

## Лекция 2.

### в) Эффект Комптона.

Не менее ярко корпускулярные свойства излучения проявляются в эффекте Комптона (1923 г.). А.Комптон<sup>1</sup> занимался изучением рассеяния рентгеновского излучения различными веществами. Схема его установки приведена на рис.2.1. Пучок рентгеновского излучения коллимируется диафрагмами  $D_1$  и  $D_2$ , рассеивается на мишени  $R$ , а затем попадает в рентгеновский спектрограф.

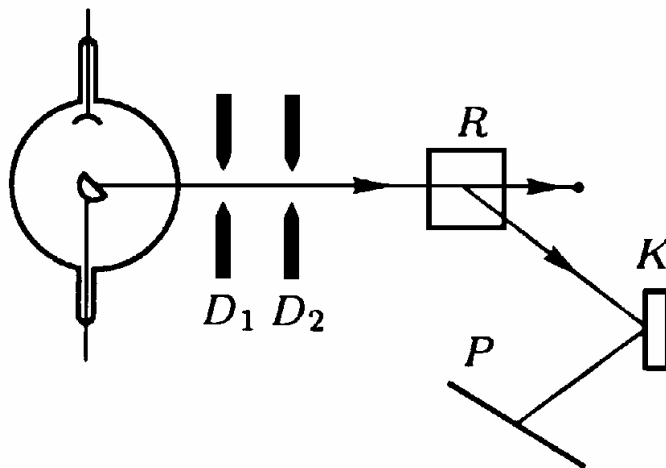


Рис.2.1. Схема установки для исследования эффекта Комптона.

а затем попадает в рентгеновский спектрограф. Сигнал со спектрографа регистрируется на фотопластинке  $P$ . Оказалось, что независимо от типа вещества длина волны рассеянного излучения смещается в длинноволновую часть спектра, причем это смещение зависит от угла, под которым наблюдается рассеянный свет:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_e(1 - \cos\theta). \quad (2.1)$$

Здесь  $\lambda_0$  и  $\lambda$  - длины волн падающего и рассеянного излучения,  $\theta$  - угол рассеяния,  $\lambda_e$  - так называемая комptonовская длина волны электрона, ее численное значение  $\sim 2.42 \cdot 10^{-10}$  см.

Начнем качественный анализ явления с утверждения, что за рассеяние излучения в твердом теле отвечают, прежде всего, электроны, входящие в его состав. Действительно, интенсивность рассеянного света определяется квадратом ускорения излучающей частицы  $I \sim |a|^2$ . Поскольку ускорение частицы обратно пропорционально ее массе, получаем  $I \sim 1/m^2$ , т.е. интенсивность излучения легких частиц (электронов) на несколько порядков больше, чем интенсивность излучения ионов. Еще одно важное допущение – электроны, на которых происходит рассеяние рентгеновского излучения, можно считать свободными и неподвижными. Справедливость этого допущения связана с тем, что энергия кванта излучения рентгеновского диапазона частот существенно превышает кинетическую и потенциальную энергию электронов в твердом теле (например, кинетическая энергия электронов проводимости в металле составляет несколько электронвольт, в то время как типичное значение энергии рентгеновского излучения – десятки килоэлектронвольт).

Мы покажем сейчас, что соотношение (2.1) можно получить из законов сохранения энергии и импульса в предположении, что эффект Комптона есть результат рассеяния одиночного кванта рентгеновского излучения на неподвижном электроне (схема процесса представлена на рис.2.2). Запишем закон сохранения энергии в виде

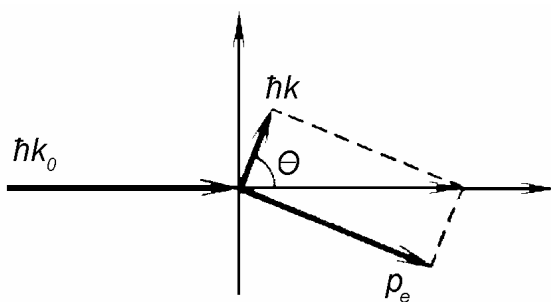


Рис.2.2. Диаграмма импульсов при комptonовском рассеянии

энергия кванта излучения рентгеновского диапазона частот существенно превышает кинетическую и потенциальную энергию электронов в твердом теле (например, кинетическая энергия электронов проводимости в металле составляет несколько электронвольт, в то время как типичное значение энергии рентгеновского излучения – десятки килоэлектронвольт).

<sup>1</sup> А. Compton (1892-1962) – американский физик, Нобелевская премия (1927)

$$\hbar\omega_0 + mc^2 = \hbar\omega + E_e . \quad (2.2)$$

Здесь  $\hbar\omega_0$  и  $\hbar\omega$  - энергии кванта до и после рассеяния,  $E_e$  - энергия электрона после рассеяния.

Прежде чем записать закон сохранения импульса нам необходимо определить импульс фотона. Вспомним, что согласно классической электродинамике электромагнитное поле характеризуется объемной плотностью энергии  $E$  и импульса  $P$ , причем эти величины связаны соотношением

$$E = Pc . \quad (2.3)$$

Будем теперь считать, что это соотношение справедливо для отдельного кванта поля – фотона. Тогда получаем, что импульс фотона равен

$$p = \hbar\omega/c , \quad (2.4)$$

или, вводя понятие волнового вектора  $k = \omega/c$ ,

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} . \quad (2.5)$$

Отметим, что использование соотношения (2.3) для одного фотона позволяет рассматривать его как безмассовую частицу. Действительно, вспоминая общерелятивистскую связь энергии и импульса частицы

$$E_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} , \quad (2.6)$$

получаем, что соотношения (2.3), (2.4) есть частный случай (2.6) для частицы с нулевой массой.

Запишем теперь закон сохранения импульса, описывающий процесс рассеяния фотона на неподвижном электроны:

$$\hbar\vec{k}_0 = \hbar\vec{k} + \vec{p}_e , \quad (2.7)$$

где импульс электрона  $\vec{p}_e$  связан с его энергией соотношением (2.6).

Возведем (2.7) в квадрат, тогда, учитывая связь волнового вектора с частотой, получим:

$$(\hbar\omega_0)^2 + (\hbar\omega)^2 - 2\hbar\omega_0\hbar\omega\cos\theta = p_e^2 c^2 . \quad (2.8)$$

Здесь  $\theta$  - угол между  $\vec{k}_0$  и  $\vec{k}$ , т.е. угол рассеяния фотона. С другой стороны, из закона сохранения энергии (2.2) имеем:

$$(\hbar\omega_0 - \hbar\omega)^2 + 2(\hbar\omega_0 - \hbar\omega)mc^2 = p_e^2 c^2 . \quad (2.9)$$

Приравняв левые части выражений (2.8) и (2.9), получим

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar}{mc^2} \omega_0 \omega (1 - \cos\theta) . \quad (2.10)$$

Учитывая, что  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , из (2.10) легко получить

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos\theta) , \quad (2.11)$$

т.е. мы получили выражение (2.1), причем комптоновская длина волны  $\lambda_e = 2\pi\hbar/mc = h/mc = 2.42 \cdot 10^{-10}$  см. Численное значение этой константы с хорошей точностью совпадает с экспериментальными данными, полученными А.Комптоном. Иногда комптоновской длиной волны называют величину  $\lambda' = \hbar/mc$ . Численное значение этой постоянной в  $2\pi$  раз меньше и равно  $3.86 \cdot 10^{-11}$  см.

Таким образом, экспериментальные данные по рассеянию рентгеновского излучения в твердых телах можно понять в рамках модели столкновения фотона с электро-

ном, находящимся внутри твердого тела в предположении, что этот электрон является свободным и неподвижным.

Рассмотренная модель также позволяет понять, почему сдвиг длины волны электромагнитного излучения был обнаружен именно в рентгеновском диапазоне частот, а не в оптическом или тем более в радиочастотном. Действительно длина волны рентгеновского излучения в опытах Комптона составляла величину порядка ангстрема, т.е. относительное изменение длины волны  $\Delta\lambda/\lambda \cong 10^{-2}$ . Комптоновское смещение длины волны не зависит от длины волны рассеиваемого излучения, поэтому в оптическом диапазоне  $\Delta\lambda/\lambda \cong 10^{-5}$ , а в радиочастотном  $\Delta\lambda/\lambda \leq 10^{-9}$ . Такое изменение длины волны заметно сложнее обнаружить экспериментально<sup>2</sup>.

В заключение отметим, комптоновская длина волны – один из фундаментальных масштабов длины в физике. Он определяет область применимости классической электродинамики. Оказывается, на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона и меньше классическая электродинамика уже не справедлива, и необходимо использовать квантовую электродинамику. Например, на таких расстояниях оказывается несправедлив закон Кулона, описывающий взаимодействие двух точечных зарядов.

*г) Тормозное рентгеновское излучение. Квантовый предел.*

Обсудим еще один эффект, убедительно доказывающий квантовую природу электромагнитного излучения. Речь пойдет об особенности спектра тормозного рентгеновского излучения, возникающего при пролете быстрой заряженной частицы в каком-либо силовом поле, например при пролете быстрого электрона в поле атомного ядра. Электрон, двигаясь с ускорением, излучает энергию, причем интенсивность излучения пропорциональна квадрату ускорения электрона. Нас будет интересовать распределение излученной энергии по спектру, особенно в области высоких частот.

С точки зрения классической электродинамики эта задача должна решаться следующим образом. Пренебрегая силой радиационного трения, движение электрона в поле ядра можно рассмотреть в рамках уравнения:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{Ze^2}{r^3}\vec{r}. \quad (2.12)$$

В интересующем нас случае процесса рассеяния это уравнение описывает движение по гиперболической траектории. Определив закон движения  $\vec{r}(t)$  мы тут же находим ускорение электрона при движении по траектории

$$\vec{a}(t) = -\frac{Ze^2}{r^3(t)}\vec{r}(t). \quad (2.13)$$

Спектральный состав тормозного излучения определяется фурье - компонентой ускорения электрона

$$I_\omega \sim |\vec{a}_\omega|^2, \quad (2.14)$$

где

$$\vec{a}_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{a}(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.15)$$

<sup>2</sup> Напомним, что проведенные оценки справедливы лишь для свободных электронов. Для полей оптического и радиочастотного диапазонов частот электроны, находящиеся в твердых телах, не могут даже приближенно считаться свободными.

Мы не будем сейчас заниматься вычислением этого интеграла, для нас важно, что его значение отлично от нуля для любого значения  $\omega$ , т.е. спектр тормозного излучения простирается до бесконечно больших частот. Анализ выражения (2.15) показывает, в области высоких частот величина спектральной интенсивности излучения экспоненциально мала, однако отлична от нуля. Такой результат представляется странным с точки зрения квантовых представлений. Ведь если энергия электрона до рассеяния равна  $E_0 = eV$  ( $V$  - ускоряющее напряжение на системе формирования электронного пучка), то электрон не может испустить кванта электромагнитного поля с частотой большей некоторой максимальной, определяемой из соотношения

$$eV = \hbar\omega_{\max}. \quad (2.16)$$

Другими словами, если свет излучается квантами, у спектра тормозного излучения должна существовать коротковолновая граница (квантовый предел), определяемая с помощью (2.16). Эксперимент показывает, что такая граница действительно существует, спектр тормозного излучения действительно имеет коротковолновую границу, что убедительно свидетельствует о справедливости квантовых представлений о свете.

Отметим, что квантовый предел также может быть использован для определения численного значения постоянной Планка, точнее отношения  $e/\hbar$  или  $e/hc$ .

### Фотон.

Убедившись в реальности существования фотонов, попробуем теперь ответить на вопрос: а можно ли пучок света, состоящий из фотонов, расщепить так, чтобы в каждом из полученных пучков света имеющих ту же частоту излучения, энергия квантов света была меньше, чем  $\hbar\omega$ , например  $\hbar\omega/2$ . Другими словами, можно ли расщепить квант света на две равные (а может быть и неравные части) так, чтобы энергия каждой из частей была бы меньше чем  $\hbar\omega$ , а в сумме получалась бы энергия исходного кванта. А может быть фотон, как физический объект, представляет собой классический цуг электромагнитных волн, который легко может быть сформирован с помощью высокочастотного генератора, ключа и антенны.

Простейший прибор, который делит цуг электромагнитных волн на части, это обычная светоделительная пластинка. При угле падения пучка света на пластинку в  $45^\circ$  происходит как раз деление цуга пополам. Насколько реально утверждение, что в таком эксперименте как раз и происходит расщепление фотона на две равные части? Такой опыт выполнялся многократно еще до возникновения квантовых представлений о свете. Однако эти классические опыты выполнялись со сравнительно интенсивными пучками

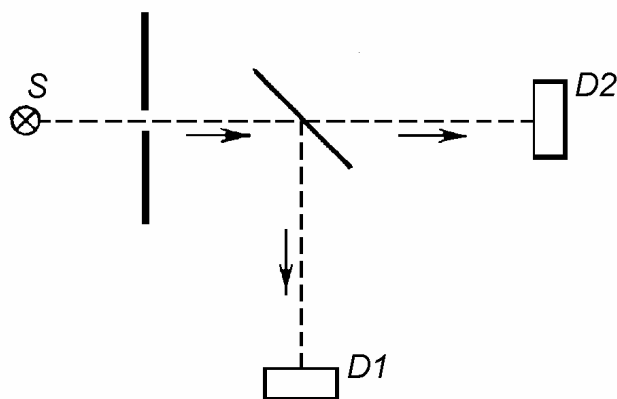


Рис.2.3. Схема опыта по делению классического волнового цуга.

света, содержащими огромное количество фотонов. За поведением отдельного фотона в них проследить оказывается невозможным. Поэтому рассмотрим снова опыт по расщеплению классического цуга с помощью светоделительной пластинки, только со слабоинтенсивным пучком света. Схема такого эксперимента представлена на рис.2.3. Основная часть экспериментальной установки — это светоделительная пластинка и два детектора  $D1$   $D2$ , измеряющие интенсивность попавшего в них излучения. Будем считать, что де-

ление пучка происходит ровно пополам, т.е. каждый из детекторов регистрирует интенсивность в два раза меньшую, чем интенсивность входного пучка. Начнем теперь уменьшать интенсивность падающего пучка. Сначала качественно картина меняться не будет, в обоих плечах светоделительной пластинки будут измеряться равные интенсивности сигнала, постепенно убывающие по мере ослабления входного пучка. Однако, начиная с некоторого значения входной интенсивности, мы заметим, что в некоторые моменты времени детектор 1 сработал, в то время как детектор 2 – нет, в какие-то моменты времени, наоборот, детектор 2 зарегистрировал сигнал, в то время как детектор 1 – нет. По мере дальнейшего уменьшения интенсивности такие непарные срабатывания начинают преобладать над случаями одновременного срабатывания детекторов, и, наконец, мы приходим к ситуации, когда в конкретный момент времени срабатывает только либо детектор 1, либо детектор 2. При этом величина сигнала, регистрируемая детектором при его срабатывании, остается постоянной и независимой от интенсивности падающего пучка. По мере уменьшения интенсивности детекторы срабатывают все реже, но каждый раз они регистрируют сигнал строго определенной величины. Эту ситуацию легко понять, если предположить, что свет состоит из фотонов, и в слабоинтенсивных полях фотоны летят поштучно, поэтому сигнал постоянной величины означает регистрацию одного фотона, который оказывается нерасщепляемым. Он попадает целиком либо в один детектор, либо в другой. При этом ответить на вопрос, в какой из детекторов попадет фотон в следующий раз – принципиально невозможно. Кажется, что процесс носит случайный характер. Однако если подождать достаточно долго, так чтобы каждый из детекторов зарегистрировал много фотонов, то выявится статистическая закономерность: примерно в половине случаев срабатывал один детектор, в половине случаев – другой. Другими словами, можно говорить о вероятности процесса. С вероятностью  $w = 1/2$  фотон полетит по пути «1», с вероятностью  $w = 1/2$  – по пути «2». При этом сам фотон остается нерасщепленным. Опыт свидетельствует в пользу того, что расщепить фотон невозможно, он действительно является некоторой минимальной порцией энергии электромагнитного излучения с данной частотой.

Насколько убедительным представляются наши рассуждения о нерасщепляемости фотона? Они весьма убедительны. Может наиболее убедительным доказательством нерасщепляемости фотонов является экспериментально наблюдаемый фотоэффект от излучения далеких звезд. Нетрудно оценить напряженность электрического поля волны, воздействующего на электроны в атоме или твердом теле, пришедшего от звезды удаленной от нас на десятки и сотни тысяч световых лет. Поток энергии излучения, попадающий в приемное окно фотодетектора оказывается ничтожно малым, однако в некоторый момент времени порция энергии в виде кванта  $\hbar\omega$  передается одному из электронов фотоприемника, и электрон покидает поверхность фотокатода. Как энергия поля, распределенная по астрономически большому объему, успела сосредоточиться в нужном месте остается немного загадочным. Однако закон Эйнштейна действует, как будто источник излучения находился где-то рядом. Проблема скорее в другом: ждать момента времени, когда на поверхности неожиданно соберется порция энергии  $\hbar\omega$  придется, наверное, долго. И мы опять не можем точно сказать, когда это произойдет, а лишь оценить вероятность наступления этого события.

Рассмотрим теперь другую серию экспериментов, которая также связана с проблемой расщепления фотона. Речь идет о классических дифракционных опытах, выполненных еще в начале XIX века. Рассмотрим простейший из них: дифракцию света на двух щелях. Схема такого опыта представлена на рис.2.4. Свет от монохроматического источника  $S$  падает на непрозрачный экран с двумя одинаковыми щелями, расстояние

между которыми  $2d$ . Интерференционная картина формируется на экране, удаленном на расстояние  $L \gg 2d$  от экрана со щелями. Будем считать, что размер каждой из щелей мал по сравнению с длиной волны излучения  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Тогда при одной открытой щели на экране будет некоторое плавное распределение интенсивности  $I_0(\theta)$ , определяемое амплитудой поля волны

$$I_0(\theta) = |A_0(\theta)|^2 \quad (2.17)$$

( $\theta$  - угол наблюдения). При двух открытых щелях необходимо найти суммарную амплитуду поля. В рассматриваемых условиях значения амплитуд полей от каждого из источников равны по абсолютной величине, однако между ними есть фазовая задержка равная  $\frac{\omega}{c} \cdot 2d \sin \theta$ . Поэтому для суммарной амплитуды запишем

$$A(\theta) = A_0(\theta) + A_0(\theta) \cdot \exp\left(2i \frac{\omega}{c} d \sin \theta\right) = 2A_0(\theta) \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{c} d \sin \theta\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} d \sin \theta\right). \quad (2.18)$$

Тогда для распределения интенсивности по углу  $\theta$  имеем:

$$I(\theta) = |A(\theta)|^2 = 4I_0(\theta) \cos^2\left(\frac{\omega}{c} d \sin \theta\right). \quad (2.19)$$

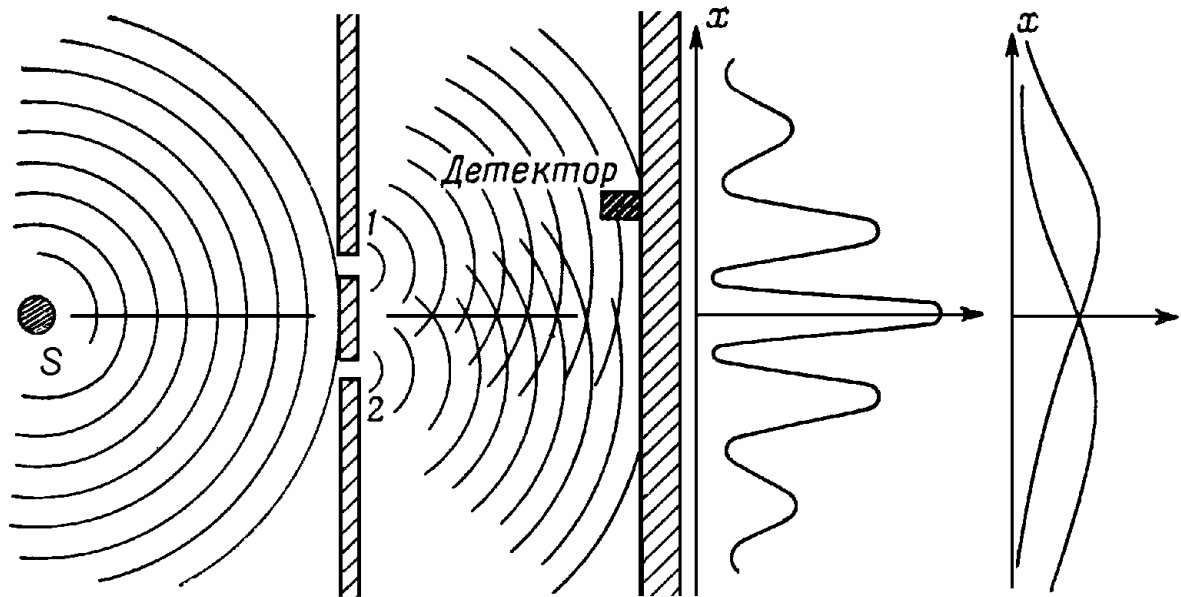


Рис.2.4. Дифракция электромагнитного излучения на двух щелях. Волновая и корпускулярная картины процесса.

Полученный результат давно и хорошо известен. Он представляет собой распределение интенсивности при интерференции волн от двух точечных источников. В частности, при  $\theta = 0$  наблюдается учетверение интенсивности, при выполнении условия

$$\frac{\omega}{c} d > \pi/2 \quad (2.20)$$

появляются направления, под которыми наблюдаемая интенсивность света равна нулю. Подчеркнем еще раз, что полученные результаты совершенно естественны и получены в рамках обычных классических волновых представлений.

С другой стороны все выглядит очень странно. Свет в пространстве распространяется определенными порциями в виде фотонов, и мы только что убедились в нерасщепляемости фотона на части. Это значит, что каждый конкретный фотон проходит либо

через одну щель, либо через другую. И тогда для него совершенно несущественно, открыта ли другая щель. Но если так, интерференция исчезнет! Мы должны наблюдать на экране просто сложение интенсивностей от двух щелей

$$I^*(\theta) = 2I_0(\theta). \quad (2.21)$$

На рис.2.4 для наглядности эти кривые несколько разнесены по пространству. Выражение (2.21) получено на основе корпускулярных представлений, в их основе – неделимость фотона на части. Вопрос, какой из формул (2.19) или (2.21) пользоваться, конечно, должен быть решен экспериментальным путем. Казалось, это уже давно было сделано, и именно интерференционные опыты заставили отказаться от корпускулярных представлений о свете, доминировавших в XVIII веке. И вот мы вернулись обратно. Однако, в дифракционных опытах, выполненных в XIX веке, интенсивность излучения была достаточно большой, так что в каждый момент времени в пространстве между щелями находилось огромное количество фотонов, которые могли как-то взаимодействовать между собой, обуславливая возникновение интерференции. Поэтому может быть выражение (2.19) справедливо для больших интенсивностей излучения, а (2.21) – для малых, когда число фотонов, находящихся одновременно в пространстве между щелями, мало? На этот вопрос следует дать отрицательный ответ. Впервые опыт по наблюдению интерференции в предельно слабоинтенсивных световых полях был выполнен Г.Тэйлором в 1909 г. Он наблюдал дифракционную картину от иглы, освещаемой крайне слабым источником излучения. Время облучения достигало трех месяцев. Однако возникающая интерференционная картина была столь же четкой, как и от обычных источников излучения.

Подводя некоторый итог обсуждению всей совокупности опытных фактов можно утверждать, что возникающая в интерференционных экспериментах картина не зависит от интенсивности света и соответствует предсказаниям волной теории, основанной на представлении о поле, распространяющемся в пространстве. В то же время неоспоримо утверждение, что это поле состоит из отдельных порций, квантов света, которые не могут быть расщеплены на части и регистрируются как единое целое.

Сформулируем теперь несколько правил, следование которым позволяет непротиворечивым образом описывать опытные данные:

1. Почти<sup>3</sup> монохроматическое излучение распространяется в пространстве в виде некоторых волновых пакетов, которые принято называть фотонами.

2. Распространение этих пакетов в пространстве определяется уравнениями Максвелла для напряженностей электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей как функций пространственных координат и времени.

3. В классической теории Максвелла мы привыкли интерпретировать величину  $(E^2 + H^2)/8\pi$  как объемную плотность энергии электромагнитного поля. Это неправильно. Эту величину следует связать с плотностью вероятности нахождения фотона в данной точке пространства. Если этот фотон будет обнаружен, то его энергия будет равна  $\hbar\omega$  вне зависимости от величины классической плотности энергии поля в этой области пространства.

4. В случае, если фотонов в некоторой области пространства объемом  $\delta V$  много, то энергия фотона, помноженная на вероятность его нахождения в данной области пространства даст величину энергии поля, как раз совпадающую с классическим значением  $(E^2 + H^2)/8\pi \cdot \delta V$ . То есть классическая трактовка величины  $(E^2 + H^2)/8\pi$

<sup>3</sup> Мы говорим здесь о почти монохроматическом излучении, поскольку строго монохроматическое излучение представляет собой математическую абстракцию и не встречается в природе.

оказывается справедливой в достаточно сильных полях, содержащих большое число фотонов.

Таким образом, мы пришли к выводу, что кванту света, фотону, присущи как волновые, так и корпускулярные свойства. Распространение фотонов в пространстве описывается волновым уравнением, однако это волновое уравнение описывает вероятностное поле. При регистрации фотона в некоторой области пространства он возникает как единое целое. Если мы знаем волновое поле, соответствующее фотону, то мы можем предсказать вероятность обнаружения в эксперименте фотона в той или иной точке пространства, однако, достоверно узнать, где он будет обнаружен, мы не можем.

### Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм.

В 1924 году Л. де Бройль<sup>4</sup> высказал предположение, что такой дуализм «волна – частица» присущ не только фотонам, но и всем другим микрообъектам – электронам и другим частицам. Движению частицы в пространстве соответствует некоторый волновой процесс: частице с импульсом  $\vec{p}$  соответствует волна (мы будем называть ее волной де Бройля) с волновым вектором  $\vec{k}$  (длиной волны  $\lambda_D = 2\pi/k$ ) и частотой  $\omega$ , причем связь этих величин с импульсом и энергией частицы определяется соотношениями:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad \lambda_D = h/p = 2\pi\hbar/p, \quad E = \hbar\omega. \quad (2.22)$$

Фактически гипотеза де Бройля обобщает соотношения «импульс – волновой вектор» и «энергия – частота», полученные ранее для фотона, на все другие объекты<sup>5</sup>. Выражения (2.22) считаются справедливыми и в общерелятивистском случае, поэтому выражение для длины волны де Бройля можно переписать в виде

$$\lambda_D = \frac{h\sqrt{1-(v/c)^2}}{mv}, \quad (2.23)$$

где  $v$  – скорость частицы. В нерелятивистском пределе (а в дальнейшем для нас, как правило, будет важен именно этот случай) имеем

$$\lambda_D = \frac{h}{mv}. \quad (2.24)$$

Оценим величину длины волны де Бройля для электрона с энергией в несколько электронвольт (характерный масштаб энергий в атомной физике). Мы получаем величину порядка ангстрема. Именно вследствие малости этой величины наблюдать экспериментально волновые свойства электрона непросто. Характерный размер пространственной структуры для наблюдения дифракции должен быть порядка длины волны, т.е. тоже иметь масштаб в несколько ангстрем. Именно такой размер имеют расстояния между атомами в твердых телах. Поэтому монокристалл образует своеобразную дифракционную решетку, которая может быть использована для обнаружения волновых свойств электронов. Такие опыты впервые были выполнены К.Девиссоном<sup>6</sup> и Л.Джермером<sup>7</sup> в 1927 году и доказали блестящее совпадение гипотезы де Бройля с экспериментальными данными. Экспериментальная схема установки, использованная Девиссоном и Джермером для наблюдения дифракции электронов, приведена на рис.2.5. Пучок электронов, сформированный в электронной пушке ( $A$ ) и ускоренный разностью потенциалов  $V$  (эта величина составляла несколько десятков вольт) падал на кристалл никеля под некото-

<sup>4</sup> L. De Broglie (1892-1987) - французский физик- теоретик, Нобелевская премия (1929).

<sup>5</sup> Как мы увидим в дальнейшем, в соотношениях (2.22) основную смысловую нагрузку несет связь импульса частицы с длиной волны. Частота волны де Бройля может быть введена неоднозначно.

<sup>6</sup> C.Davisson (1881-1958) – американский физик, Нобелевская премия (1937).

<sup>7</sup> L.Germer (1896-1971) – американский физик.



рым углом  $\theta$ . Детектор (С) измеряет интенсивность рассеянного пучка в зависимости от угла рассеяния и энергии ускоряемых электронов. Оказалось, что полученные данные очень похожи на те, которые получаются при дифракции рентгеновских лучей на монокристаллах. Как известно, положение максимумов в спектре отраженного от кристалла излучения может быть найдено из условия Вульфа-Брэгга

$$2d \cos \theta = n\lambda, \quad (2.25)$$

где  $d$  - расстояние между плоскостями решетки,  $\lambda$  - длина волны излучения,  $n$  - номер соответствующего максимума. В случае электронного пучка под длиной волны следует понимать длину волны де Бройля, которую в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\lambda_D = h/\sqrt{2meV}. \quad (2.26)$$

Подставляя (2.26) в (2.25), находим, что положение максимумов при рассеянии пучка электронов на кристалле должно удовлетворять соотношению

$$\sqrt{V} d \cos \theta = A \cdot n, \quad (2.27)$$

$A$  - некоторая константа, не зависящая от параметров пучка электронов и кристаллической решетки. Именно соотношение (2.27) было проверено экспериментально. Типичная зависимость интенсивности рассеянного пучка электронов от его энергии (угол рассеяния полагается неизменным) приведена на рис.2.6. Положение максимумов на кривой оказалось соответствующим выражению (2.27), т.е. пучок электронов действительно вел себя как волновое поле, характеризующееся длиной волны де Бройля.

Дифракция пучка электронов при прохождении через поликристаллическую структуру наблюдалась в 1930 году в экспериментах Дж.П.Томсона.<sup>8</sup> Эти опыты также подтвердили справедливость соотношения (2.26).

Несколько позже были проведены и другие опыты, доказавшие наличие волновых свойств электронов и других более тяжелых частиц. Заметим, однако, что наблюдать дифракцию тяжелых частиц (например, нейтронов) гораздо сложнее, чем электронов. Это связано с тем, что длина волны частицы убывает с увеличением ее массы. Поэтому для наблюдения дифракции нейтронов на кристаллах необходимо их глубокое охлаждение до температур, не превышающих

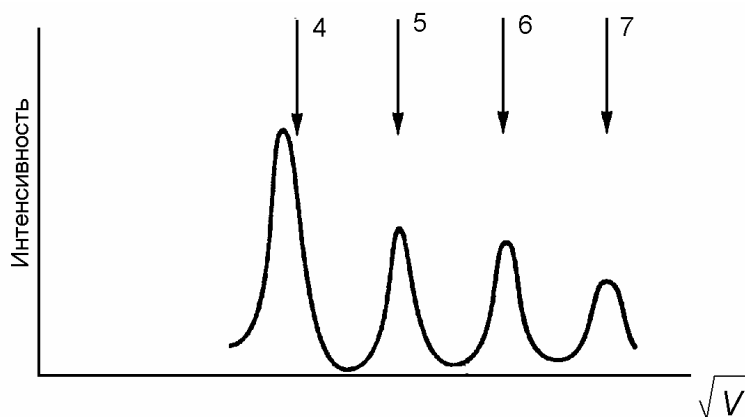


Рис.2.5. Схема опытов Дэвиссона- Джермера

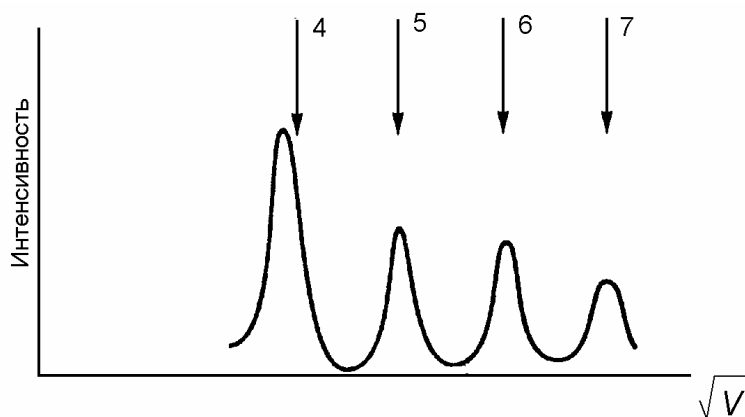


Рис.2.6. Зависимость интенсивности от ускоряющего напряжения.

<sup>8</sup> J.P.Tomson (1892 - 1975) – английский физик, сын Дж.Дж.Томсона, Нобелевская премия (1937) совместно с К.Девиссоном.

несколько десятков градусов Кельвина, так чтобы длина волны оказалась порядка размера между кристаллическими плоскостями. Проведенные рассуждения позволяют также понять, почему волновые свойства макрообъектов практически всегда ненаблюдаемы.

Итак, подведем некоторые итоги.

*Всем микрообъектам присущи как волновые, так и корпускулярные свойства. Их движение в пространстве должно описываться волновой теорией. Соответствующее волновое поле распределено в пространстве и, в соответствии с классической волновой теорией, в дифракционных опытах распространяется сразу через две (а может и несколько) щелей. Однако при измерении микрочастица регистрируется в некоторой точке пространства, как единое целое со всеми присущими этой частице характеристиками (массой, зарядом, энергией и т.п.). Результат измерения носит вероятностный характер, предсказать, где будет обнаружена частица с достоверностью единица, вообще говоря, невозможно. Можно говорить лишь о вероятности того или иного события и эта вероятность, в конечном счете, определяется волновым полем, которое описывает движение частицы в пространстве. Получается, что в интерференционных опытах частица, оставаясь неделимой или нерасщепляемой, способна проходить сразу через две (несколько) щелей.*

Выделенный курсивом текст представляет собой основу концепции корпускулярно-волнового дуализма.

Отметим, правда, одно интересное обстоятельство. Хотя многочисленные эксперименты показывают, что отдельным частицам (фотонам, электронам) присущи как корпускулярные, так и волновые свойства, когда мы говорим об электромагнитном излучении, мы обычно говорим о волновом поле, которое при определенных условиях проявляет корпускулярные свойства. Наоборот, когда мы говорим об электронах, то обычно имеем в виду частицы, которым, бывает, присущи и волновые свойства. Для ансамбля частиц возникает некоторая асимметрия в описании. Причину ее возникновения мы обсудим позже (см. Л\_10), когда будем говорить о связи спина (собственного механического момента) со статистическим описанием ансамбля большого количества частиц.

Для лучшего понимания сути концепции корпускулярно-волнового дуализма вернемся снова к дифракционному опыту с двумя щелями, однако, вместо фотонов рассмотрим теперь прохождение через щели электронов. В случае, если открыта одна из щелей, на экране будут возникать плавные распределения, описывающее распределение электронов ( $P_1$  или  $P_2$  – см. рис.2.7). При открытых обеих щелях на экране возникнет интерференционная картина  $P_{12}$ . Попытаемся теперь узнать, не закрывая отверстия, через которое из них пролетел электрон. Для этого введем в систему дополнительную «измерительную аппаратуру». Например, около каждой из щелей мы поставим по лампочке. Рассеивая излучаемый лампочкой свет (для его регистрации мы будем использовать расположенные рядом детекторы D1 и D2), электрон обнаружит свое местоположение, и мы точно узнаем, через какую из щелей он проскочил. Однако, оказывается, интерференция исчезнет! На экране возникнет распределение  $P=P_1+P_2$ , соответствующее ситуации, когда статистика набиралась при поочередно открытых щелях. Получается, что когда мы «смотрим» на электроны, они ведут себя иначе! В общем это можно понять: свет, рассеиваясь на электронах, «толкает» их и тем самым искажает процесс. Будем убавлять яркость, чтобы уменьшить воздействие света на пролетающие электроны. Но здесь скажется квантовая природа излучения: начиная с определенного момента времени, мы заметим, что интенсивность отдельных световых вспышек, свидетельствующих о пролете электрона, уже не меняется, но некоторые электроны проскакивают незамеченными. Они достигли экрана, но ни один из детекторов их не зарегистрировал. Это понятно: ис-

точник излучения стал настолько слаб, что в момент пролета электрона через систему щелей, в этой области пространства не оказалась ни одного фотона, который мог бы рассеяться на пролетающем мимо электроне. Кажется удивительным другое: именно в этот момент на экране начинает возникать интерференционная картина. Незамеченные электроны характеризуются распределением  $P_{12}$ . Можно пойти другим путем: убавим импульс фотонов, возмущающих движение электронов. Это просто осуществить, если

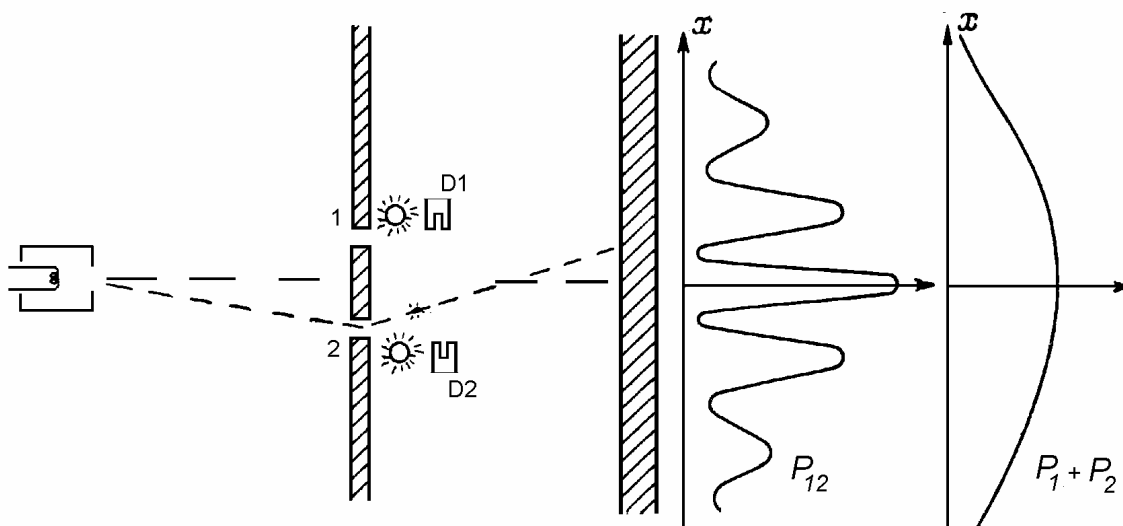


Рис.2.7. Дифракционный опыт с электронами. (см. текст)

использовать излучение более длинноволнового диапазона частот. И тогда толчки электронов будут слабее, степень влияния нашей «измерительной аппаратуры» будет мала. Однако и на этом пути нас ждет неудача. Мы знаем, что предельная разрешающая способность оптической аппаратуры составляет величину порядка длины волны  $\lambda$ . Это значит, что как только длина волны используемого света окажется больше расстояния между щелями  $d$  ( $\lambda \geq d$ ), зарегистрировав электрон, мы не сможем сказать через какую из щелей он пролетел. И опять, именно в этот момент появится интерференционная картина. Получается, что надо выбирать одно из двух: либо мы наблюдаем интерференционную картину, но тогда мы не знаем, через какую из щелей прошел тот или иной электрон, либо мы имеем эту информацию, но тогда интерференционной картины не будет.

Покажем, что в этом последнем утверждении нет ничего таинственного. Воздействие на электрон рассеиваемого на нем фотоне действительно должно привести к замыканию интерференционной картины. Действительно, длина волны рассеиваемого света  $\lambda$  должна быть меньше расстояния между щелями, т.е.  $\lambda < d$ . Тогда для импульса фотона имеем  $p = 2\pi\hbar/\lambda > 2\pi\hbar/d$ . Этот импульс при рассеянии передается электрону и толкает его вбок, т.е.

$$\Delta p_e \geq \frac{2\pi\hbar}{d}. \quad (2.28)$$

В результате электрон отклонится на угол  $\theta$ , равный

$$\theta \sim \frac{\Delta p_e}{p_e} \sim \frac{2\pi\hbar}{dp_e} \sim \frac{\lambda_D}{d}, \quad (2.29)$$

где  $\lambda_D$  - длина волны де Бройля. Но полученная величина как раз соответствует значению угла, под которым виден первый минимум интерференционной картины. То есть картина действительно размоется.

На этом примере рассмотрим вопрос о роли «измерительного прибора» и процедуры изменения в микромире. Мы, конечно, понимаем, что процедура измерения какой-либо физической величины всегда требует ввода в рассматриваемую систему «измерительного прибора», а сама процедура измерения как раз и происходит в результате взаимодействия исследуемого объекта с «измерительным прибором». Мы привыкли, и нам очень хочется считать, что это всегда возможно, что обратное воздействие измерительного прибора на исследуемый объект может быть сделано пренебрежимо малым. То есть физический процесс в отсутствие «измерительного прибора» и при его наличии развивается одинаково. Но это не так. В микромире атомно-молекулярных масштабов таким обратным влиянием «прибора» пренебречь нельзя. Появление в системе «измерительного прибора» меняет физическую систему и заставляет ее эволюционировать иначе, чем в отсутствие измерения.

В том, что существует такая разница между измерениями в микро- и макромире нет ничего удивительного. Рассмотрим, например, процедуру измерения скорости микро- и макрообъекта (например, электрона и авиалайнера) по эффекту Доплера – изменению частоты рассеянного назад излучения. В принципе данные о скорости можно получить по анализу всего нескольких фотонов, попавших в детектор. Конечно, эти фотоны взаимодействуют с исследуемым объектом. Понятно, однако, изменение импульса авиалайнера в результате такого взаимодействия ничтожно мало вне зависимости от частоты используемого излучения. Что касается электрона, изменение его импульса будет существенным, особенно если использовать коротковолновое излучение, позволяющее одновременно определить пространственное положение электрона с высокой точностью.

### **Волновой пакет. Соотношения неопределенностей.**

Итак, в соответствии с гипотезой де Бройля свободной частице с импульсом  $p$  можно поставить в соответствие волну (мы пока ограничимся одномерным случаем)

$$\psi(x,t) = A \exp(i(kx - \omega t)), \quad (2.30)$$

где волновой вектор и частота связаны с импульсом и энергией частицы соотношениями (2.22),  $A$  - нормировочная постоянная. С учетом (2.22) выражение (2.30) можно переписать в виде

$$\psi(x,t) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right). \quad (2.31)$$

Здесь  $E$  и  $p$  - энергия и импульс частицы. А как записать энергию частицы, и какую энергию в (2.22) мы имеем в виду? Для нерелятивистского случая, казалось бы, имеем

$$E = p^2/2m, \quad (2.32)$$

для релятивистской частицы связь энергии и импульса имеет вид

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.33)$$

Заметим, что выражение (2.33) не переходит в (2.32) даже в нерелятивистском пределе. Действительно, разлагая (2.33) в ряд по малому параметру  $p/mc$ , получим

$$E = mc^2 \sqrt{1 + (p/mc)^2} \approx mc^2 + p^2/2m. \quad (2.34)$$

То есть выражение (2.34) содержит по сравнению с (2.32) еще и энергию покоя. Надо ли учитывать энергию покоя при определении частоты волны де Бройля или не надо, заранее не ясно. Оказывается, с физической точки зрения это не имеет существенного значения. Неоднозначность введения частоты волны де Бройля нигде не скажется на физических результатах.

Плоская волна, которую мы связали со свободной частицей, занимает все бесконечное пространство и является нефизическим понятием. Однако из совокупности плоских волн можно составить волновой пакет, локализованный в пространстве

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \psi_{k,\omega} \exp(i(k_x x - \omega t)) dk_x d\omega, \quad (2.35)$$

где  $\psi_{k,\omega}$  - амплитуды плоских волн, образующих пакет. Можно даже представить себе, что частицы – это и есть локализованные волновые пакеты, перемещающиеся в пространстве и во времени. Такое допущение в принципе возможно, только если скорость перемещения пакета в пространстве совпадает со скоростью движения частицы. Из волновой теории мы знаем, что скорость перемещения пакета как целого определяется так называемой групповой скоростью

$$v_g = d\omega/dk. \quad (2.36)$$

Учитывая, что  $E = \hbar\omega$ , а  $p = \hbar k$ , как в релятивистском (2.33), так и в нерелятивистском (2.32) случаях мы получаем

$$v_g = dE/dp = p/m, \quad (2.37)$$

т.е. скорость частицы. Таким образом, пакет действительно перемещается в пространстве со скоростью, равной скорости движения частицы. Однако, различные спектральные компоненты пакета движутся с разными фазовыми скоростями. Например, если мы используем нерелятивистскую связь энергии и импульса (2.32), то для фазовой скорости получим

$$v_{ph} = \omega/k \sim k. \quad (2.38)$$

Это означает, что пакет будет расплываться, и, в отличие от электромагнитных волн, для волн де Бройля вакуум является диспергирующей средой. Поэтому предположение о том, что частицы это сгустки волн де Бройля должно быть отвергнуто.

В 1926 году М.Борн<sup>9</sup> предложил другую интерпретацию для волновой функции  $\psi(\vec{r}, t)$ . Согласно Борну, величина квадрата модуля волновой функции  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  представляет собой плотность вероятности обнаружить частицу в точке с координатой  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ . Поэтому саму волновую функцию часто называют амплитудой вероятности. В таком случае расплывание волнового пакета означает, что с течением времени область пространства, в которой может быть обнаружена частица, увеличивается.

Как уже отмечалось, пакет (2.35) представляет собой суперпозицию плоских волн, т.е. он характеризуется некоторой шириной спектра. Причем, чем больше размер пространственной области локализации пакета, тем уже его спектр в пространстве волновых векторов, и, наоборот, узкое пространственное образование можно приготовить, если использовать большой (широкий) набор волновых векторов. Связь ширины спектра с размером пространственной области локализации частицы может быть получена из (2.35) с помощью обратного преобразования Фурье. Действительно,

$$\psi_{k,\omega} = \int \psi(x,t) \exp(-i(k_x x - \omega t)) dx dt. \quad (2.39)$$

Из (2.39) легко получить, что если волновой пакет  $\psi(x)$  характеризуется областью пространственной локализации размером  $\Delta x$ , то ширина спектра волновых векторов  $\Delta k_x$  удовлетворяет соотношению

$$\Delta k_x \Delta x \geq 1. \quad (2.40)$$

Умножая (2.40) и (2.41) на постоянную Планка, получим

<sup>9</sup> М. Born (1882 - 1970) - немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия (1954).

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar . \quad (2.41)$$

Здесь величина  $\Delta p_x$  задает ширину пакета  $\Psi_{k,\omega}$  в пространстве волновых векторов, или, что то же самое, в импульсном пространстве. Очевидно, величины  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  можно понимать, как неопределенности значений координаты и импульса частицы, состояние которой задается волновой функцией (2.35). В трехмерном случае аналогичные соотношения легко получить и для двух других проекций волнового вектора и координаты:

$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar , \quad \Delta p_z \Delta z \geq \hbar . \quad (2.42)$$

Мы приходим к важному выводу: координата частицы и ее импульс (речь идет о проекциях на одну и ту же ось) не могут быть заданы со сколь угодно высокой точностью. Точность их одновременного определения ограничивается соотношениями (2.41), (2.42). Из сказанного следует очень важный вывод. Постановка задачи о движении частицы в классической механике (по начальным значениям координаты и скорости (или импульса) определить значения этих величин в любой наперед заданный момент времени) оказывается невозможной с точки зрения квантовой теории. Соотношения неопределенностей Гейзенберга не позволяют в принципе задать начальные условия так, как это делается в классической теории. Отсюда в частности следует, что у квантового микрообъекта не может быть траектории. Состояние такого микрообъекта описывается волновым полем,  $\Psi$  - функцией. Задание этого поля целиком и полностью описывает систему, вся информация, которую мы можем узнать о системе, содержится в ее волновой функции.

Соотношения (2.41), (2.42) в квантовой теории были впервые сформулированы В.Гейзенбергом<sup>10</sup> и носят названия соотношения неопределенностей для импульса и координаты. Отметим, что эти соотношения не накладывают никаких ограничений на точность определения, скажем,  $x$  – проекции импульса и  $y$  – проекции координаты.

Аналогично соотношениям (2.41), (2.42) из выражений (2.35), (2.39) легко получить еще одно соотношение, устанавливающее связь между временной длительностью процесса  $\tau$  и шириной его частотного спектра

$$\Delta \nu \cdot \tau \sim 1 . \quad (2.43)$$

Умножая на  $\hbar$ , получаем соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии – времени:

$$\Delta E \cdot \tau \sim \hbar . \quad (2.44)$$

Физическая трактовка этого соотношения заключается в следующем. Если квантовая система живет некоторое время  $\tau$ , то энергия этой системы не может быть определена с точностью лучшей, чем позволяет соотношение неопределенностей

$$\Delta E \geq \hbar / \tau . \quad (2.45)$$

Здесь  $\Delta E$  - точность определения энергии системы. Мы видим, что теоретически точно измерить энергию у системы можно лишь в том случае, если эта система живет бесконечно долго.

Фактически, соотношение неопределенностей энергия – время устанавливает принципиальные ограничения на точность экспериментальной проверки закона сохранения энергии. Если в системе на некоторое время  $\tau$  появится дополнительная энергия  $\Delta E$ , но так, что выполнено соотношение (2.44), то говорить о нарушении закона сохранения энергии нельзя, так как такое нарушение не может быть обнаружено ни в каких экспериментах в принципе.

В заключение отметим, что соотношения неопределенностей представляют собой фундамент квантовой теории. Использование этих соотношений часто позволяет качест-

<sup>10</sup> W.Heisenberg (1901-1976), немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия (1932).

венно анализировать различные физические ситуации, не прибегая к точному решению задачи.

### Задачи.

- 2.1 При прохождении рентгеновского излучения через некоторое вещество было обнаружено, что максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов отдачи составила  $E_{\max} = 0.44$  МэВ. Определить длину волны рентгеновского излучения.
- 2.2 Определить частоту света рассеянного назад на неподвижном электроны в случаях: а)  $\hbar\omega_0 \ll mc^2$ , б)  $\hbar\omega_0 \gg mc^2$ ; здесь  $\omega_0$  - частота падающего излучения.
- 2.3 Определить длину волны рассеянного назад фотона ( $\lambda_0 = 10.6$  мкм) на релятивистском электроны с энергией  $E_e = 20$  ГэВ, движущемся ему навстречу.
- 2.4 На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель протонов, чтобы исследовать структуры с пространственным размером  $l = 1$  фм =  $10^{-13}$  см.
- 2.5 В электронном микроскопе энергия пучка электронов  $E_e = 100$  кэВ. Определить его предельно возможную разрешающую способность.
- 2.6 Определить длины волн де Бройля для электронов и протонов с энергией 10 МэВ.
- 2.7 Исходя из соотношения неопределенностей, получить условие, при выполнении которого частица массы  $m$  может удерживаться в прямоугольной сферически симметричной потенциальной яме радиуса  $R$  и глубины  $V_0$ .
- 2.8 Ширина линии усиления кристалла титаната сапфира ( $Ti : Sapphire$ ) составляет  $\Delta\nu = 2 \cdot 10^{14}$  с<sup>-1</sup>. Оценить предельную длительность импульса генерации в лазере на кристалле  $Ti : Sapphire$ .
- 2.9 Исходя из соотношения неопределенностей, оценить энергию нулевых колебаний гармонического осциллятора.
- 2.10 Исходя из соотношения неопределенностей, оценить энергию основного состояния атома водорода.
- 2.11 Используя соотношение неопределенностей, оценить кинетическую энергию нуклона в атомном ядре.
- 2.12 Исходя из соотношения неопределенностей, показать, что электрон не может удерживаться внутри атомного ядра.
- 2.13 В мезонной теории ядерных сил предполагается, что взаимодействие между нуклонами осуществляется посредством испускания одним из нуклонов и последующим поглощением вторым нуклоном частицы, переносчика взаимодействия, нейтрального или заряженного пиона ( $\pi^0, \pi^\pm$ ). Исходя из соотношения неопределенностей, оцените массу пиона. Радиус действия ядерных сил порядка  $R \approx 1.4 \cdot 10^{-13}$  см.