(U_0 - D_0)^2}{2}\right] + P_0\right\},$$

$$\rho_3(U_3 - D_3) = \rho_2(U_2 - D_3),$$

$$P_3 + \rho_3(U_3 - D_3)^2 = P_2 + \rho_2(U_2 - D_3)^2,$$

$$(U_3 - D_3)\left\{\rho_3\left[\varepsilon_3 + \frac{(U_3 - D_3)^2}{2}\right] + P_3\right\} =$$

$$= (U_2 - D_3)\left\{\rho_2\left[\varepsilon_2 + \frac{(U_2 - D_3)^2}{2}\right] + P_2\right\}$$

и соотношения на контактном разрыве

$P_2 = P_1,$

$U_2 = U_1,$

где ρ – плотность, U – массовая скорость газа, P – давление, C – скорость звука в газе, D – скорость фронта ударной волны, γ – показатель адиабаты в соответствующих областях. Определить скорости ударных волн D_0 и D_3.

Задание № 1

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 2{,}219 \cdot 10^{-4}$ г/см^3; $U_0 = -1{,}587 \cdot 10^5$ см/с;

$P_0 = 3{,}7812 \cdot 10^6$ дин/см^2;

$\gamma_3 = 5/3$; $\rho_3 = 2{,}71 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; $U_3 = 10$ см/с;

$P_3 = 5 \cdot 10^5$ дин/см^2.

Задание № 2

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 7{,}9$ г/см^3; $U_0 = 0$; $P_0 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2;

$\gamma_3 = 5/3$; $\rho_3 = 11{,}37$ г/см^3; $U_3 = 5 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 3

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 2{,}71 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; $P_0 = 5 \cdot 10^5$ дин/см^2;

$U_0 = 0$;

$\gamma_3 = 7/5$; $\rho_3 = 2{,}219 \cdot 10^{-4}$ г/см^3; $U_3 = 1{,}587 \cdot 10^5$ см/с;

$P_3 = 10^6$ дин/см^2.

Задание № 4

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 7{,}9$ г/см^3; $U_0 = 0$; $P_0 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2;

$\gamma_3 = 7/5$; $\rho_3 = 11{,}37$ г/см^3; $U_3 = 5 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 5

$\gamma_0 = 7/5$; $\rho_0 = 7{,}9$ г/см^3; $P_0 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2; $U_0 = 0$;

$\gamma_3 = 7/5$; $\rho_3 = 11{,}37$ г/см^3; $U_3 = 5 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 6

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 11{,}37$ г/см^3; $U_0 = -2{,}28 \cdot 10^4$ см/с;

$P_0 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2;

$\gamma_3 = 5/3$; $\rho_3 = 7{,}9$ г/см^3; $U_3 = 2{,}72 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 7

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 7{,}9$ г/см^3; $P_0 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2;

$U_0 = -2{,}72 \cdot 10^4$ см/с;

$\gamma_3 = 7/5$; $\rho_3 = 11{,}37$ г/см^3; $U_3 = 2{,}28 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 8

$\gamma_0 = 7/5$; $\rho_0 = 11{,}37$ г/см^3; $U_0 = -2{,}28 \cdot 10^4$ см/с;

$P_0 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2;

$\gamma_3 = 7/5$; $\rho_3 = 7{,}9$ г/см^3; $U_3 = 2{,}72 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Вариант № 2

Распад плоского разрыва в одномерной газовой динамике может происходить с образованием ударной волны, контактного разрыва и волны разряжения. Припишем газодинамическим параметрам перед ударной волной индекс «0», между фронтом ударной волны и контактным разрывом – «1», между контактным разрывом и «хвостом» волны разряжения – «2» и невозмущенному газу перед волной разряжения – «3». Тогда справедливы соотношения Рэнкина–Гюгонио на фронте ударной волны в лабораторной системе координат:

$$\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0),$$

$$P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2,$$

$$(U_1 - D_0)\left\{\rho_1\left[\varepsilon_1 + \frac{(U_1 - D_0)^2}{2}\right] + P_1\right\} =$$

$$= (U_0 - D_0)\left\{\rho_0\left[\varepsilon_0 + \frac{(U_0 - D_0)^2}{2}\right] + \rho_0\right\},$$

соотношения на контактном разрыве

$$P_1 = P_2,$$

$$U_1 = U_2$$

и в волне разряжения

$$U_3 + \frac{2C_3}{\gamma_3 - 1} = U_2 + \frac{2C_2}{\gamma_3 - 1},$$

$$C_2 = C_3\left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}},$$

где ρ – плотность, U – массовая скорость газа, P – давление, C – скорость звука в газе, D_0 – скорость фронта ударной волны, γ – показатель адиабаты в соответствующих областях. Определить скорость ударной волны D_0.

Задание № 1

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 1{,}694 \cdot 10^{-4}$ г/см^3; $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^6$ дин/см^2;
$U_0 = 0$;
$\gamma_3 = 7/5$; $C_3 = 3{,}6537 \cdot 10^4$ см/с; $P_3 = 1{,}6768 \cdot 10^6$ дин/см^2;
$U_3 = 0$.

Задание № 2

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 1{,}694 \cdot 10^{-4}$ г/см^3; $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^6$ дин/см^2;
$U_0 = 0$;
$\gamma_3 = 7/5$; $C_3 = 3{,}6537 \cdot 10^4$ см/с; $P_3 = 1{,}6768 \cdot 10^6$ дин/см^2;
$U_3 = 1{,}229 \cdot 10^4$ см/с.

Задание № 3

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 10^{-5}$ г/см^3; $U_0 = 0$; $P_0 = 3{,}848 \cdot 10^3$ дин/см^2;
$\gamma_3 = 5/3$; $C_3 = 1{,}31478 \cdot 10^4$ см/с;
$U_3 = 5 \cdot 10^4$ см/с $P_3 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 4

$\gamma_0 = 7/5$; $\rho_0 = 1{,}694 \cdot 10^{-4}$ г/см^3; $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^6$ дин/см^2;
$U_0 = 10^{-3}$ см/с;
$\gamma_3 = 7/5$; $C_3 = 3{,}6537 \cdot 10^4$ см/с; $P_3 = 1{,}6768 \cdot 10^6$ дин/см^2;
$U_3 = 1{,}229 \cdot 10^4$ см/с.

Задание № 5

$\gamma_0 = 7/5$; $\rho_0 = 10^{-5}$ г/см^3; $P_0 = 3{,}848 \cdot 10^3$ дин/см^2

$U_0 = 0$;

$\gamma_3 = 5/3$; $C_3 = 1{,}31478 \cdot 10^4$ см/с; $U_3 = 5 \cdot 10^4$ см/с;

$P_3 = 1{,}17928 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 6

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 1{,}694 \cdot 10^{-4}$ г/см^3; $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^6$ дин/см^2;

$U_0 = -10^{-1}$ см/с;

$\gamma_3 = 5/3$; $C_3 = 3{,}6537 \cdot 10^4$ см/с; $P_3 = 1{,}6768 \cdot 10^6$ дин/см^2

$U_3 = 0$.

Задание № 7

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 10^{-5}$ г/см^3; $U_0 = 0$; $P_0 = 3{,}848 \cdot 10^3$ дин/см^2

$\gamma_3 = 5/3$; $C_3 = 2{,}53248 \cdot 10^4$ см/с; $U_3 = 0$;

$P_3 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Задание № 8

$\gamma_0 = 5/3$; $\rho_0 = 10^{-5}$ г/см^3; $P_0 = 3{,}848 \cdot 10^3$ дин/см^2;

$U_0 = 0$;

$\gamma_3 = 7/5$; $C_3 = 2{,}53248 \cdot 10^4$ см/с; $P_3 = 3{,}04 \cdot 10^9$ дин/см^2;

$U_3 = 0$.

Вариант № 3

Распад плоского разрыва при высокоскоростном ударе конденсированных веществ может происходить с образованием двух ударных волн и контактного разрыва. Припишем газодинамическим параметрам перед первой ударной волной индекс «0», между фронтом первой ударной волны и контактным разрывом – «1», между контактным разрывом и фронтом второй ударной волны – «2», невозмущенному веществу перед второй ударной волной – «3». На ударных волнах выполняются законы сохранения массы, количества движения и справедливы адиабаты ударного сжатия (Гюгонио):

$$\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0),$$

$$P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2,$$

$$P_1 = \frac{\alpha_0(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 h_0 - \rho_1},$$

$$\rho_3(U_3 - D_3) = \rho_2(U_2 - D_3),$$

$$P_3 + \rho_3(U_3 - D_3)^2 = P_2 + \rho_2(U_2 - D_3)^2,$$

$$P_2 = \frac{\alpha_3(\rho_2 - \rho_3)}{\rho_3 h_3 - \rho_2},$$

а также соотношения на контактном разрыве

$$P_2 = P_1,$$

$$U_2 = U_1,$$

где ρ – плотность, U – массовая скорость вещества, P – давление, D – скорость фронта ударной волны; γ_i – показатель адиабаты, $\alpha_i = \rho_i C_i^2 (h_i - 1)$, $h_i = (\gamma_i + 1)/(\gamma_i - 1)$, C_i – постоянная i-вещества, $i = 0, 3$ в соответствующих областях. Определить скорости ударных волн D_0 и D_3.

Задание № 1

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 13{,}76163$ г/см^3; $U_0 = -5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;

$P_0 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 10^2$ г/см^3; $U_3 = 0$ см/с; $P_3 = 0$ дин/см^2;

$C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 2

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 10^2$ г/см^3; $U_0 = -10^6$ см/с; $P_0 = 0$ дин/см^2;

$C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 21{,}80089$ г/см^3; $U_3 = -5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;

$P_3 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 3

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 13{,}76163$ г/см^3; $U_0 = 0$ см/с;

$P_0 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 10^2$ г/см^3; $U_3 = 5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;

$P_3 = 0$ дин/см^2; $C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 4

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 10^2$ г/см^3; $U_0 = -4{,}677611 \cdot 10^5$ см/с;

$P_0 = 0$ дин/см^2; $C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 21{,}80089\, г/см^3$; $U_3 = 0$ см/с;

$P_3 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 5

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 10^2$ г/см^3; $U_0 = 0$ см/с; $P_0 = 0$ дин/см^2;

$C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 13{,}76163$ г/см^3; $U_3 = 5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;

$P_3 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 6

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 21{,}80089$ г/см^3; $U_0 = 5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;

$P_0 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 10^2$ г/см^3; $U_3 = 10^6$ см/с; $P_3 = 0$ дин/см^2

$C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 7

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 10^2$ г/см^3; $U_0 = -5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;

$P_0 = 0$ дин/см^2; $C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 13{,}76163$ г/см^3; $U_3 = 0$ см/с;

$P_3 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 8

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 21{,}80089$ г/см^3; $U_0 = 0$ см/с;

$P_0 = 5{,}176613 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 10^2$ г/см^3; $U_3 = 4{,}677611 \cdot 10^5$ см/с;

$P_3 = 0$ дин/см^2; $C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Вариант № 4

Распад плоского разрыва при высокоскоростном ударе конденсированных веществ может происходить с образованием двух ударных волн и контактного разрыва. Припишем газодинамическим параметрам перед первой ударной волной индекс «0», между фронтом первой ударной волны и контактным разрывом – «1», между контактным разрывом и фронтом второй ударной волны – «2», невозмущенному веществу перед второй ударной волной – «3». На ударных волнах выполняются законы сохранения массы, количества движения и справедливы адиабаты ударного сжатия (Гюгонио):

$$\rho_1(U_1 - D_0) = \rho_0(U_0 - D_0),$$

$$P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 = P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2,$$

$$P_1 = \frac{\alpha_0(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 h_0 - \rho_1},$$

$$\rho_3(U_3 - D_3) = \rho_2(U_2 - D_3),$$

$$P_3 + \rho_3(U_3 - D_3)^2 = P_2 + \rho_2(U_2 - D_3)^2,$$

$$P_2 = \frac{\alpha_3(\rho_2 - \rho_3)}{\rho_3 h_3 - \rho_2},$$

а также соотношения на контактном разрыве

$$P_2 = P_1,$$

$$U_2 = U_1,$$

где ρ – плотность, U – массовая скорость вещества, P – давление, D – скорость фронта ударной волны; γ_i – показатель адиабаты, $\alpha_i = \rho_i C_i^2 (h_i - 1)$, $h_i = (\gamma_i + 1)/(\gamma_i - 1)$, C_i – постоянная i вещества, i = 0, 3 в соответствующих областях. Определить скорости ударных волн D_0 и D_3.

Задание № 1

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 11{,}346$ г/см^3; $U_0 = 10^6$ см/с; $P_0 = 0$ дин/см^2;
$C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с
$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 7{,}85$ г/см^3; $U_3 = 0$ см/с; $P_3 = 0$ дин/см^2;
$C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 2

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 11{,}346$ г/см^3; $U_0 = -4{,}677611 \cdot 10^5$ см/с;
$P_0 = 0$ дин/см^2; $C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с
$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 7{,}85$ г/см^3; $U_3 = 5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;
$P_3 = 0$ дин/см^2; $C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 3

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 7{,}85$ г/см^3; $U_0 = 0$ см/с; $P_0 = 0$ дин/см^2;
$C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.
$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 11{,}346$ г/см^3; $U_3 = 10^6$ см/с; $P_3 = 0$ дин/см^2;
$C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 4

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 7{,}85$ г/см^3; $U_0 = -5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;
$P_0 = 0$ дин/см^2; $C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.
$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 11{,}346$ г/см^3; $U_3 = 4{,}677611 \cdot 10^5$ см/с;
$P_3 = 0$ дин/см^2; $C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 5

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 7{,}85$ г/см^3; $U_0 = -10^6$ см/с; $P_0 = 0$ дин/см^2;
$C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 11{,}346$ г/см^3; $U_3 = 0$ см/с; $P_3 = 0$ дин/см^2;
$C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 6

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 11{,}346$ г/см^3; $U_0 = 0$ см/с; $P_0 = 0$ дин/см^2;
$C_0 = 1{,}972 \cdot 10^5\ см/с$.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 7{,}85$ г/см^3; $U_3 = 10^6$ см/с; $P_3 = 0$ дин/см^2;
$C_3 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 7

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 7{,}85$ г/см^3; $U_0 = 5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;
$P_0 = 0$ дин/см^2; $C_0 = 4{,}65 \cdot 10^5$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 11{,}346$ г/см^3; $U_3 = -4{,}677611 \cdot 10^5$ см/с;
$P_3 = 0$ дин/см^2; $C_3 = 1{,}972 \cdot 10^5$ см/с.

Задание № 8

$\gamma_0 = 3$; $\rho_0 = 11{,}346$ г/см^3; $U_0 = 4{,}677611 \cdot 10^5$ см/с;
$P_0 = 0$ дин/см^2; $C_0 = 1{,}972 \cdot 10^3$ см/с.

$\gamma_3 = 3$; $\rho_3 = 7{,}85$ г/см^3; $U_3 = -5{,}322389 \cdot 10^5$ см/с;
$P_3 = 0$ дин/см^2; $C_3 = 4{,}65 \cdot 10^3$ см/с.